EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 1. El fenómeno financiero. Concepto de capital financiero (cierto y aleatorio). Intercambio de capitales financieros. Leyes financieras. Propiedades. Operación financiera (cierta y aleatoria). Clasificación.

Edición Enero 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1.1 El fenómeno financiero

Se puede definir el fenómeno financiero como un hecho económico en el que intervienen capitales financieros y existe intercambio de bienes económicos no simultáneos.

1.1.1 Capital financiero

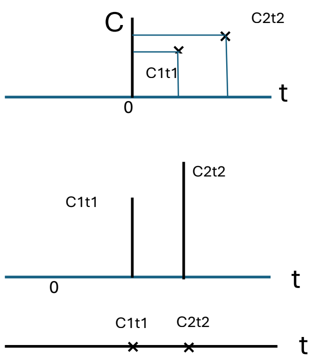
Entendemos por Capital financiero, según el profesor A. de Pablo , "la medida de cualquier activo real o financiero, expresada por su cuantía y su vencimiento (es decir, disponibilidad)" .

Podemos escribir este capital financiero como un par ordenado de números (C, t), cuantía y vencimiento, respectivamente.

$C \in \Re+$desde un punto de vista objetivo (solo toma números reales positivos) y $C \in \Re$ desde un punto de vista subjetivo, es decir puede tomar valores positivos o negativos dependiendo del punto de vista del acreedor (C>0) o del deudor (C<0) del capital financiero.

$T \in \Re$. Puede tomar valores positivos (vencimientos futuros) o valores negativos (vencimientos pasados).

Se puede representar gráficamente, vemos tres ejemplos.



La base de la Matemática financiera se basa en una hipótesis de trabajo, el concepto del principio de **subestimación de necesidades futuras.**

Este principio asume que cualquier sujeto económico racional prefiere, a igualdad de cantidad y calidad, los bienes disponibles en el momento presente a los que se pueden disponer en un momento futuro.

Según el profesor V. T. González Catalá "todo sujeto económico subestima las necesidades futuras respecto de las presentes, lo que equivale a considerar o interpretar **el tiempo como un bien económico negativo**, pues la apreciación de todo bien disminuye a medida que el tiempo de disponibilidad está más alejado".

Podemos definir también el espacio financiero como el conjunto de todos los posibles valores de capital financiero que pueden existir en un fenómeno financiero.

Espacio financiero= $E=\{(C, t) / C \in \Re+ / t \in \Re \}$

1.1.1.2 Capitales financieros ciertos y aleatorios

La cuantía y el vencimiento que definen a un capital financiero pueden venir definidos en términos ciertos o deterministas o bien en términos de probabilidad o aleatorios.

Esto último sucede cuando la cuantía, el diferimiento, o ambos, toman su valor en dependencia del acaecimiento de un fenómeno aleatorio, del que se conoce su distribución de probabilidad.

Así, denominamos **capital financiero aleatorio**, en contraposición a los capitales financieros ciertos, a aquel que está definido en términos de probabilidad para alguno o todos sus componentes.

Para operar en la matemática financiera con estos capitales financieros aleatorios es necesario definir su equivalente cierto.

Así definimos al capital financiero aleatorio como una función de distribución conjunta F(C,t) donde cada posible par de números (C,t) perteneciente al capital aleatorio(Ɛ,ŋ) tiene como cuantía equivalente cierta en el punto de vencimiento p ,según una ley financiera (véase apartado 1.2)previamente establecida F(t,p) a la esperanza matemática de Ɛ .

[E(Ɛ´), p] = (V,p), siendo V la cuantía equivalente cierta o determinista en el punto de vencimiento p.

Estas premisas se cumplen en la medida en la que se cumpla la ley de los grandes números.

1.1.1.3 Intercambio de capitales financieros

En el fenómeno financiero existe la necesidad de comparar capitales financieros para saber cuál de ellos es preferible.

Consideremos dos capitales cualesquiera (C1,t1) y (C2,t2).

Dado el principio de subestimación de los capitales futuros existen casos en los que la comparación es directa.

Si C1=C2 y t1<t2, consideramos a (C1,t1) > (C2,t2)

Si C1> C2 y t1=t2, consideramos a (C1,t1) > (C2,t2)

Pero si C1≠C2 y t1≠t2 , no podemos asegurar de forma inmediata con el principio de subestimación de capitales futuros cuál de los dos capitales financieros es preferible.

Para comparar estos capitales es necesario referir ambos capitales a un punto de vencimiento p y así comparar las cuantías en el mismo vencimiento.

Para este propósito necesitamos introduje el concepto de Ley Financiera.

1.2 Leyes financieras

La expresión matemática que establece el criterio para determinar V como el valor de la cuantía c al pasar del vencimiento en el momento t hasta el momento p, se denomina Ley financiera.

También podemos pensar en la ley financiera como el modelo matemático de proyección en p de (C,t).F

Podemos expresarla así:

V = F (C; t; p)

Cuando t<p se llama ley de capitalización y se escribe L(C; t; p).

Cuando t>p se llama ley de descuento y se escribe A(C; t; p).

1.2.1 Propiedades

- **F es positiva:**
  Desde un punto de vista objetivo C ∈ $\Re$+ como medida de un bien económico y por lo tanto V>0.
  Desde un punto de vista subjetivo C ∈ $\Re$, V debe ser del mismo signo que C.
- **F es homogénea de grado uno respecto a C:**
  La equivalencia de capitales se mantiene, aunque se cambien las unidades de medida.
  Si (C,t) es equivalente a (V,p) entonces (K*C;t) es equivalente a (k*V;p).
  En el caso de que K=1/C, se obtiene la ley financiera unitaria que se expresa F(t,p).
  En adelante, por comodidad y utilidad, se usarán leyes unitarias para el desarrollo del temario .
  Por tanto, V = C*F(t;p)
- **F cumple el principio de subestimación de capitales futuros:**
  De modo que F(t;p) < F(t;p+h) y F(t;p)>F(t+h;p)
  En la práctica la función que define la ley financiera es derivable,
  y por tanto cumple:

  $$ {dF(t;p)}/{dt} > 0 \ \text{ y } \ {dF(t;p)}/{dp} < 0 \,. $$

- **Propiedad reflexiva:**

  Si t=p → F(t;t) =F(p;p)= 1

- **Continuidad respecto a t y p :**
  Si hubiera puntos o tramos de discontinuidad para t o p , la función no serviría como ley financiera de valoración con carácter general.

1.3 Operaciones financieras

Podemos definir a las operaciones financieras como un intercambio de capitales financieros con vencimientos distintos , en los que intervienen al menos dos sujetos económicos.

En la operación financiera cabe distinguir los siguientes elementos:

Elementos subjetivos, son las personas físicas o jurídicas que intervienen en la operación.

El Acreedor que asume el compromiso de la prestación y entrega el primer capital

El Deudor que asume el compromiso de la contraprestación.

Las prestaciones y las contraprestaciones son los elementos objetivos de la operación.

Consta igualmente de un origen o primer vencimiento o disposición del primer capital financiero, un final o vencimiento del último capital financiero y una duración que es la diferencia entre ambas.

El deudor y el acreedor pueden intercambiarse en el caso, por ejemplo, de un crédito reciproco.

Las operaciones financieras deben cumplir al menos las premisas:

- El intercambio de capitales financieros no debe ser simultaneo.
- Existe un mutuo acuerdo previo entre los sujetos participantes de la operación.
- Se cumple la equivalencia financiera al aplicar la ley de valoración financiera previamente pactada.

Conocido el conjunto de capitales financieros que definen una operación, y la ley financiera acordada, **la equivalencia financiera** es el principio fundamental que establece que el sumatorio de los valores financieros de la prestación han de coincidir con el sumatorio de los valores financieros de la contraprestación en cualquier momento α del tiempo.

Dados (Cs;ts)=capitales que componen la prestación y (C´s;t´s)=capitales que componen la contraprestación,

$\sum_{s=0}^{n} Cs * F(t;p) = \sum_{s=0}^{m} C's *$ F(t;p) $\forall\ \alpha$

Las operaciones financieras son ciertas cuando están definidos de un modo determinista todas las cuantías y vencimientos y aleatorias cuando al menos un capital o un vencimiento es de carácter probabilístico y condicionado al acaecimiento de un determinado suceso.

Tal y como se expresó en un punto anterior, se deben convertir en sus equivalentes ciertos o deterministas para poder aplicar la ley de equivalencia financiera.

1.3.1 Clasificación de las operaciones financieras

Según:

- Duración:
  - ✓ Corta: menos de un año, suelen ser leyes financieras simples.
  - ✓ Larga: más de un año, suelen ser leyes financieras compuestas.
- Numero de capitales:
  - ✓ Simples, solo un capital tanto en prestación como en contraprestación.
  - ✓ Compuestas; varios capitales en la prestación y/o la contraprestación.
    - Constitución: varios capitales en la prestación y una en la contraprestación
    - Amortización: un capital en la prestación y varios en la contraprestación
- Sentido crediticio:
  - ✓ Crédito unilateral, no cambia las posiciones de los elementos subjetivos
  - ✓ Crédito reciproco, cambia la posición de los elementos subjetivos.
- Ley financiera utilizada:
  - ✓ Capitalización.
  - ✓ Descuento.
  - ✓ Mixta, cambiando el tipo de ley utilizada según el tramo.
- Partes intervinientes
  - ✓ Bancarias, uno de los elementos es una entidad financiera.
  - ✓ No bancarias.
- Tipo de liquidez
  - ✓ Interna
    - Total: se puede cancelar en cualquier momento.
    - Parcial: no permitida la cancelación hasta el vencimiento o permitida con previo acuerdo.
  - ✓ Externa: Esta permitida la transferencia de la operación a otros sujetos.

EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 2. Magnitudes derivadas más importantes. Factores y réditos. Réditos acumulados. Tantos de capitalización y de descuento. Tanto acumulado. Tantos instantáneos. Interés y descuento.

Edición Enero 2025

1.1 Magnitudes derivadas más importantes

La cuantía y el vencimiento de los capitales financieros que componen un espacio financiero y participan en las operaciones financiera son magnitudes llamadas primarias y fundamentales.

Pueden ser medidas directamente y es posible elegir sus unidades de medida.

Las magnitudes que aparecen como resultado de las operaciones realizadas con las magnitudes fundamentales son las magnitudes derivadas y sus unidades de medida dependerán de las unidades en las que se midieron las fundamentales.

1.1.1 Factor financiero

El concepto de factor financiero surge al aplicar la definición de equivalencia financiera. Va asociado a un intervalo temporal (t1;t2) y es el numero por el que hay que multiplicar una cuantía en un extremo para obtener el equivalente en el otro extremo.

$$(C1;t1) \sim (C2;t2) \Rightarrow C1*F(t1;p) = \Rightarrow C2*F(t2;p)$$

$$\frac{C2}{C1} = \frac{\mathrm{F(t1;p)}}{\mathrm{F(t2;p)}} = f(t1;t2;p)$$

$$C2 = C1 * f(t1;t2;p)$$

Siendo $f(t1;t2;p)$ el factor financiero asociado al intervalo (t1;t2)

Dado el principio de subestimación de capitales futuros, cuando el factor financiero es mayor que 1 , nos desplazamos a la derecha en la línea temporal y hacia la izquierda cuando es menor que 1.

1.1.1.1 Factor de capitalización

Es el numero por el que hay que multiplicar a la cuantía que vence en el extremo inferior del intervalo de tiempo para obtener la cuantía equivalente en el extremo superior

(Hay que recordar que la ley financiera traslada capitales hasta p y si se desea hallar el equivalente en otro momento que no sea p se utiliza el factor financiero).

Aplicando la definición de capitales equivalentes dada una ley financiera L(t;p) .

(hay que recordar que la ley financiera traslada capitales hasta p y si se desea hallar el equivalente en otro momento que no sea p se utiliza el factor financiero).

Consideramos que $t1<t2<p$

$$C1*L(t1;p) = C2*L(t2;p) = V$$

$$\frac{C2}{C1} = \frac{\mathrm{L(t1;p)}}{\mathrm{L(t2;p)}} = u(t1;t2;p)$$

$$u(t1;t2;p) = factor\ de\ capitalizacion > 1$$

Es mayor que la unidad porque C2 será siempre mayor que C1.

Nos desplazamos hacia la derecha en la línea temporal, conocido C1 obtenemos C2.

si nos desplazásemos hacia la izquierda, de t2 a t1, el factor sería de contracapitalización y la definición seria:

$$\frac{C1}{C2} = \frac{\mathrm{L(t2;p)}}{\mathrm{L(t1;p)}} = u´(t1;t2;p) < 1$$

1.1.1.2 Factor de descuento

El factor de descuento es el numero por el que hay que multiplicar a la cuantía que vence en el extremo superior del intervalo de tiempo para obtener la cuantía equivalente en el extremo inferior.

Dada la ley de descuento A(t;p) y la definición de capitales equivalentes

Y considerando que p<t1<t2

C1*A(t1;p) =C2*A(t2;p)= V

$$\frac{C1}{C2} = \frac{\mathrm{A(t2;p)}}{\mathrm{A(t1;p)}} = v(t1;t2;p)$$

$$v(t1;t2;p) = factor\ de\ descuento < 1$$

En este caso , conocemos C2 y queremos obtener C1, desplazándonos hacia la izquierda en la línea temporal.

En el caso en el que haya que desplazarse en sentido contrario en la línea temporal, hacia la derecha, hablaremos del factor de contradescuento.

$$\frac{C2}{C1} = \frac{\mathrm{L(t1;p)}}{\mathrm{L(t2;p)}} = v´(t1;t2;p) > 1$$

1.1.1.3 Propiedades de los factores

- Son de dimensión cero respecto a C y T.
- Dependen de la situación de P
- Cumplen la propiedad multiplicativa ; Ejemplo: u(t1;t2) * u(t2;t3) = u(t1;t3)

1.1.2 Réditos

Podemos definir el redito como el complemento a la unidad en valor absoluto del correspondiente factor financiero.

Y es útil para calcular los incrementos (interés o descuento) que experimenta la cuantía de un capital al trasladar su vencimiento en el tiempo.

1.1.2.1 Réditos en capitalización

De este modo podemos definir:

- redito de capitalización = i(t1; t2) = u(t1;t2) – 1

  como el incremento, o interés, que experimenta una cuantía dada una ley financiera de capitalización al diferir su vencimiento de t1 a t2.

$$\mathrm{i(t1;t2)} = \frac{\mathrm{L(t1;p)}}{\mathrm{L(t2;p)}} - 1 = \frac{\mathrm{L(t1;p)} - \mathrm{L(t2;p)}}{\mathrm{L(t2;p)}} = \frac{C2 - C1}{C1}$$

- el redito de contracapitalización se obtiene de manera análoga, pero utilizando el factor de contracapitalización

  i´(t1;t2) = 1-u´(t1;t2)

$$\mathrm{i´(t1;t2)} = 1 - \frac{\mathrm{L(t2;p)}}{\mathrm{L(t1;p)}} = \frac{\mathrm{L(t1;p)} - \mathrm{L(t2;p)}}{\mathrm{L(t1;p)}} = \frac{C2 - C1}{C2}$$

1.1.2.2 Réditos en descuento

Dada la definición de redito, definimos:

De este modo podemos definir:

- redito de descuento = d(t1; t2) = 1-v(t1;t2)

  como el incremento, o descuento, que experimenta una cuantía dada una ley financiera de descuento al adelantar su vencimiento de t2 a t1.

$$\mathrm{d(t1;t2)} = 1 - \frac{\mathrm{A(t2;p)}}{\mathrm{A(t1;p)}} = \frac{\mathrm{A(t1;p)} - A\mathrm{(t2;p)}}{\mathrm{A(t2;p)}} = \frac{C2 - C1}{C2}$$

- el redito de contradescuento se obtiene de manera análoga pero utilizando el factor de contradescuento

  d´(t1;t2) = v´(t1;t2) – 1

$$\mathrm{d´(t1;t2)} = \frac{\mathrm{A(t1;p)}}{\mathrm{A(t2;p)}} - 1 = \frac{\mathrm{A(t1;p)} - \mathrm{A(t2;p)}}{\mathrm{A(t2;p)}} = \frac{C2 - C1}{C1}$$

1.1.3 Réditos acumulados

El redito acumulado mide la variación de capital por unidad de cuantía al pasar de un momento a otro en el tiempo el vencimiento pero referido al momento p.

Es la diferencia, dada una ley financiera, entre trasladar el capital unitario de t2 a p y de t1a p.

Poniendo el ejemplo de un redito acumulado de descuento lo expresaríamos con la letra griega η, de este modo:

η(t1;t2) = A(t1;p)-A(t2;p)

El mismo caso en capitalización se representa:

Ψ(t1;t2)=L(t1;p)-L(t2;p)

1.1.4 Tantos de capitalización y descuento

El tanto es el resultado de dividir el redito entre la amplitud del intervalo de tiempo

Así, lo podemos definir como el redito por unidad de tiempo o el redito promedio de ese intervalo.

Los Tantos miden el incremento por unidad de cuantía y por unidad de tiempo al pasar de un extremo a otro del intervalo (t1;t2)

Dado que el factor y el redito son de dimensión cero respecto a la cuantía, el tanto también lo será y es de dimensión -1 respecto al tiempo.

También se les suele llamar tipo de interés o de descuento.

1.1.4.1 Tantos en capitalización

El tanto de capitalización, también se denomina tipo de interés o tasa, se representa con ρ.

Dada la definición de tanto y redito obtenemos.

$$\rho\ (t1;t2)=\frac{i(t1;t2)}{t2-t1}=\frac{L(t1;p)-L(t2;p)}{(t2-t1)*(L(t2;p)}$$

Para el tanto de contracapitalización se obtiene:

$$\rho'\ (t1;t2)=\frac{i'(t1;t2)}{t2-t1}=\frac{L(t1;p)-L(t2;p)}{(t2-t1)*L(t1;p)}$$

1.1.4.2 Tantos en descuento

Lo representamos con δ, y de manera análoga al tanto de capitalización obtenemos:

Tanto de descuento

$$\delta(t1;t2) = \frac{d(t1;t2)}{t2 - t1} = \frac{A(t1;p) - A(t2;p)}{(t2 - t1) * A(t1;p)}$$

Tanto de contradescuento

$$\delta'(t1;t2) = \frac{d'(t1;t2)}{t2 - t1} = \frac{A(t1;p) - A(t2;p)}{(t2 - t1) * A(t2;p)}$$

1.1.5 Tantos acumulados

Definimos los tantos acumulados como el redito acumulado dividido por la amplitud del intervalo.

Es la variación del redito acumulado por unidad de tiempo.

Así, tendremos el tanto acumulado en capitalización, μ:

$$\mu(t1;t2) = \frac{\Psi(t1;t2)}{t2 - t1} = \frac{L(t1;p) - L(t2;p)}{(t2 - t1)}$$

y el tanto acumulado en descuento, ν

$$\nu(t1;t2) = \frac{\eta(t1;t2)}{t2 - t1} = \frac{A(t1;p) - A(t2;p)}{(t2 - t1)}$$

1.1.6 Tantos instantáneos

Al estudiar amplitudes del intervalo de tiempo infinitesimales, es decir que la diferencia entre t1 y t2 tiende a cero, no se pueden utilizar las magnitudes factor, que tiende a uno, y redito que tiende a cero.

En este caso debemos definir y utilizar el tanto instantáneo.

Lo definimos como el límite del tanto cuando la amplitud del intervalo tiende a cero.

Depende de los vencimientos t y p.

Si la ley financiera es derivable, como ocurre en la práctica, el tanto instantáneo lo podemos expresar , en el caso de la capitalización, como:

$$\rho(t) = -\frac{dL(t;p)}{dt} \times \frac{1}{L(t;p)} = -\frac{d \ln L(t;p)}{dt}$$

Con el tanto instantáneo podemos realizar el ejercicio inverso de conocer la ley financiera correspondiente.

SI ρ(t) es integrable, integrando entre t y p obtendremos la ley financiera.

Si integramos entre t1 y t2 obtendremos el correspondiente factor.

1.1.7 Interés y descuento

Dada una ley de Capitalización, El interés ordinario o pospagable, mide el incremento que experimenta la cuantía de un capital disponible en t1 al diferir su disponibilidad hasta t2, suponiendo t1<t2<p.

El interés es un capital financiero (I,t2) y cuya cuantía se obtiene:

I= C 1 * i(t1;t2)

Siendo C1 la cuantía disponible en t1.

A la suma C1+I se le denomina montante y es la cuantía que denominamos C2 disponible en t2.

Dada una ley de capitalización, el interés anticipado o prepagable mide la disminución que experimenta la cuantía de un capital disponible en t2 al adelantar su disponibilidad hasta t1, suponiendo t1<t2<p.

I´=C2 * i´(t1;t2).

Dada una ley de descuento, el descuento ordinario mide la disminución que experimenta la cuantía de un capital disponible en t2 al adelantar su disponibilidad hasta t1, suponiendo p<t1<t2.

D= C 2 * d(t1;t2)

A la diferencia C2-D se le denomina valor descontado. Si se descuenta a fecha de hoy se le denomina valor actual.

Dada una ley de descuento, el descuento diferido mide el incremento que experimenta la cuantía de un capital disponible en t1 al diferir su disponibilidad hasta t2, suponiendo p<t1<t2.

D´=C1 * d´(t1;t2).

EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 3. Leyes financieras clásicas de capitalización y descuento. Capitalización simple y capitalización compuesta. Comparación entre ambas. Descuento simple comercial, descuento simple racional y descuento compuesto. Comparación entre los mismos.

Edición Enero 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1.Leyes financieras clásicas de capitalización y descuento.

Como ya se expuso en un tema anterior, una expresión matemática que relacione c,t y p , cumpla las propiedades de homogeneidad, reflexividad, subestimación y continuidad es susceptible de poder ser utilizada como Ley Financiera.

Vamos a describir brevemente algunos conjuntos en los que las leyes financieras comparten alguna característica común y que nos servirá para definir las leyes clásicas que vamos a estudiar.

1.1 Estacionariedad

Podemos agrupar las leyes en estacionarias y no estacionarias.

Las leyes estacionarias que son las que estudiaremos.

Estas **leyes estacionarias** no varían ante cualquier desplazamiento que se produzca en la variable tiempo. No tienen en cuenta cuando se produce la operación, solo la amplitud del intervalo entre t y p .

$F(t,p) = F(t+h,p+h) \quad \forall h \in \Re$

1.2 Leyes sumativas y multiplicativas

La condición necesaria para que una **ley financiera** sea **sumativa** es que el tanto instantáneo acumulado no dependa de que punto de valoración p se elija.

Las leyes sumativas de capitalización son aquellas en las que para dos intervalos de tiempo consecutivos cualesquiera (t,s) y (s,p) , considerando que $t<s<p$, se cumple que los intereses de t a s con punto de valoración en s , sumados a los intereses de s a p con punto de valoración en p, son idénticos a los intereses del intervalo total (t,p) con punto d valoración en p.

$I(t,s)+I(s,p)=I(t,p)$

Se puede demostrar que su expresión matemática adopta la forma

$L(t;p)= 1+ \phi(p) - \phi(t)$

La función ϕ debe ser creciente, de modo que $L(t;p)>1$.

Las leyes sumativas de descuento las definimos de manera análoga, pero de forma que $p<s<t$ y sumamos los descuentos parciales para equipararlo al interés del intervalo total.

$D(t,s) + D(s,p) = D(t,p)$

Adoptan la forma

$A(t;p)= 1- [\phi(t) - \phi(p)]$

La condición necesaria para que una **ley financiera** sea **multiplicativa** es que el tanto instantáneo , así como la equivalencia de capitales, no dependa de qué punto de valoración p se elija.

En las **leyes multiplicativas de capitalización** con punto de valoración en p, dados dos intervalos de tiempo consecutivos cualesquiera (t,s) y (s,p) , considerando que t<s<p, se cumple que:

L(t,s) * L(s,p) = L(t,p)

Su expresión matemática adopta la forma:

$$L(t;p) = e^{\phi(p)-\phi(t)}$$

Análogamente, las leyes de descuento multiplicativas, con p<s<t, cumplen que:

A(t,s) * A(s,p) = A(t,p)

Adoptan la siguiente forma:

$$A(t;p) = e^{-[\phi(t)-\phi(p)]}$$

1.3 Leyes unificables

Son las leyes que vamos a estudiar y cumplen que para cualesquiera de capitales sumandos (C1,t1);...(Cn;tn) , es posible encontrar al menos un capital suma financiera (C;τ), con independencia del punto p elegido.

Se verifica que $\sum_{s=1}^{n} Cs \times f(ts;\tau) = C \ \ \forall p$

Siendo f(ts; τ) el factor financiero y Cs* f(ts; τ) la cuantía equivalente a (Cs;ts) en τ.

El capital (C; τ) recibe el nombre de capital unificado y τ vencimiento común.

2.Capitalizacion simple y compuesta.

Las leyes financieras de capitalización y descuento ya fueron descritas en anteriores temas, ahora vamos a describir las leyes de capitalización que se utilizan en la practica

2.1Capitalización simple

Es una ley sumativa y estacionaria.

Tiene la forma de ley sumativa

L(t;p)= 1+ ϕ(p) - ϕ(t) en la que la función ϕ es una constante para poder cumplir con las condiciones de estacionariedad.

De modo que queda la siguiente expresión

L(t;p)=1+i*(p-t)

Con i>0 y t<p.

Se utiliza en operaciones a corto plazo y se la conoce como interés simple.

El factor de capitalización que se deriva de la ley es :

$$u(t1;t2) = \frac{1 + i * (p - t1)}{1 + i * (p - t2)}$$

La equivalencia de capitales depende del punto p.

El redito es:

$$i(t1; t2) = u(t1; t2) - 1 = \frac{i * (p - t1)}{1 + i * (p - t2)}$$

Cuando p=t2 → $i(t1; t2) = i * (t2 - t1)$

El tanto:

$$\rho(t1; t2) = \frac{i(t1; t2)}{t2 - t1} = \frac{i}{1 + i * (p - t2)}$$

Si p=t2 → $\rho(t1; t2) = i$

En capitalización simple cuando p coincide con el extremo superior del intervalo, i es el tanto ordinario y además es el tanto acumulado y el tanto instantáneo acumulado independientemente del valor de p.

Tanto instantáneo:

$$\rho(t) = \frac{i}{1 + i * (p - t)}$$

Las magnitudes derivadas acumuladas en capitalización simple no dependen de p

Redito acumulado:

$$\psi(t1; t2) = i * (t2 - t1)$$

Tanto acumulado:

$$\mu(t1; t2) = i$$

Tanto instantáneo acumulado:

$$\mu(t) = i$$

En la práctica , la capitalización simple se aplica en operaciones menores de un año y por lo tanto es necesario en ocasiones cambiar la unidad de tiempo , pasando de años a meses, por ejemplo.

Se cumple que i=im*m , de modo que im=i/m

Siendo im el interés del periodo que resulta de dividir por m el periodo considerado para i.

2.2Capitalización compuesta

Dado que es una ley multiplicativa y estacionaria y dadas las propiedades inherentes a este tipo de leyes, su expresión general es:

$\boldsymbol{L(t;p) = e^{k*(p-t)} = (1+i)^{(p-t)}}$

Siendo i>0 , k>0 y t<p

Es utilizada en operaciones más largas de un año y se la denomina interés compuesto.

Se deriva el **factor de capitalización**:

$$u(t1;t2) = \frac{(1+i)^{(p-t1)}}{(1+i)^{(p-t2)}} = (1+i)^{(t2-t1)}$$

No depende de p y es una gran ventaja para la equivalencia de capitales que solo depende del intervalo de tiempo y de i.

Redito:

$$i(t1;t2) = (1+i)^{(t2-t1)}$$

Cuando el periodo es unitario entonces i es el redito de capitalización compuesta,

Siempre que haya concordancia en el periodo unitario y la unidad de tiempo del redito.

Tanto:

$$\boldsymbol{\rho(t1;t2) = \frac{(1+i)^{(t2-t1)}}{t2-t1}}$$

Coincide con el redito para periodos unitarios.

Tanto instantáneo:

$$\boldsymbol{\rho(t)} = \ln(1+i) = \boldsymbol{\rho}$$

Es una constante para todo intervalo de tiempo y coincide con i para los periodos unitarios.

Las magnitudes acumuladas en capitalización constante dependen de p y no se utilizan .

Para calcular réditos equivalentes pero de unidades de tiempo diferentes podemos aplicar la formula

$$(1+ik)^k = (1+im)^m$$

Siendo k y m los periodos asociados a ik e im respectivamente.

En un año se contienen k o m periodos.

Cuando uno de los periodos es el año, se llama tanto efectivo anual=i

1+i=$(1+im)^m$

Im se aplica a periodos 1/m de año y se denomina tanto nominal. El tanto de im proyectado aritméticamente al año de frecuencia m , se denomina tanto nominal de frecuencia m y se escribe

Jm=m*im

2.3 Comparación entre capitalización compuesta y simple.

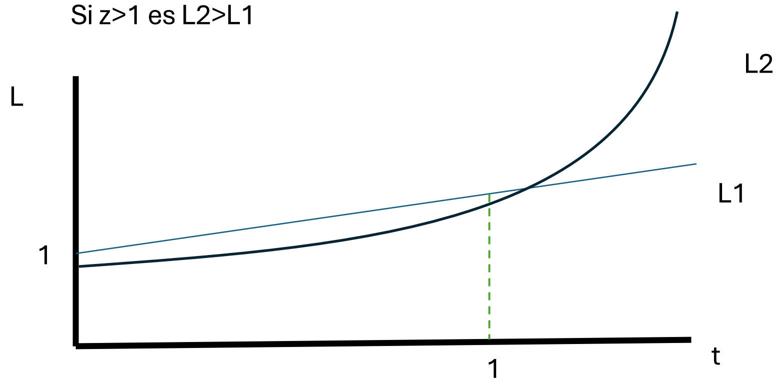
Comparamos ambas leyes cuando coincide el valor del parámetro i

Siendo z=t2-t1, L1=ley de capitalización simple y L2=ley de capitalización compuesta

Si z=0 o z=1 es L1=L2

Si 0<z<1 es L1>L2

Si z>1 es L2>L1



3.Descuento.Simple comercial simple racional y compuesto.

3.1 Descuento simple comercial

Es una ley de descuento sumativa y estacionaria

Su expresión general dadas las propiedades de estas leyes en el descuento es:

A(t;p)=1-d+(t-p)

Siendo d>o y t<p

De este modo y dad que A(t;p)> 0 , el descuento comercial solo se puede aplicar siempre que el intervalo de tiempo considerado sea menor que 1/d.

Factor financiero:

$$v(t1;t2) = \frac{1 - d * (t2 - p)}{1 - d * (t1 - p)}$$

Depende de p , de t1 y de t2.

En la práctica p se sitúa en el momento actual o en el vencimie3ntpo del primer capital.

Redito:

$$d(t1;t2) = 1 - v(t1;t2) = \frac{d * (t2 - t1)}{1 - d * (t1 - p)}$$

Si t1=p

d(t1;t2)=d*(t2-t1)

Tanto:

$$\delta(t1;t2) = \frac{d}{1 - d * (t1 - p)}$$

Si t1=p

$$\delta(t1;t2) = d$$

Tanto instantáneo:

$$\delta(t) = \frac{d}{1 - d * (t - p)}$$

Las magnitudes derivadas no dependen de p

Redito acumulado:

$$\eta(t1;t2) = d * (t2 - t1)$$

Tanto acumulado y tanto instantáneo acumulado es igual a d y es constante.

De manera análoga a la capitalización simple los tantos equivalentes referidos a diferentes amplitudes de periodo son :

d=dm*m

3.2 Descuento racional

Es una ley conjugada, es decir inversa, de la capitalización simple.

Además, se permuta t y p.

Se denomina también descuento matemático.

A(t;p)=$\frac{1}{1+i(t-p)}$

Siendo i>0 y t>p

Se utiliza en el corto plazo y no es ni sumativa, ni unificable, pero si es estacionaria.

Factor financiero:

$$v(t1;t2) = \frac{1 + i * (t1 - p)}{1 + i * (t2 - p)}$$

Depende de p , de t1 y de t2.

Redito:

$$d(t1;t2) = \frac{i*(t2-t1)}{1+i*(t2-p)}$$

Tanto:

$$\delta(t1;t2) = \frac{i}{1+i*(t2-p)}$$

Tanto instantáneo:

$$\delta(t) = \frac{i}{1+i*(t-p)}$$

Las magnitudes acumuladas no aportan ninguna interpretación y no se toman en cuenta.

3.3 Descuento compuesto

Es la ley de descuento que es multiplicativa y estacionaria.

Dadas las propiedades de este tipo de leyes:

A(t;p)=$e^{-k*(t-p)} = (1-d)^{t-p} = (1+i)^{-(t-p)}$

Se deriva el **factor de descuento**:

$$v(t1;t2) == (1-d)^{(t2-t1)} = (1+i)^{-(t2-t1)}$$

No depende de p y es una gran ventaja para la equivalencia de capitales que solo depende del intervalo de tiempo y de i.

Redito:

$$d(t1;t2) = 1-(1-d)^{(t2-t1)} = 1-(1+i)^{-(t2-t1)}$$

Cuando el periodo es unitario entonces d es el redito de descuento compuesto,

Y el parámetro i es el redito de contrade3scuento para periodos unitarios.

Siempre que haya concordancia en el periodo unitario y la unidad de tiempo del redito.

Tanto instantáneo:

$$\delta(t) = \ln(1+i) = \delta$$

Es una constante para todo intervalo de tiempo y coincide con i para los periodos unitarios.

En definitiva, la capitalización compuesta y el descuento compuesto proporcionan los mismos resultados al capitalizar y contradescontar o viceversa. Siempre que coincidan los parámetros k o i.

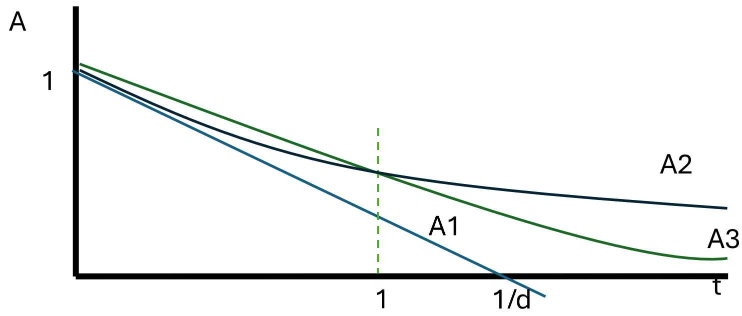
En la práctica es indiferente operar con cualquiera de los dos si coinciden estos parámetros.

3.4 Comparación entre los descuentos.

Comparamos las tres leyes gráficamente,

cuando coincide el valor del parámetro d

Siendo A1=descuento simple comercial, A2=descuento racional y A3= descuento compuesto



EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 4. Distribución de capitales. Concepto financiero de renta (cierta y aleatoria). Valor capital de una renta. Clases de rentas . Propiedades.

Edición Enero 2025

4.1. Distribución de capitales.

En los fenómenos financieros existe la necesidad de operar con conjuntos de capitales financieros con vencimientos en momentos diferentes. Para este propósito es necesario definir y operar con distribuciones de capitales.

Sea B un $\sigma - \acute{a}lgebra\ de\ Borel$ y T un conjunto de vencimientos de un fenómeno financiero.

Sea (T,B) la estructura de vencimientos del conjunto financiero y Ts ϵ B el vencimiento en el momento s.

T, representa un conjunto financiero o **distribución de capitales**, cuando para todo Ts ϵ B se define una aplicación M , definida en $\Re$+, que expresa el total de cuantía o masa de capital con vencimiento en T.

Siendo la terna (T,B.M) la que permite conocer la masa de capital asociado a cualquier

Ts ϵ B y que define la distribución de capitales o conjunto financiero.

4.2. Concepto financiero de renta.

Sea P una partición de un intervalo de tiempo I=[t0;tn] en n subintervalos Ir en el que

$\bigcup_{r=1}^{n} Ir$ // $Ir \neq 0 \neq Ij$ // r$\neq j$ // Ir$\bigcap Ij = 0$

Y sea D una distribución discreta de capitales financieros

$D \equiv$ { $(c1, t1)$, ...,(Cn,tn)}

Se denomina renta financiera a una aplicación biyectiva univoca entre P y D, es decir, entre capitales financieros y elemento de la partición del intervalo de tiempo

Cuando o bien el subintervalo de tiempo Is o el capital Cs , o ambos son aleatorios, se trata de una **renta financiera aleatoria** y trabajaremos con los equivalentes ciertos o deterministas, definimos según la esperanza matemática de sus funciones de distribución.

Definido de otro modo; dado un conjunto de capitales y un intervalo de tiempo dividido en tantos intervalos como capitales tiene el conjunto, la renta en sentido financieros es el ente formado por ambos conjuntos asociados biyectivamente.

Los capitales financieros (ci,ti) que componen la renta se denominan **términos de la renta.**

Los subintervalos Is ≡ (ti-1,ti) se denominan **periodos de maduración**.

El intervalo (t0,tn) se denomina **duración**.

Sean:

$(C1; \tau 1)$ ⇔ [t0,t1]

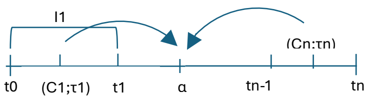
$(Cn; \tau n) \Leftrightarrow$ [tn-1,tn]

Así, una distribución de capitales puede ser:

- Finito (caso de la renta representada en la figura anterior)
- Infinito numerable, como la figura anterior pero tn $\Longrightarrow \infty$ (renta perpetua).
- Infinito no numerable. rentas continuas donde C(x) es la función de densidad dela cuantía y es un flujo continuo de capitales de cuantía y periodo infinitesimales.

4.3. Valor capital de una renta

Dada una renta financiera y una ley financiera F(t;p) como su criterio de valoración, denominamos valor capital o valor financiero de una renta en un momento α al capital cuya cuantía es la suma financiera de los términos de la proyectados al vencimiento α.



El valor capital de una renta en α es

$V\alpha = \sum_{s=1}^{n} Cs * f(\tau s; \alpha)$

Siendo f(τs;α) el factor financiero que traslada el termino de la renta que vence en

τs hasta α

SI $\alpha = t0$ se denomina valor actual,

SI $\alpha = tn$ se denomina valor final.

4.4. Clases de rentas

Las podemos clasificar atendiendo a :

- Aleatoriedad:
  - Ciertas o deterministas
  - Aleatorias o probabilísticas

- Amplitud de los periodos de maduración:

- Discretas (periódicas en las que todos los subintervalos son iguales y no periódicas)
- Continuas (Aquellas con periodos de maduración infinitesimales y un flujo continuo de capitales).

- Cuantías de capitales:

  - Constantes. Todas las cuantías de todos los términos dela renta son iguales.
  - Variables. Pueden tener o no leyes de formación:
    - Aritméticas
    - Geométricas
    - Polinómicas...

- Duración:

  - Temporales, en las que el periodo es (t0,tn)
  - Perpetuas, el periodo es (t0, ∞)

- Momento de vencimiento de los términos dentro del periodo de maduración:

  - Prepagables. $\tau n = tn - 1$
  - Pospagables $\tau n = tn$

- Momento en que se valoran:

  - Inmediatas. $\alpha \in I$
  - Diferidas. $\alpha < t0$
  - Anticipadas. $\alpha > tn.$

4.5. Propiedades de las rentas

4.5.1Proporcionalidad del valor financiero respecto a la cuantía.

Dadas 3 rentas R1,R2 y R3 con idénticos periodos de maduración y ley financiera, si se verifica que Cs(R1)=Cs(R2)+Cs(R3) , entonces se verifica que

$$V\alpha(R1) = V\alpha(R2) + V\alpha(R3)$$

Es una propiedad que puede ser útil al estudiar las rentas variables en progresión aritmética como suma de rentas constantes.

Si se cumple que Cs(R1)=k*Cs(R2)
Entonces $V\alpha(R1) = K * V\alpha(R2)$

Útil para valorar en rentas de cuantía unitaria y después multiplicar por la cuantía de cada termino.

4.5.2 Aditiva respecto al tiempo.

Vα puede valorarse como la suma del valor financiero en α de cada uno de los subintervalos en los que dividamos el intervalo de duración total.

Puede ser útil para valorar rentas que tienen términos que varían su formación según el subintervalo en el que se encuentren contenidos.

4.5.3 Condensación de una renta en otra equivalente de menor número de términos.

Siempre que la suma financiera de los términos contenidos en los periodos que se integran en el nuevo periodo de maduración mayor sea financieramente equivalente al nuevo término de la renta correspondiente a ese periodo nuevo de maduración.
Es útil para sustituir, por ejemplo, una renta con un vencimiento de periodicidad mensual en otra que tenga periodicidad anual.

4.5.4 Significado de la valoración de una renta perpetua.

$$V\alpha = \sum_{s=1}^{\infty} Cs * f(\tau s; \alpha)$$

Solo tiene significado financiero si la serie es convergente, es decir cuando

$$\lim_{s \to \infty} Cs * f(\tau s; \alpha) = 0$$

EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 5. Rentas financieras constantes en capitalización compuesta. Rentas pospagables y prepagables. Rentas temporales y vitalicias. Rentas diferidas y anticipadas

Edición Enero 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

4.1. Rentas financieras constantes en capitalización compuesta

En las rentas financieras que vamos a estudiar y valorar en este tema se utilizará la ley financiera de capitalización compuesta.

Serán rentas de periodos de maduración constantes y unitarios y de carácter periódico.

La ley financiera utilizada es estacionaria de modo que se elegirá el origen del tiempo donde sea más conveniente, la mayor parte de las veces coincidiendo con el origen de la renta.

Es una ley financiera multiplicativa y por tanto la equivalencia financiera no depende de p, solo del intervalo de tiempo considerado.

Estudiaremos los valores iniciales y finales de cada renta. El lector puede valorar la renta en cualquier otro momento utilizando el correspondiente valor financiero.

4.2 Tipos de rentas inmediatas constantes y unitarias en capitalización compuesta

Las rentas las vamos a estudiar con cuantías de los términos financieros constantes y unitarias

Al ser inmediata, el inicio de la renta es el momento actual.

4.2.1. Pospagable

Se trata de pagar una unidad de cuantía al final de cada periodo de maduración.

Distinguimos entre temporales y perpetuas.

4.2.1.1 Pospagable inmediata temporal.

EL intervalo de tiempo que dura la renta es de n periodos de maduración.

La representamos del siguiente modo:

Obtenemos el valor inicial trasladando todos los términos de la renta al momento actual

$$a_{\overline{n}|i} = valor\ actual\ de\ la\ renta = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s}$$

SI desarrollamos la ecuación como una serie de términos de progresión geométrica de razón $(1+i)^{-1} < 1$, podemos demostrar que

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = \frac{1-v^n}{i}$$

Siendo v = factor de descuento compuesto= $(1+i)^{-n}$

El valor final se obtiene trasladando todos los términos de la renta al momento final, n .

$$s_{\overline{n}|i} = valor\ final\ de\ la\ renta = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{n-s} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Los capitales financieros valor actual y final de la renta deben ser equivalentes, son e3l valor de la renta en momentos diferentes del tiempo.

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n * a_{\overline{n}|i}$$

Es importante destacar que las rentas unitarias se suelen calcular con un mínimo de 6 decimales, porque las cuantías en la práctica por las que multiplicamos las rentas unitarias suelen ser mínimo de unidades de millar.

4.2.1.2 Pospagable inmediata perpetua.

Podemos representar este tio de rentas unitarias de este modo:

Tiene sentido hablar solamente de valor inicial , $a_{\overline{\infty}|i}$

Obtenemos el valor de la serie en progresión geométrica decreciente

$$a_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} \ldots\ldots = \frac{1}{i}$$

Este $\frac{1}{i}$ es el capital que debe colocarse al tanto i para pagar una unidad de cuantía a perpetuidad.

Cuando la cuantía a pagar a perpetuidad es C , entonces el capital que hay que colocar a tanto i es:

$$V_0 = \frac{C}{i}$$

4.2.2. Prepagable

Se trata de pagar una unidad de cuantía al principio de cada periodo de maduración.

Distinguimos entre temporales y perpetuas.

4.2.1.1 Prepagable inmediata temporal.

EL intervalo de tiempo que dura la renta es de n periodos de maduración.

Al ser inmediata, el inicio de la renta es el momento actual.

La representamos del siguiente modo:

Obtenemos el valor actual trasladando todos los términos de la renta al momento 0

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = valor\ actual\ de\ la\ renta = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{-s} = (1+i) * \frac{1-v^n}{i} = (1+i) * a_{\overline{n}|i}$$

El valor final puede obtenerse en función de la renta pospagable:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) * s_{\overline{n}|i}$$

Y en relación al valor inicial , usando el correspondiente factor.

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^n * \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

4.2.1.2 Prepagable inmediata perpetua.

La representamos del siguiente modo:

Obtenemos el valor inicial de la serie en progresión geométrica decreciente $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} \ldots\ldots = \frac{1+i}{i} = 1 + \frac{1}{i} = 1 + a_{\overline{\infty}|i}$

Cuando la cuantía es constante, el valor actual es:

$$\ddot{V}_0 = C * (1 + \frac{1}{i})$$

4.2 Tipos de rentas diferidas constantes y unitarias en capitalización compuesta

Una renta se dice diferida cuando el momento de valoración inicial de la renta es anterior al inicio de la misma.

De este modo, el mismo esquema y razonamientos que se han aplicado a las rentas inmediatas pueden ser aplicados a las rentas diferidas.

El único valor que se verá afectado por esta característica de la renta es el valor inicial puesto que el valor final permanece igual que en las inmediatas.

El factor que convierte una renta inmediata en una diferida es $(1+i)^{-d}$.

Siendo d el intervalo de tiempo que transcurre desde el momento de valoración hasta el momento 0 en el que empieza la renta.

Los valores de las rentas diferidas se anotan con $\mathrm{d}/a_{n\,i}$, tomando el valor inicial de las rentas diferidas temporales como ejemplo.

También pueden ser obtenidos como la diferencia entre :

$\mathrm{d}/a_{\overline{n|}i} = a_{d+\overline{n|}\,i} - a_{\overline{d|}i}$

Siendo igual en el caso de las prepagables.

4.2 Tipos de rentas anticipadas constantes y unitarias en capitalización compuesta

Una renta se dice diferida cuando el momento de valoración final de la renta es posterior al final de la duración de la misma.

De este modo, el mismo esquema y razonamientos que se han aplicado a las rentas inmediatas pueden ser aplicados a las rentas diferidas.

No cabe considerar aquí las rentas perpetuas.

El único valor que se verá afectado por esta característica de la renta es el valor final puesto que el valor inicial permanece igual que en la inmediatas.

El factor que convierte una renta inmediata en una diferida es $(1+i)^k$.

Siendo k el intervalo de tiempo que transcurre desde el momento final de la renta hasta el momento de valoración.

Los valores finales de las rentas diferidas se anotan con $\mathrm{k}/s_{\overline{n|}i}$, tomando el valor inicial de las rentas anticipadas temporales como ejemplo.

También pueden ser obtenidos como la diferencia entre :

$\mathrm{k}/s_{\overline{n|}i} = s_{k+\overline{n|}\,i} - s_{\overline{k|}i}$

Siendo igual en el caso de las prepagables.

EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 6. Operaciones financieras. Planteamiento general. Concepto y elementos. Equivalencia financiera. Clasificación. Saldo financiero o reserva matemática en una operación financiera cierta. Métodos de cálculo. Características comerciales en una operación financiera. Tantos efectivos.

Edición Enero 2025

6.1. Planteamiento general. Concepto y elementos. Clasificación.

Podemos definir las operaciones financieras como un intercambio no simultaneo de capitales financieros, en la que el conjunto de capitales entregados por el acreedor se denomina prestación y el conjunto de capitales devueltos por el deudor se denomina contraprestación.

Las operaciones financieras constan de los siguientes **elementos**:

- Personales o subjetivos
    - Acreedor. Entrega el primer capital , y asume la contraprestación.
    - Deudor. Asume la contraprestación.
    - Monetarios u objetivos. Son los capitales que han de entregar y recibir las partes subjetivas.
    - Principio fundamental. Los compromisos adquiridos han de ser financieramente equivalentes, dada una ley financiera y un interés pactado en un acuerdo previo.

El origen de la operación es aquel en el que se entrega el primer capital y el final coincide con la entrega del último y la duración es el intervalo de tiempo entre ambos.

En este intercambio de capitales la prestación es equivalente financieramente a la contraprestación, según una ley financiera y un interés, *i, previamente pactado.*

En las rentas financieras que vamos a estudiar y valorar en este tema se utilizará la ley financiera de capitalización compuesta.

Clasificación

Según:

- Duración:
    - ✓ Corta: menos de un año, suelen ser leyes financieras simples.
    - ✓ Larga: más de un año, suelen ser leyes financieras compuestas.
- Numero de capitales:
    - ✓ Simples, solo un capital tanto en prestación como en contraprestación.
    - ✓ Compuestas; varios capitales en la prestación y/o la contraprestación.
        - Constitución: varios capitales en la prestación y una en la contraprestación
        - Amortización: un capital en la prestación y varios en la contraprestación
- Sentido crediticio:
    - ✓ Crédito unilateral, no cambia las posiciones de los elementos subjetivos
    - ✓ Crédito reciproco, cambia la posición de los elementos subjetivos.
- Ley financiera utilizada:
    - ✓ Capitalización.
    - ✓ Descuento.
    - ✓ Mixta, cambiando el tipo de ley utilizada según el tramo.
- Partes intervinientes
    - ✓ Bancarias, uno de los elementos es una entidad financiera.
    - ✓ No bancarias.
- Tipo de liquidez

- ✓ Interna
  - Total: se puede cancelar en cualquier momento.
  - Parcial: no permitida la cancelación hasta el vencimiento o permitida con previo acuerdo.
- ✓ Externa: Esta permitida la transferencia de la operación a otros sujetos.

6.2 Equivalencia financiera. Saldo financiero. Métodos de cálculo.

Como ya hemos visto, las operaciones financieras quedan definidas por la prestación y la contraprestación.

Estas se describen a través de un conjunto de capitales que se valoran como rentas financieras.

El conjunto de capitales puede ser discreto, continuo o una combinación de los dos.

Así, el conjunto de capitales financieros que definen una operación, y la ley financiera acordada, **la equivalencia financiera** es el principio fundamental que establece que el sumatorio de los valores financieros de la prestación han de coincidir con el sumatorio de los valores financieros de la contraprestación en cualquier momento α del tiempo.

Dados (Cs;ts)=capitales que componen la prestación y (C´s;t´s)=capitales que componen la contraprestación,

$\sum_{s=0}^{n} Cs * f(t;p) = \sum_{s=0}^{m} C´s * f(t´;p)\ \forall\ \alpha$

f(t;p)= factor financiero de la correspondiente ley financiera previamente pactada que permite obtener la cuantía equivalente de Cs en α

Normalmente esta equivalencia nos perite despejar la incógnita de la operación financiera.

Por ejemplo, conociendo el resto de elementos de un préstamo, conocer su término amortizativo.

Desde un ***punto de vista dinámico*** *también se puede estudiar la operación financiera y conocer su evolución.*

Así, la reserva matemática o ***saldo financiero*** *, valorada en un momento t de la operación , es la diferencia financiera de los compromisos pasados y los compromisos futuros valorados en el momento t.*

Teniendo en cuenta que :

S1= cuantía de la suma financiera de los capitales de la prestación anteriores a t.

S2= cuantía de la suma financiera de los capitales de la prestación posteriores a t.

S1´= cuantía de la suma financiera de los capitales de la contraprestación anteriores a t.

S2´ = cuantía de la suma financiera de los capitales de la contraprestación posteriores a t.

Se ha de verificar que:

S1 + S2 = S1´ + S2´

Y transponiendo:

S1 - S1´ = S2´ - S2 = Rt = saldo financiero en t

S1 - S1´ = ***método retrospectivo***

*S2´ - S2 =****método prospectivo***

Si Rt>0, el saldo financiero es a favor de la prestación (falta contraprestación por entregar para alcanzar el equilibrio) y viceversa.

Si ya se ha hallado el saldo en t y ase quiere hallar en t´ :

S3 = suma financiera de los capitales de la prestación situados entre t y t´

S3´ = suma financiera de los capitales de la contraprestación situados entre t y t´

Rt´ =S3-S3´ = método recurrente

Cuando algún capital tiene el vencimiento coincidente con algún momento de valoración del saldo:

Denominamos R+t , ***saldo por la derecha*** *, cuando se considera que el capital ha vencido un instante antes del momento de valoración del saldo. Este capital se tendrá en cuenta en el método retrospectivo de cálculo del saldo financiero en t.*

En R-t , ***saldo por la izquierda*** *ocurre lo contrario.*

6.3 Características comerciales en una operación financiera. Tantos efectivos

Al realizar una operación financiera, además de los capitales correspondientes a la prestación y los capitales correspondientes a la contraprestación, pueden existir desembolsos adicionales por cualquiera de las dos partes.

Cuando en la operación solo existe la prestación y la contraprestación , se dice que es pura.

Cuando existen estos desembolsos adicionales se dice que es una operación con características comerciales.

En una operación pura , es el tanto medio el que establece el equilibrio financiero en la operación y también se puede decir que es el tanto efectivo de las dos partes.

Cuando existen características comerciales, el tanto efectivo es aquel que satisface el equilibrio financiero entre lo verdaderamente desembolsado por cada parte .

El tanto efectivo de una operación con características comerciales puede ser distinto para cada parte, prestación y contraprestación.

Esto ocurre cuando existen características comerciales unilaterales

Las características comerciales, pueden ser:

- *Unilaterales:*

  La entrega una de las partes a un tercero.

  Ejemplos: impuestos al Estado que gravan la operación, comisiones de agencia de valores, gastos de notario, gastos de publicidad de un empréstito….

- *Bilaterales:*

  La entrega una parte a la otra parte:

  Ejemplos: comisiones bancarias, primas de emisión, de amortización,…

Así, los tantos de cada parte, se calculan por separado con los capitales que realmente ha desembolsado, o va a desembolsar, cada parte.

EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 7. Operaciones financieras simples. Análisis estático y dinámico. Operaciones a corto y a largo plazo. Valor financiero de la operación

Edición Enero 2025

7.1. Operaciones financieras simples

Son aquellas que están formadas por un único capital financiero en la prestación y un único capital financiero en la contraprestación

EL acreedor entrega la prestación como un capital (C_0,t_0) y el deudor entrega la contraprestación como un Capital (C_n,t_n).

7.2.1 Análisis estático

Dada una ley financiera previamente pactada, F(t;p) , la ecuación de equivalencia financiera satisface:

$$C_0 * F(t_0;p) = C_0 * F(t_0;p) \Leftrightarrow C_n = C_0 * f(t_0;t_n)$$

Entendiendo C_0 como la cuantía de la prestación entregada en el origen de la operación y C_n como la cuantía de la contraprestación entregada en el final de la operación.

$$f(t_0;t_n) = factor\ finaciero\ asociado\ al\ intervalo[t_0;t_n], dada\ F(t;p)$$

7.2.2 Análisis dinámico

Se realiza, como ya se comento anteriormente, valorando el saldo financiero, o reserva matemática, de la operación en un punto τ *perteneciente al intervalo* $[t_0;t_n]$, *entendido como la cuantía que entregada en un punto intermedio del intervalo de duración de la operación restablece la equivalencia financiera y cancela la operación.*

$$C_\tau \begin{cases} C_0 * f(t_0;\tau) \rightarrow método\ retrospectivo \\ C_0 * f'(t_n;\tau) \rightarrow método\ prospectivo \end{cases}$$

O bien el método recurrente para calcular en otro momento $\tau' > \tau$

$$C_{\tau'} = C_\tau * f(\tau;\tau')$$

7.3. Operaciones financieras simples a corto y largo plazo.

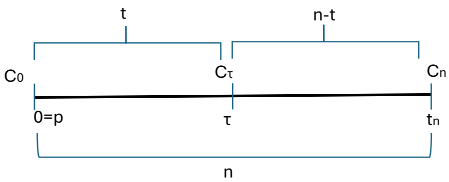
7.3.1 Largo plazo

Son operaciones con una duración superior al año.

De forma habitual se utiliza la ley financiera de capitalización compuesta o de descuento compuesto.

Estas son leyes estacionarias que permiten situar el origen de tiempos donde nos convenga, normalmente en el origen de la operación y que además al ser multiplicativas no dependen del momento de valoración p y no hace falta fijarlo.

Gráficamente:



Aplicando lo estudiado anteriormente sobre estas leyes financieras podemos escribir su equilibrio estático y dinámico:

$$L(t;p) = (1+i)^{p-t} = e^{\rho(p-t)}$$

$$A(t;p) = (1-d)^{t-p} = (1+i)^{-(t-p)}$$

Equilibrio estático:

$$C_n = C_0 * (1+i)^n$$

$$C_o = C_n * (1+i)^{-n} = (1-d)^n$$

Equilibrio dinámico:

$$C_\tau = C_0 * (1+i)^t = C_n * (1+i)^{-(n-t)} = C_n * (1-d)^{n-t}$$

Método retrospectivo

Método prospectivo

Método recurrente

$$C_{\tau'} = C_\tau * (1+i)^{(\tau' - \tau)}$$

7.3.2 Corto plazo

Son operaciones con duración inferior a un año.

Las leyes financieras que se utilizan en estas operaciones a corto plazo suelen ser leyes simples:

Capitalización simple y descuento simple, ya sea comercial o racional.

7.3.2.1 Capitalización simple

La ley de capitalización simple L(t;p) = 1+i+(p-t) se suele utilizar cuando la duración es inferior a un año y es conocido el primer capital (C0;to).

Es habitual fijar el punto p= t_n,

estableciéndose de este modo la equivalencia financiera, en el análisis estático:

$$C_n = C_0 * [1 + i * (t_n - t_0)] = C_0 * \left[1 + \frac{i * n}{365}\right]$$

En el análisis dinámico, por el método retrospectivo , una vez alcanzado s días de duración , desarrollando el factor financiero, el saldo financiero se expresa así:

$$C_\tau = C_0 * u\left[0, \frac{s}{365}\right] = C_0 * \left[\frac{365 + i * n}{365 + i * (n - s)}\right]$$

Por el método prospectivo:

$$C_\tau = C_0 * u\left[\frac{s}{365}, \frac{n}{365}\right] = C_n * \left[\frac{365}{365 + i * (n - s)}\right]$$

7.3.2.2 Descuento comercial y descuento racional

Se usan en la práctica cuando se conoce (Cn;tn).

Se sitúa p en t_0.

El tiempo igualmente, suele medirse en días.

- Al aplicar el **descuento comercial**:

Con duración n días y ley A(t;p)=1-d * (t-p), la equivalencia financiera es:

$$C_0 = C_n * [1 - d * (t_n - t_0)] = C_0 * \left[1 - \frac{d * n}{365}\right]$$

Y el saldo transcurridos s días por el método prospectivo es :

$$C_\tau = C_n * v\left[\frac{s}{365}, \frac{n}{365}\right] = C_n * \left[\frac{365 - d * n}{365 - d * s}\right]$$

- Al aplicar el **descuento racional**:

Con duración n días y ley $A(t;p) = \frac{1}{1+i*(t-p)}$, la equivalencia financiera es:

$$C_0 = C_n * \left[\frac{365}{365 + i * n}\right]$$

Y el saldo transcurridos s días por el método prospectivo es :

$$C_\tau = C_n * \left[\frac{365 + i * s}{365 + i * s}\right]$$

7.4 Valor financiero de una operación

Dada una operación financiera, si las condiciones del mercado permiten obtener condiciones más ventajosas para alguna de las partes, puede establecerse previamente un acuerdo por el que se puede saldar la operación.

De este modo, definimos :

$$V_h(C_{n,}t_n) = C_n * u´_h(h, t_n, p)$$

Siendo $u´_h(h, t_n, p)$ acorde a la nueva ley de valoración y

$$C_h(C_{n,}t_n) = C_n * u´(h, t_n, p)$$

Comparando $V_h\ \ y\ C_h$:

$$V_h > \ C_h \Rightarrow interesa\ cancelaqr\ al\ deudor \Rightarrow V_h - C_h = beneficio\ del\ deudor$$

$$V_h < \ C_h \Rightarrow interesa\ cancelar\ al\ acreedor \Rightarrow C_h - V_h = beneficio\ del\ acreedor$$

De este modo, para poder satisfacer los intereses de las dos partes, se deben encontrar nuevas leyes beneficiosas para ambos y así poder negociar una cancelación anticipada.

EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 8. Operaciones financieras compuestas. Operación de amortización. Casos particulares notables: Amortización americana, método progresivo francés y método de cuota de amortización constante.

Edición Enero 2025

8.1. Operaciones financieras compuestas

Son aquellas que están formadas por más de un capital financiero, bien en la prestación, bien en la contraprestación, o en ambas.

Dado que suelen ser operaciones a largo plazo, las vamos a estudiar según la ley financiera de capitalización compuesta.

8.1.1 Operación de amortización

En este tema, el tipo de operaciones compuestas que se estudiarán serán las de amortización.

Son operaciones de saldo financiero siempre positivo hasta el final de la renta

Estas son las que se componen de una única prestación, entregada al principio de la operación y una contraprestación múltiple.

Los capitales que componen la contraprestación contienen los capitales que satisfacen el capital entregado como prestación más los intereses que va generando la operación.

Estos capitales se denominan términos amortizativos, (a_i, t_i), y conforman la renta financiera que es equivalente a la prestación, valoradas en el origen de la operación.

La equivalencia financiera la planteamos de un modo general que se trata de amortizar el capital (C_0, t_0) con términos amortizativos variables (a_i, t_i),, valorando la operación con réditos de cada periodo variables i_n:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$$

El saldo financiero de la operación en las operaciones de amortización se denomina saldo vivo o capital pendiente de amortizar.

Hallaremos los saldos por la derecha, es decir, un instante después del vencimiento de cada termino amortizativo.

EL capital vivo en t_s lo escribimos como C_S y aplicando el método prospectivo:

$$C_S = \sum_{r=s+1}^{n} a_s * \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

Al aplicar el método recurrente, suponiendo que ya se obtuvo C_{S-1}:

$$C_S = C_{S-1} * (1 + i_s) - a_s$$

Despejando :

$$a_s = C_{S-1} * i_s + (C_{S-1} - C_S) = I_s + A_s$$

Así, cada termino amortizativo es dedicado a pagar:

$$interes\ del\ capital\ vivo\ al\ principio\ del\ periodo$$

$$I_s = C_{S-1} * i_s = cuota\ de\ interes\ del\ periodo\ s$$

$$disminuir\ la\ deuda\ pendiente$$

$$A_s = (C_{S-1} - C_S) = cuota\ de\ amortizacion\ del\ periodo\ s$$

El capital amortizado en los s primeros periodos se escribe M_s y es la diferencia entre el capital prestado C_0 y el capital vivo C_s

$$M_s = C_0 - C_s$$

De este modo y bajo las premisas anteriores, teniendo en cuenta que $C_n = 0$ en t_n, se obtiene que el capital prestado es la suma aritmética de las cuotas de amortización:

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Y que el capital amortizado en los s primeros periodos es la suma de las s primeras cuotas de amortización :

$$M_s = \sum_{k=1}^{s} A_k$$

El capital vivo, después de transcurridos s periodos, es igual a la suma de las n-s ultimas cuotas de amortización:

$$C_s = \sum_{k=s+1}^{n} A_k$$

Podemos decir que el capital prestado C_0 es la suma financiera de los términos amortizativos a_s y la suma aritmética de las cuotas de amortización A_s.

Normalmente $C_s \geq C_1 \geq \cdots \geq C_n \implies A_s \geq 0\ \forall s$ y se dice que existe Regularidad en la amortización.

8.1.1.1 Cuadro de amortización

Refleja ordenadamente la evolución de la operación y es un buen resumen que permite conocer la situación de la operación en cada momento.

Periodo	Términos amortizativos	Cuota de intereses	Cuota de amortización	Capital amortizado	Capital vivo
0					C_0
1	a_1	I_1	A_1	M_1	C_1
…	…	…	…	…	…
s	a_s	I_s	A_s	M_s	C_s
…	…	…	…	…	…
n	a_n	I_n	A_n	$M_n = 0$	$C_n = 0$

8.2 Casos particulares notables: Amortización americana, método progresivo francés y método de cuota de amortización constante.

8.2.1 Amortización americana

Es un caso de amortización particular en el que en los n-1 primeros periodos no se amortiza nada , pagando solamente los intereses de cada periodo y en el último periodo se amortiza todo el capital y se pagan los intereses del último periodo.

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = 0$$

$$A_n = C_0$$

El interés es constante e igual a i:

$$I_1 = \cdots = I_n = C_0 * i$$

Los términos amortizativos son todos iguales a $C_0 * i$ excepto:

$$a_n = C_0 * i + C_0 = C_0 * (1 + i)$$

8.2.2 Método progresivo francés

Los términos amortizativos y el tanto de valoración, o tipo de interés, son constantes.

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

La contraprestación es una renta temporal de cuantía constante y pospagable

Equivalencia en el origen: $C_0 = a * a_{\overline{n|}i}$

Equivalencia en el final: $C_0 * (1+i)^n = a * S_{\overline{n|}i}$

En este tipo de operaciones es normal conocer la cuantía del préstamo, la duración y el tipo de interés y lo que necesitaremos calcular será el término amortizativo a.

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n|}i}} = \frac{C_0 * (1+i)^n}{S_{\overline{n|}i}}$$

$$\text{El capital vivo } C_s = \begin{cases} a * a_{\overline{n-s|}i} \Longrightarrow \textit{método prospectivo} \\ C_0 * (1+i)^s - a * S_{\overline{s|}i} \Longrightarrow \textit{método retrospectivo} \\ C_{s-1} * (1+i) - a \Longrightarrow \textit{método recurrente} \end{cases}$$

Del método recurrente se obtiene :

$$a = C_{s-1} * i + (C_{s-1} - C_s) = I_s + A_s$$

Despejando A_s , vemos que crecen en progresión geométrica.

$$A_{s+1} = A_s * (1+i) = A_1 * (1+i)^s$$

De este modo, lo interesante es conocer la primera cuota de amortización, que deducimos de las expresiones anteriores:

Cuando conocemos el termino amortizativo.

$$A_1 = a - C_0 * i$$

Cuando no conocemos el termino amortizativo.

$$A_1 = \frac{C_0}{S_{\overline{n|}i}}$$

EL capital amortizado:

$$M_s = A_1 * S_{\overline{s|}i} = C_0 \frac{S_{\overline{s|}i}}{S_{\overline{n|}i}}$$

8.2.3 Método de cuota de amortización constante

Las cuotas de amortización y el tanto de valoración son constantes.

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$$

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

Cuota de amortización:

$$C_0 = A * n$$

$$A = \frac{C_0}{n}$$

Capital amortizado:

$$M_s = s * A$$

Capital vivo:

$$C_s = (n - s) * A$$

Cuota de interés:

$$I_{s+1} = C_s * i$$

Términos amortizativo:

$$a_s = C_{s-1} * i + A$$

Los términos amortizativos son decrecientes porque la cuota de interés decrece.

Desarrollando la expresión podemos obtener:

$$a_n = \frac{C_0}{n} * (1 + i)$$

Si realizamos una relación de recurrencia para s y s+1 obtenemos:

$$a_s = C_{s-1} * i + A$$

$$a_{s+1} = C_s * i + A$$

$$a_s - a_{s+1} = (C_{s-1} - C_s) * i = A * i$$

$$a_{s+1} = a_s - A * i = a_1 - s * A * i$$

De esta última expresión se deduce que los términos amortizativos decrecen en progresión aritmética de razón A*i

Obteniendo el primer término de este modo:

$$a_1 = C_0 * i + A = A * (1 + n * i)$$

EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 9. Empréstitos. Necesidad de los empréstitos. Clases de empréstitos normales con abono periódico de intereses pospagables. Cuadro de amortización. Empréstitos normales con abono de intereses acumulados en el momento de la amortización. Cuadro de amortización.

Edición Enero 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

9.1. Empréstitos. Necesidad de los empréstitos.

Los empréstitos son operaciones de amortización, en las que la figura del prestamista es asumida por múltiples sujetos, dividiendo el importe total del préstamo en un elevado numero de partes, todas de la misma cuantía.

Su aparición y desarrollo se efectúa durante el siglo XIX, época en la que surgen algunas necesidades de financiación , como las compañías de ferrocarriles o siderúrgicas entre otras.

Estas grandes cuantías presentan el problema de encontrar algún prestamista cin la solvencia suficiente.

Además, resulta útil repartir el riesgo y no depender de un unico sujeto.

Canalizaba también el deseo de muchos ahorradores y pequeños prestamistas que desean participar en una operación de este tipo.

Cada una del as partes en las que se divide la cuantía del préstamo toma la forma jurídica de título-valor.

Estos títulos toman el nombre de obligación y representa una parte alícuota de un préstamo contra la sociedad emisora de los títulos.

El emisor de los títulos es el prestatario y los suscriptores, obligacionistas, son los prestamistas.

El emisor actúa frente al conjunto de las obligaciones como si fuera un único prestamista;

EL estudio de la operación se hace globalmente y en cada periodo se atiende a los intereses y la amortización de los títulos que correspondan en cada periodo.

EL método clásico de elección de los títulos que se amortizan en cada periodo es el sorteo.

En la amortización por sorteo , es conocido en el plan de amortización , el número de títulos que se amortizan en cada periodo.

Todos tienen, a priori, la misma esperanza de duración.

Para describir el plan de amortización utilizamos:

C= valor nominal

$$M_s = numero\ de\ obligaciones\ que\ se\ amortizan\ en\ el\ periodo\ s$$

$$N_s = numero\ de\ obligaciones\ en\ circulacion\ despues\ de\ s\ periodos$$

$$N_0 = N = número\ de\ titulos\ emitidos.$$

$$M_s = numero\ de\ obligaciones\ que\ se\ amortizan\ en\ el\ periodo\ s$$

$$M_s = N_{s-1} - N_s$$

$$N = \sum_{s=1}^{n} M_s$$

El número total de obligaciones amortizadas en los s primeros periodos es:

$$\mathfrak{M}_s = \sum_{k=1}^{s} M_k = N - N_s$$

9.2 Clasificación

Los clasificamos según:

- Emisor:
  - ♣ Deuda pública. EL estado acude al mercado para financiar parte de sus presupuestos.
  - ♣ Empresas privadas.

- Forma de pago de intereses(cupones):
  - ♣ Pago periódico.
    - ▪ Cupón vencido. Se abonan con carácter pospagable. Es el más frecuente.
    - ▪ Cupón anticipado. Se abonan con carácter prepagable.
  - ♣ Cupón cero. Se abonan todos los intereses en el momento de amortizar el título.

- Modalidad de amortización:
  - ♣ Única. Se amortiza todo el empréstito en una fecha.
  - ♣ Varias fechas:
    - ▪ Por sorteo. Entre los títulos que quedan por amortizar.
    - ▪ Sucesiva. Se amortiza cada título por reducción del nominal en cada periodo.
  - ♣ Por compra en bolsa.
  - ♣ Sin compromiso de amortización . Solo de pagar los intereses. Se amortiza según conveniencia del emisor.

- Características comerciales :
  - ♣ Normales o puros. Sin características comerciales.

- Con características comerciales. Cabe distinguir entre los empréstitos normalizables y los que no son normanizables.

- Valor de emisión de los títulos(precio que hay que pagar por adquirir las obligaciones):

  - Emisión a la par. Coinciden valor de misión y valor nominal.
  - Emisión bajo la par. Se ofrecen con prima de emisión = valor nominal – valor de emisión.
  - Emisión sobre la par. Inverso que el caso anterior. No suele ofrecerse porque no es atractivo.

- Valor de reembolso de los títulos (precio que hay que pagar por adquirir las obligaciones):

  - Reembolso Nominal o a la par.
  - Emisión con prima de amortización. Se abona al amortizar al título y pueden ser constantes o variables según fecha de amortización.
  - Reembolso con lote. Se abona por sorteo y solamente a un subconjunto de los títulos.

- Valoración financiera:

  - Tipo I. términos amortizativos y réditos de cada periodo constantes.
  - Tipo II. términos amortizativos variables y réditos de cada periodo constantes.
  - Tipo III. términos amortizativos y réditos de cada periodo variables.

9.3 Clases de empréstitos normales con abono periódico de intereses pospagables.

La estructura de los términos amortizativos de un empréstito de este tipo es:

$$a_s = C * i_s * N_{s-1} + C * M_s$$

Cada título es un préstamo americano y el empréstito es la suma de estas operaciones de amortización.

9.3.1 Tipo I

Ya descritos en la clasificación.

El termino amortizativo, o anualidad, del año s :

$$a_s = C * i * N_{s-1} + C * M_s$$

Obtenemos la anualidad según la equivalencia financiera:

$$C * N = a * a_{n\,i} \Longrightarrow a = \frac{C * N}{a_{n\,i}}$$

Al restar la estructura de dos anualidades consecutivas podemos despejar el número de títulos que se amortizan en cada periodo:

$$M_{s+1} = M_s * (1 + i) = M_1 * (1 + i)^s$$

Despejamos M_1de la anualidad del primer año o bien de la definición de N:

$$M_1 = \frac{a - C * i * N}{C} = \frac{N}{S_{\overline{n}|i}}$$

Títulos vivos después de cada sorteo se puede obtener fácilmente por el método recurrente:

$$N_s = N_{s-1} * (1 + i) - \frac{a}{C}$$

Para obtener el número total de títulos amortizados en los s primeros periodos:

$$\mathfrak{M}_s = M_1 * S_{\overline{n}|i}$$

Esta modalidad de empréstito es análoga a los prestamos amortizados por el método francés.

9.3.2 Tipo II

Ya descritos en la clasificación.

El termino amortizativo, o anualidad, del año s :

$$a_s = C * i * N_{s-1} + C * M_s$$

La equivalencia financiera:

$$C * N = \sum_{s=1}^{n} a_s * (1 + i)^{-s}$$

Al restar la estructura de dos anualidades consecutivas podemos despejar el número de títulos que se amortizan en cada periodo:

$$M_{s+1} = M_s * (1 + i) + \frac{a_{s+1} - a_s}{C}$$

El número de títulos que se amortizan en un periodo dependen del os que se amortizaron en el periodo anterior y de la diferencia de las anualidades correspondientes.

Para conocer los titulos vivos podemos usar el metodo recurrente:

$$N_s = N_{s-1} * (1 + i) - \frac{a_s}{C}$$

Un caso particular que está muy extendido en la práctica es el que amortiza el mismo número de títulos en cada periodo

$$M = \frac{N}{n}$$

$$N_s = (n - s) * M$$

$$\mathfrak{M}_s = s * M$$

$$a_{s+1} = a_s - C * I * M$$

$$a_1 = C * I * M + C * M$$

Este caso particular es análogo al caso de amortización con cuotas de amortización constantes.

9.3.3 Tipo III

Esta modalidad no se da en la práctica por su complejidad, quizá pueda usarse en determinados tramos de la duración del empréstito.

Su equivalencia financiera viene dada por :

$$C * N = \sum_{s=1}^{n} a_s * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$$

Y podemos establecer el plan según :

$$C * N_s = C * N_{s-1} * (1 + i_s) - a_s$$

9.4 Empréstitos normales con abono de intereses acumulados en el momento de la amortización.

También son conocidos como de cupón cero.

Los títulos no perciben ninguna cuantía hasta que se amortizan y entonces reciben el valor nominal y los intereses hasta la fecha.

9.4.1 Tipo I

El termino amortizativo, o anualidad, del año s :

$$a = C * M_s * (1 + i)^s$$

La equivalencia financiera:

$$C * N = a * a_{\overline{n}|i} \Longrightarrow a = \frac{C * N}{a_{\overline{n}|i}}$$

Idéntica al de cupones pospagables, ya que al emisor no le influye en que se invierta el pago de los intereses, si ha pagar cupones o a pagar el interés de todo el periodo a los que se amortizan.

Al restar la estructura de dos anualidades consecutivas podemos despejar el número de títulos que se amortizan en cada periodo:

$$M_{s+1} = M_s * (1 + i)^{-1} = M_1 * (1 + i)^{-s}$$

La cantidad de cupones que se amortizan en cada sorteo es decreciente en progresión geométrica a razón $(1 + i)^{-1}$

$$M_1 = \frac{N}{C * (1 + i)}$$

Despejamos M_1de la anualidad del primer año :

$$M_1 = \frac{N}{C * (1 + i)}$$

Títulos vivos después de cada sorteo se puede obtener por el método recurrente:

$$N_s = N_{s-1} - \frac{a}{C * (1 + i)^s}$$

Y se puede obtener el número total de títulos amortizados en los s primeros periodos:

$$\mathfrak{M}_s = M_1 * \ddot{a}_{\overline{s}|i}$$

9.4.2 Tipo II

Ya descritos en la clasificación.

El termino amortizativo, o anualidad, del año s :

$$a_s = C * M_s * (1 + i)^s$$

La equivalencia financiera:

$$C * N = \sum_{s=1}^{n} a_s * (1+i)^{-s}$$

Al restar la estructura de dos anualidades consecutivas podemos despejar el número de títulos que se amortizan en cada periodo:

$$M_{s+1} = M_s * (1+i)^{-1} + \frac{a_{s+1}}{a_s}$$

El número de títulos que se amortizan en un periodo, decrecientes igual que en el tipo I, dependen ahora también de la relación entre las anualidades de ese periodo y el anterior.

$$M_1 = + \frac{a_1}{C * (1+i)}$$

Para conocer los titulos vivos:

$$N_s = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{a_r}{C} * (1+i)^{-r}$$

Análogamente al caso de los cupones pospagables, un caso particular que está muy extendido en la práctica es el que amortiza el mismo número de títulos en cada periodo

$$M = \frac{N}{n}$$

$$N_s = \frac{(n-s)}{n} * N$$

$$\mathfrak{M}_s = \frac{s}{n} * N$$

$$a_{s+1} = a_s * (1+i)$$

Los términos amortizativos crecen en progresión geométrica (1+i)

9.4.3 Tipo III

Su estudio detallado no tiene gran interés por su complejidad y poca aplicación práctica.

Su anualidad se define por:

$$a_s = C * M_{s*} \prod_{h=1}^{s} (1+i_h)$$

9.5 Cuadros de amortización

Son análogos a los de los préstamos, pero con algunas columnas que reflejan el plan de amortización de los títulos.

Dado que no suelen darse números enteros en la cantidad de títulos a amortizar según los cálculos, hay que ajustarlos para que sean enteros.

Los métodos mas adecuados son el de redondeo (se suman partes enteras y la diferencia sin emitir se alcanza redondeando hacia arriba los números empezando por el decimal más alto hasta alcanzar el total de títulos a amortizar) y el de los residuos capitalizado (los decimales son el residuo y se capitalizan al periodo siguiente y se suman a a_{s+1} , así hasta el final del empréstito).

De forma general podemos decir que tienen esta estructura:

Año(periodo)	Amortización de títulos			Amortización del empréstito			
	Parcial	Acumulado	Vivos	Interés	Amortización	Anualidad	Pendiente
0			N				$C * N$
1	M_1	$\mathfrak{M}_1$	N_1	$C * N * i_1$	$C * M_1$	$(I + A)_1$	$C * N_1$
2	M_2	$\mathfrak{M}_2$	N_2	$C * N_1 * i_2$	$C * M_2$	$(I + A)_2$	$C * N_2$
…	…	…	…	…	…	…	…
n	M_n	$\mathfrak{M}_n$	0	$C * N_{n-1} * i_n$	$C * M_n$	$(I + A)_n$	0

EJERCICIO 1
Financiero-Actuarial

TEMA 10: ESTADISTICA ACTUARIAL. FENOMENO ACTUARIAL. VARIABLE BIOMETRICA. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL MODELO BIOMETRICO. LEYES BIOMETRICAS

Edición Enero 2025

Estadística actuarial. Fenómeno actuarial

La estadística actuarial es una rama de la estadística que estudia los fenómenos actuariales.

Mientras que la estadística es la ciencia que estudia y analiza los datos creando modelos, la estadística actuarial utiliza los modelos estadísticos para realizar predicciones sobre eventos futuros optimizando políticas de planes de pensiones, políticas aseguradoras y financieras, etc.

El fenómeno actuarial se define como una categoría específica de fenómenos con naturaleza o consecuencias económicas y que tiene carácter aleatorio. En definitiva, es aquel fenómeno cuya realización concreta no se conoce, pero de la que se saben todas las posibles realizaciones, sujetas a probabilidades de ocurrencia, y el coste asociado a cada una de esas realizaciones.

Las características fundamentales del fenómeno actuarial se encuentran en su aleatoriedad y en que sus sucesos implican unas consecuencias valorables en términos financieros.

El fenómeno por tanto suscita incertidumbre, que objetivamente será conocida como Riesgo. La realización o concreción del fenómeno actuarial se conoce como siniestro, el sujeto pretenderá prevenirse de las consecuencias económicas del acontecimiento del siniestro.

El método con el que el sujeto tratará de cubrirse de esta incertidumbre es la institución del seguro que compensará económicamente al sujeto por el acontecimiento de siniestros.
Esto es:

- Se produce una transferencia del riesgo. Es otro sujeto quien cubrirá las consecuencias económicas de un siniestro.
- Agrupación: Para que lo anterior sea posible es necesario que exista el sujeto que va a cubrir las consecuencias sea una agrupación de sujetos, de modo que se pueda paliar la intensidad del siniestro en cuestión.
- Por otro lado, el sujeto que desea cubrirse deberá aportar un precio a la agrupación por la cobertura de sus riesgos. Este precio es lo que se denomina prima.

Los requisitos por tanto que deben confluir son: Agrupación (de sujetos que sumen el riesgo), Reparto (de las consecuencias económicas que derivan de los siniestros) y transferencia, por tanto, de las consecuencias.
El fenómeno actuarial es en definitiva incierto y por tanto aleatorio en cuanto a su ocurrencia (siniestro/no siniestro) pero a la vez está sujeto a la aleatoriedad sobre el número de siniestros que pueden acaecer en un periodo de tiempo y a la cuantía, intensidad o severidad de cada uno de éstos. La aleatoriedad de los fenómenos se presenta por tanto de manera permanente.

El objetivo principal de la estadística actuarial es el estudio y definición de los modelos de probabilidad correspondientes a los fenómenos actuariales.

Por tanto, dentro de la Estadística Actuarial están comprendidas la biometría humana, especialmente la teoría de la supervivencia y la elaboración de tablas de mortalidad, el estudio de la invalidez, morbilidad y todo el estudio de los llamados riesgos elementales, sobre cosas, accidentes, grupos, etc., en cuanto a la elaboración de los correspondientes modelos de probabilidad.

Siendo un fenómeno aleatorio en cuanto a su acontecimiento, la estadística actuarial estudia:

Desde un punto de vista de Estadística Actuarial No vida:

- La probabilidad de que un evento con consecuencias económicas negativas (siniestro) ocurra o no ocurra.
- El número de siniestros que pueden ocurrir en términos de probabilidad.
- La cuantía probable de cada siniestro una vez ocurre(n)

Desde un punto de vista actuarial Vida.

- Se sabe que el siniestro va a ocurrir (fallecimiento) pero se desconoce cuándo, por tanto, se estudia la duración probable de la vida residual desde una edad x.

Variable biométrica.

La biometría es el conjunto de la Estadística Actuarial que se ocupa del estudio de la supervivencia de los elementos de cualquier población sujeta a un proceso de envejecimiento y de otros conceptos relacionados con ella.

La biometría es la parte de la EA que estudia fundamentalmente la supervivencia humana (aunque se puede extender para la duración en poblaciones de animales o bienes sujetos a procesos de envejecimiento) y de otros campos relacionados con la misma como son la construcción de tablas de mortalidad o de vida.

La modelización de la muerte o supervivencia integra el denominado modelo biométrico, el cual viene marcado por el tiempo biométrico de los individuos o elementos (esto es, por su edad). El modelo biométrico además es un modelo estocástico cuyo diseño se construye en torno a una variable aleatoria X à Edad de fallecimiento, y que representa el tiempo biológico transcurrido desde el instante del nacimiento de un individuo hasta su fallecimiento.

El estudio de esta variable biométrica es más sencillo cuando se supone que ésta tiene un carácter **continuo** (como el tiempo que la sostiene). Sin embargo, los datos históricos con los que contamos suministran la información en edades completas, por lo que generalmente se trabaja bajo el prisma de una descripción **discreta** de esta variable. Las soluciones a las que se llegan bajo una y otra concepción son ligeramente diferentes.

La variable biométrica básica es la que hemos definido como edad de fallecimiento, y se adscribe a un individuo genérico. Es una variable aleatoria definida en el intervalo (0, inf), si bien en las construcciones prácticas se suele utilizar un infinito llamado actuarial, una edad límite que se nota por w, por lo que el campo de variación de X queda (0, w)
Esta variable como se ha indicado se refiere a la edad de fallecimiento de un individuo recién nacido.

Otra variable biométrica básica es la que denominamos Vida residual , esto es, la edad de fallecimiento de un individuo de edad x (ya ha sobrevivido a la edad x y por tanto su distribución es la truncada en x de la anterior).

Edad de muerte

La edad de muerte de un individuo (elemento o grupo) es una variable aleatoria. Se conoce la ocurrencia del suceso fallecimiento, pero se desconoce cuándo va a ocurrir éste. Su estudio se basa por tanto en la estadística y en las probabilidades de fallecimiento a una edad x o en un intervalo de tiempo x+t, o complementariamente, la supervivencia a dicha edad o intervalo.

Así sea ξ la variable aleatoria "Edad de muerte de un individuo (cabeza, elemento)" que toma valores x medidos en años, su dominio será:

- x=0,1,2,... ω-t si se toman edades enteras y por tanto se considera la variable como discreta (siendo ω la edad límite y t el intervalo de tiempo vivido antes de fallecer)
- o bien $x \in (0, \omega)$ si se toma la edad de muerte como una variable continua.

Edad de muerte al nacer

En biometría se estudia el complementario de la función de distribución.

Se define como F(x) la función de distribución de la probabilidad de muerte de un individuo de edad 0 (acaba de nacer), siendo 1-F(x)=S(x) la función de supervivencia que cumple que S(0)=1 y S(ω)=0. Siendo esta función S(x) monótona decreciente y continua por la derecha.

Esta supervivencia generalmente es caracterizada por un conjunto de características agrupadas en las denominadas tablas de mortalidad, la modelización de estas características se dice que representan el modelo biométrico, cuya variable independiente principal es el denominado tiempo biométrico de los individuos, que no es más que la edad de estos. Este modelo biométrico es un modelo estocástico, en el sentido que incluye en su estructura por lo menos a una variable aleatoria, esta es la variable X, que llamaremos edad de fallecimiento, y que representa el tiempo biológico transcurrido desde el instante del nacimiento del individuo hasta su fallecimiento.

Ahora bien, es evidente que el estudio del fenómeno de la supervivencia no se refiere únicamente al tiempo biométrico, se debe considerar el tiempo físico en el cual se realizan las variaciones del tiempo biométrico de los individuos. Así la expresión matemática del fenómeno de la supervivencia es paramétrica o lo que es igual ha de depender de dos parámetros referidos (x,t)=(edad o tiempo biométrico, año o tiempo físico).

Obviamente la edad de fallecimiento "x" intrínsicamente es una variable aleatoria continúa. Sin embargo, la información de la que se dispone referente a la edad de fallecimiento de los individuos a través de registros censales o muestrales de poblaciones concretas, suministran únicamente los años completos que ha vivido el individuo, por lo que en la práctica se debe describir a la variable x como una variable aleatoria discreta.

En función del colectivo al cual pertenezca el individuo, la edad puede ser distinta a la edad biológica del individuo. Si estamos en un colectivo de empresa, la edad de nacimiento del individuo en la empresa será la edad en la cual empezó a trabajar en esa empresa. De igual manera su edad de fallecimiento será la edad a la cual saldrá de la misma, bien por jubilación, despido o cambio laboral. Por tanto, el periodo o rango de permanencia o vida en la empresa, se calcula como la diferencia entre la fecha de salida y la fecha de entrada del trabajador, siendo ésta la edad considerada para valoraciones actuariales o financieras. En un ejemplo sencillo en el campo de la seguridad social, la fecha de inicio es la fecha del hecho causante de alta en afiliación e inicio de cotización y la fecha de salida del colectivo de ocupados es la fecha de hecho causante de invalidez, fallecimiento o jubilación.

Función de distribución de la variable aleatoria edad para un recién nacido

$$F(x) = P[X < x], \text{ para } x \geq 0.$$

Que tiene las mismas propiedades que toda función de distribución:

- $F(0) = 0$
- $F(\infty) = 1$ o $F(w) = 1$
- $F(x)$ es una función no decreciente y continua por la derecha.

A partir de la función de distribución se puede obtener la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

Pudiendo estudiar que un individuo recién nacido fallezca entre la edad x y la edad x+t, es decir, en un intervalo.

$$P(x < X \leq x+t) = P(X \leq x+t) - P(X \leq x) = F(x+t) - F(x)$$

$$P(x < X < x+t) = \int_x^{x+t} f(y)dy = F(x+t) - F(x)$$

<u>Edad de muerte a la edad x</u>

Cuando se estudia la probabilidad de fallecer de un individuo que ya tienen cumplida cierta edad x se está ante una nueva variable que se define como:

$$\eta_x$$

- Si es discreta, se habla de los años que le quedan por vivir a un individuo de edad x (en edades enteras) sus valores serán k=0,1,.. ω-x-1
- Si es continua, se habla de tiempo de vida hasta la muerte o tiempo que le queda por vivir a un individuo de edad x (vida residual). Sus valores son $t\epsilon(0, \omega - x)$

Tanto k como t empiezan en 0 porque son los años o el tiempo que queda por vivir a partir de la edad x.
En este caso la nueva variable η_x está condicionada a la edad x ya alcanzada por el individuo, la función de probabilidad está truncada en dicho punto. Como η_x es una función que depende de t (o de k) generalizando se tiene:

$$G_x(t) = P\left((X \le x+t) \mid (X > x)\right) = \frac{P(x < X \le x+t)}{P(X > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}$$

Para 0<t<∞ o bien 0<k<w.

Su función de densidad es la derivada respecto de t (o de k):

$$g_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} G_x(t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x)}$$

Como se puede observar está truncada por la función de supervivencia 1-F(x)=S(x), por lo que también se puede escribir como:

$$G_x(t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = {}_t q_x$$

Actuarialmente se define como ${}_t q_x$ probabilidad de que un individuo de edad x fallezca antes de cumplir la edad x+t. Complementariamente ${}_t p_x = 1 - {}_t q_x$, se denota como ${}_t p_x$ a la probabilidad de que un individuo de edad x alcance con vida (sobreviva) la edad x+t.

Principios fundamentales del modelo biométrico.

Como se habrá observado, siempre se habla de edad de FALLECIMIENTO. Por tanto, basándonos en la función de fallecimiento, se establecen las siguientes hipótesis básicas del modelo biométrico:

- Homogeneidad. En una determinada población, el comportamiento de la variable aleatoria edad es siempre idéntico. Es decir, si X_1 y X_2 representan la variable aleatoria edad de fallecimiento de los individuos 1 y 2 pertenecientes a la MISMA POBLACION, entonces:

  $$F_{X1}(x) = F_{X2}(x) = F(x) \text{ para todo } x \in [0,w]$$

  Que es lo mismo que decir que los individuos de la misma edad están sometidos a idénticos riesgos de fallecimiento, todos poseen distribuciones de probabilidad similares, luego es suficiente conocer la de uno de ellos para establecer conclusiones sobre la generalidad del colectivo.

- Independencia. La edad de fallecimiento de un individuo no depende de la edad de fallecimiento de otro individuo del colectivo. Esto significa que NO HAY CONTAGIO. Esta hipótesis, simplifica notablemente los cálculos de probabilidades para más de una cabeza.

- Estacionalidad. Las probabilidades biométricas sobre los individuos no dependen de su fecha de nacimiento sino SOLO DE SU EDAD. Es decir, para determinar la probabilidad de fallecimiento o supervivencia no se contempla el momento físico solo se contempla la edad del individuo. Esta hipótesis tiene la ventaja de simplificar cálculos por lo que se utiliza para periodos de tiempo corto. La desventaja es que no se usa en periodos largos. Aplicada a un ejemplo seria que se da la misma probabilidad a una persona de 35 años nacida en 1900, que a otra de

35 años nacida en el año 2000. Como se observa, si el periodo es menor a un lustro la hipótesis se puede admitir, pero si el periodo es mayor los resultados obtenidos no serían los más idóneos para utilizar en cálculos actuariales.

Como consecuencia de las anteriores consideraciones es posible hablar de edad de grupo, así como de probabilidades de supervivencia y desaparición o muerte del grupo respecto de una determinada edad. Esta posibilidad únicamente se da en los grupos homogéneos.

Leyes biométricas

Las leyes biométricas o leyes de mortalidad buscan explicar el comportamiento de las funciones biométricas, es decir, son expresiones analíticas de la función de supervivencia o de mortalidad, que pretenden modelizar el comportamiento de la mortalidad en función de la edad del individuo. La función matemática está en función del tanto instantáneo de mortalidad:

Tanto instantáneo de mortalidad, μ_x.

Se define como $\mu_x = \lim_{n \to 0} \frac{{}_{|n}q_x}{n}$

También se puede obtener como $$\mu_x = \frac{\frac{-dS(x)}{dx}}{S(x)} = \frac{-dLn[S(x)]}{dx} = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

La función μ_x especifica la distribución de la variable X, integrando se obtiene

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_t dt}$$

Las leyes más famosas son:

Ley de De Moivre (1725) $S(x)= 1 - w/x$, $0 \leq x \leq w$.
Ley de Gompertz (1825) $\mu_x = Bc^x$, $B>0$, $c>1$, $x \geq 0$.
Ley (1ª) de Makeham (1859) $\mu_x = A + Bc^x$, $A \geq -B$, $B>0$, $c>1$, $x \geq 0$.
Ley (2ª) de Makeham (1889) $\mu_x = A + Hx + Bc^x$, $A \geq -B-H$, $B>0$, $c>1$, $x \geq 0$.

La más importante es la 1º ley de Makeham, donde A representa la mortalidad por accidente o azar y Bc^x es la mortalidad debida a la edad.

Si A = 0 se obtiene el modelo de Gompertz
Si c=1 se obtiene un tanto de mortalidad constante.

La importancia de estas leyes radica en que dada la función μ_x de una ley de mortalidad, se puede obtener la función de supervivencia S(x). Por ejemplo, para la ley Makeham:

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{-Ax-\frac{B}{Ln(c)}\left(c^x-1\right)} = s^x g^{c^x-1}, \quad s = e^{-A}, g = e^{-\frac{B}{Ln(c)}}$$

EJERCICIO 1
Financiero-Actuarial

TEMA 11: ESTRUCTURAS Y FUNCIONES BIOMETRICAS. TANTOS DE SUPERVIVENCIA Y MORTALIDAD. TIPOS Y ELABORACION: DETERMINACION DE LA PROBABILIDAD DE MUERTE. FUNCION DE SUPERVIVENCIA

Edición Enero 2025

Estructuras y funciones biométricas

Las estructuras biométricas son fundamentales para el análisis actuarial, porque facilitan la modelización y predicción de la mortalidad y otras características del riesgo de seguros y pensiones. Se basan en la recopilación de datos, obtenidos por la gestión administrativa y por encuestas familiares, que posteriormente son analizados y son la base de que los modelos obtenidos sean las herramientas para el cálculo de primas y proyecciones financieras y actuariales de seguros de vida y de pensiones.

Existen diversas estructuras biométricas utilizadas en la ciencia actuarial:

- Tablas de mortalidad. Son conjuntos de datos donde se muestran la probabilidad de muerte a diferentes edades de una población
- Tablas de morbilidad. Son conjuntos de datos donde se muestran la tasa de incidencia de enfermedades o discapacidades en una población
- Tablas de esperanza de vida. Indican el numero promedio de años que una persona puede esperar a vivir, a partir de un determinado grupo de edad.
- Modelos de longevidad. Son modelos matemáticos que ayudan a proyectar la longevidad en el tiempo, tomando en cuenta tendencias demográficas y otras variables socioeconómicas.
- Modelos de riesgo de eventos múltiples. Modelos que permiten evaluar situaciones donde el asegurado podría enfrentarse a más de un evento: muerte e invalidez.

Las estructuras biométricas son importantes para determinar la prima, calcular las reservas, gestionar el riesgo de cobertura y permitir las proyecciones financieras de los productos asegurados y pensiones.

Por el contrario, la función biométrica es una relación matemática que describe el evento en función de una o varias variables. Las funciones biométricas están diseñadas para calcular probabilidades, tasas o valores que permiten predecir el comportamiento de la población o los asegurados. Las funciones se basan en las estructuras biométricas y proporcionan las fórmulas necesarias para calcular eventos como la probabilidad de supervivencia, las tasas de mortalidad, las reservas actuariales, etc.

Un ejemplo en el cálculo actuarial es que la estructura biométrica es la tabla de mortalidad, mientras que una función biométrica es la función de mortalidad.

Carácter	Estructura biométrica	Función biométrica
Definición	Conjunto de datos empíricos sobre eventos (mortalidad, morbilidad, etc.). Estudio matemático del conjunto poblacional	Modelo matemático que estima probabilidades o valores basados en datos biométricos
Propósito	Proveer datos de referencia para el análisis actuarial y leyes de	Estimar la ocurrencia de eventos, proyecciones o valores actuariales

	estudio de conjuntos pobacionales	
Representación	Tablas, gráficas, distribuciones de probabilidad, etc	Ecuaciones matemáticas o fórmulas
Uso	Establece las bases de cálculo	Cálculo

En resumen, **las estructuras biométricas** son los datos o bases estadísticas que describen las características de una población en términos de probabilidades de eventos, mientras que **las funciones biométricas** son las fórmulas matemáticas o modelos que permiten calcular eventos futuros y tomar decisiones actuariales basadas en esos datos.

Grupos cerrados: número de supervivientes y de fallecidos

Para la ciencia actuarial el concepto de grupo cerrado es especialmente importante en los seguros de vida. Estos grupos se refieren a una población asegurada en la cual no se permite la entrada de nuevos miembros, pero que los ya existentes continúan siendo parte del grupo mientras dure su cobertura, fallezcan o se jubilen. Las características del grupo cerrado son:

- No entran nuevos miembros. Solo los miembros originales se benefician del seguro contratado
- Limitación en la expansión. A diferencia de los grupos abiertos, en los que se pueden incorporar nuevos miembros continuamente, los grupos cerrados están restringidos a los miembros iniciales.
- Cobertura para los miembros existentes: Aunque no se permiten nuevos miembros, los que forman parte del grupo cerrado mantienen su cobertura y pueden estar sujetos a las condiciones y tarifas establecidas al momento de su inclusión
- Reservas y sostenibilidad: Debido a la naturaleza cerrada del grupo, las aseguradoras deben realizar un análisis cuidadoso de las reservas necesarias para cubrir los riesgos de los miembros durante su vida útil, ya que no podrán generar ingresos adicionales a través de nuevas incorporaciones.

La principal ventaja de estos colectivos es su estabilidad en el tiempo, facilita la predicción de los flujos de caja y la evolución de la mortalidad y de otros factores de riesgo.

Tantos de supervivencia y mortalidad.

Los tantos de mortalidad y supervivencia en la estadística actuarial se refieren a las probabilidades de fallecer antes de un año desde la edad x o sobrevivir un año más a la edad x.

Para cada edad existe una probabilidad de sobrevivir a un año más o fallecer antes de ese año. Por tanto, para cada edad existe una distribución binomial que describe la probabilidad de fallecer y la probabilidad de sobrevivir a un año más. Ambas probabilidades son complementarias y recogen todo el espacio probabilístico por tanto sus valores sumarán 1.

Existe también el estudio que describe la muerte por diversas causas o la eliminación del colectivo. En dicho caso la probabilidad de fallecer o desaparecer antes de un año aparece como un conjunto de probabilidades mutuamente excluyentes cuya suma es igual al tanto de fallecimiento (o desaparición) por cualquier causa. En dicho caso la distribución es una multinomial.

Tablas de mortalidad. Tipos y elaboración: Determinación de la probabilidad de muerte.

Las tablas de mortalidad recogen la información básica para calcular probabilidades de muerte y supervivencia necesarias para determinar primas, reservas, provisiones, etc.

Las hipótesis básicas sobre las que descansa el modelo son:

- Homogeneidad: Los individuos forman un grupo homogéneo en el sentido estadístico de que su edad de fallecimiento (distribuciones) son idénticas. Las variables edad de fallecimiento de cada individuo se distribuyen con la misma ley de probabilidad. De esta manera podemos estudiar el comportamiento probabilístico de un individuo genérico y utilizar sus conclusiones para el conjunto de éstos. Cada individuo es una réplica exacta de otro que tenga la misma edad.
- Independencia: Las variables que describen las edades de fallecimiento de los distintos individuos so estadísticamente independientes. Esta hipótesis se traduce en que las probabilidades para la edad de fallecimiento de un individuo no dependen de la edad de fallecimiento de otro. No hay efecto contagio.
- Estacionariedad: Las probabilidades biométricas sobre los individuos no dependen de su fecha de nacimiento, sólo de su edad, esto es, dependen del tiempo biométrico, pero no del tiempo físico, teniendo las mismas probabilidades de fallecer dos individuos de 60 años en el año 1980 que en el 1990. Esta hipótesis sólo es aceptable para periodos de tiempo corto y se viene relajando en los últimos años donde se usan cada vez más las tablas dinámicas sobre las estáticas que corrigen el tiempo físico.

Estos tres principios o hipótesis nos permiten reducir los análisis de grupo a un individuo genérico desde el cual se extienden las conclusiones o resultados posteriormente, mediante la relación entre frecuencias y probabilidades.

Las tablas se van a basar en una cohorte, generalmente ficticia pero que se fundamenta en los datos de la población.

Sus componentes son

x	Edad (años cumplidos)
l_x	Supervivientes a la edad x (proceden de un colectivo de individuos inicial)
d_x	Número de individuos de edad x que mueren antes de cumplir la edad x+1
p_x	Tanto anual de supervivencia a la edad x (proporción de individuos de edad x que

	alcanzan la edad x+1 en el transcurso de un año)
q_x	Tanto anual de mortalidad a la edad x (proporción de individuos de edad x que no alcanzan la edad x+1 en el transcurso de un año; mueren entre la edad x y la edad x+1)
Lx	Número medio de personas vivas entre x y x+1 (edad censal) – Se deben hacer hipótesis sobre la misma, generalmente la hipótesis de uniformidad. También se interpreta como número medio de años vividos por toda la población l_x entre la edad x y la edad x+1
m_x	Riesgo medio al que está sujeta la población entre los años x y x+1 (representa el efecto total de la mortalidad en términos de proporción de defunción en el conjunto del año)
e_x	Esperanza de vida: número medio de años que les resta por vivir a los l_x supervivientes a la edad x
Tx	Cantidad de existencia a la edad x: Es la suma de la edad censal Lx desde x hasta omega
μ_x	Tanto instantáneo de mortalidad, en el supuesto de continuidad en el proceso de existencia (análogo a m_x en el caso discreto). Se trata de una medida de fuerza o intensidad de la mortalidad a la edad x

1. Tanto de Mortalidad

Si definimos la variable ℓ_x como el número esperado de personas supervivientes pasados x años y llamamos Ç a la variable aleatoria que mide el número de supervivientes a la edad x, tendremos que:

$$\ell_x = E(\varsigma_x) = \ell_0(1-F(x)) = \ell_0 \cdot P(\varsigma > x) = \ell_0 \cdot {}_x p_0$$

Definimos igualmente dx como el número esperado de fallecidos a la edad x:

$$\begin{array}{ccccc} & \underline{año\ 1} & \underline{año\ 2} & \cdots & \underline{año\ s} \\ 0 & d_0^1 & d_0^2 & \cdots & d_0^s \\ 1 & d_1^1 & d_1^2 & \cdots & d_1^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & d_x^1 & d_x^2 & \cdots & d_x^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega & d_\omega^1 & d_\omega^2 & \cdots & d_\omega^s \end{array}$$

$$d_0 = \frac{\sum_{i=1}^{s} d_0^i}{s}$$
$$\vdots$$
$$d_x = \frac{\sum_{i=1}^{s} d_x^i}{s}$$
$$\vdots$$
$$d_\omega = \frac{\sum_{i=1}^{s} d_\omega^i}{s}$$

Para calcular las probabilidades de supervivencia y de muerte, podemos usar estas dos magnitudes que se han definido donde para el cálculo de estas probabilidades se escriben en función de los datos de la cohorte.

El **tanto de mortalidad** es la forma de denotar la **probabilidad de muerte (desaparición, eliminación, salir del grupo)** de un individuo (cabeza, elemento, población) en un determinado período de tiempo t cuando t=1 año.

Notación y Fórmula:

- El tanto de mortalidad se denota generalmente como q_x que es la **probabilidad de que una persona de edad x** muera antes de alcanzar la edad x+1.

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

  Donde:

  - d_x es el número de muertes ocurridas de edad x (que no alcanzan con vida la edad x+1)
  - l_x es el número de personas vivas a la edad x al comienzo del intervalo.
  - l_{x+1} es el número de supervivientes a la edad x+1

Si en lugar de un año se toma un intervalo cualquiera como t:

$${}_tq_x = \frac{d_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

Por tanto, los fallecidos a lo largo de un año serán por tanto (estimados):

$$d_x = \ell_x \cdot q_x$$

Puesto que hemos visto que $d_x = \ell_x - \ell_{x+1} \quad \Rightarrow \quad d_{x-1} = \ell_{x-1} - \ell_x \Rightarrow \quad \ell_x = \ell_{x-1} - d_{x-1}$

Tanto de Supervivencia

El **tanto de supervivencia** es la probabilidad de que una persona de una determinada edad **sobreviva** a la siguiente edad, es decir, la probabilidad de que una persona que ha llegado a la edad x continúe viva hasta la edad x+1.

Notación y Fórmula:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x$$

Donde:

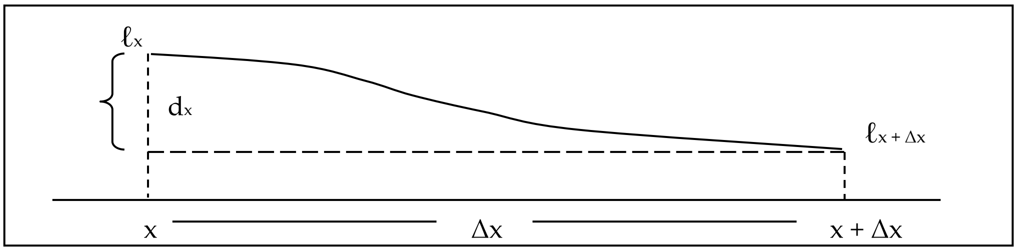
- l_{x+1} es el número de supervivientes a la edad x+1
- l_x es el número de personas vivas a la edad x al comienzo del intervalo.

En el caso de que se valore en el intervalo t:

$$_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - {}_tq_x$$

Tiempo vivido por una generación en un intervalo de tiempo

Retomando el plano probabilístico para ver cómo podemos obtener los valores de las tablas. Sirva el siguiente gráfico como ilustración:



Las personas que han llegado al final de un periodo son las que han sobrevivido todo el intervalo, y habrá un porcentaje **α** de fallecidos (**0<α<1**). Se pretende obtener el nº total de días que han vivido en total en conjunto:

$\ell_{x+\Delta x} \cdot \Delta x + \alpha \cdot d_x \cdot \Delta x$ ® número total de días vividos en el intervalo [**x, x+Δx**]

Desarrollando dicha expresión:

$$\ell_{x+\Delta x} \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\ell_x - \ell_{x+\Delta x}) \cdot \Delta x = (1-\alpha) \cdot \ell_{x+\Delta x} \cdot \Delta x + \alpha \cdot \ell_x \cdot \Delta x$$

Dividiendo dicha expresión por **Δx** (sería obtener la derivada) y aplicando límites a **Δx**®0, obtenemos **$\ell_x$dx**. Por tanto, para obtener el tiempo vivido por una generación o grupo inicial en un intervalo [**x, x+a**], tendremos que integrar sobre lo anterior, de forma que:

$$L(x,a) = \int_x^{x+a} \ell_s ds = \int_0^a \ell_{x+s} ds$$

Si el tiempo total fuera un día, y el grupo constase de 20 personas, los días totales vividos serían 20 días.

▫ **Nº medio de supervivientes entre (x, x+a)** ® Se calcula como el total de años vividos partido el lapso de años considerado; es decir:

$$\frac{L(x,a)}{a} \xrightarrow{si\ a=1} \frac{L(x,1)}{1} = L_x$$

▫ **Tiempo total que vive una generación hasta que desaparece:**

$$T_x = L_x + L_{x+1} + ... + L_{w-x-1} = \int_0^{w-x} \ell_{x+s} ds$$

Para calcular de forma discreta lo anterior, recordemos el ***teorema del valor medio***:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h) \cdot h \qquad donde \quad 0 < \theta < 1$$

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c) \cdot (b-a) \qquad a < c < b$$

Aplicando esto al cálculo de $\mathbf{L_x}$, vemos que $L_x = \int_x^{x+1} \ell_s ds = \ell_{x+\theta}, \quad 0 < \theta < 1$. Si se tratase de una aproximación lineal, coincidiría con el punto medio, y éste será precisamente nuestra estimación:

$$L_x \cong \frac{1}{2}(\ell_x + \ell_x - d_x) = \ell_x - \frac{1}{2} d_x$$
$$L_x \cong \frac{1}{2}(\ell_{x+1} + \ell_{x+1} - d_x) = \ell_{x+1} + \frac{1}{2} d_x$$

Tanto central de mortalidad $\mathbf{m_x}$

Es el correlato de $\boldsymbol{\mu_x}$ en tiempo continuo. Se trata de dividir el número de fallecidos entre [**x, x+1**] entre el tiempo total vivido:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{\ell_x - \frac{1}{2} d_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\frac{1}{2}\left(\ell_x + \ell_{x+1}\right)} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}\right)}{1 + \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}} = \frac{2(1-p_x)}{1+p_x}$$

$$m_x = \frac{2q_x}{2-q_x} \qquad q_x = \frac{2m_x}{2+m_x} \qquad p_x = \frac{2-m_x}{2+m_x}$$

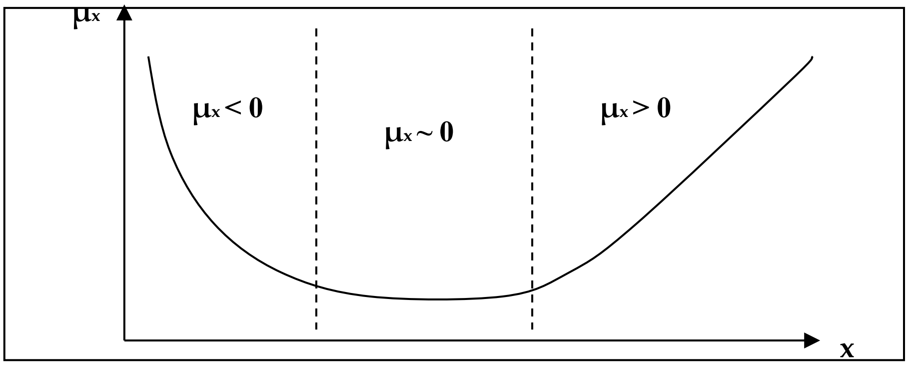
L_x es el numero promedio de individuos que en un intervalo dado tienen la edad x. x+1, para todas las edades.

El tanto central de mortalidad relaciona el número de individuos fallecidos a la edad x (d_x), con el número de individuos vivos en dicha edad y que no han alcanzado la edad siguiente (L_x)

Tanto instantáneo de mortalidad (fuerza de mortalidad)
Se define el tanto instantáneo de mortalidad **μ_x** como la probabilidad condicionada de morirse después de un instante **h ® 0** en adelante, y por tanto se asocia con la velocidad de muerte, pero condicionada a llegar a dicha edad **x**. Por tanto:

$$\mu_x = \frac{F'(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

Normalmente, dicho **μ_x** suele comportarse según la siguiente gráfica, atendiendo a los distintos valores de **x**:



*¿Como podemos representar la velocidad **μ_x** a partir de las probabilidades anteriores?*

$$\int \mu_x dx = \int \frac{F'(x)}{1-F(x)} dx$$

$$\int \mu_x dx = -\ln(1-F(x)) + \underbrace{\ln A}_{K}$$

$$-\int \mu_x dx = \ln\left(\frac{1-F(x)}{A}\right)$$

$$e^{-\int \mu_x dx} = \left(\frac{1-F(x)}{A}\right) \quad \Rightarrow \quad 1-F(x) = Ae^{-\int \mu_x dx}$$

Aplicando la condición **F(0) = 0 ® 1 – F(0) = 1 ®** $A = e^{\left(\int \mu_x dx\right)_{x=0}}$ obtenemos:

$$1-F(x) = e^{-\int_0^x \mu_s ds} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_s ds}$$

Con ello, podemos obtener las probabilidades buscadas:

$${}_h p_x = \frac{1-F(x+h)}{1-F(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+h} \mu_s ds}}{e^{-\int_0^{x} \mu_s ds}} = e^{-\int_x^{x+h} \mu_s ds} \quad \Rightarrow \quad {}_h q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+h} \mu_s ds}$$

Vida media y vida probable, esperanza de vida

Vida media de un conjunto de l_x individuos, el número medio de años que correspondería vivir a cada una y, por tanto, la media aritmética de los años vividos entre todas. Si ese número de años lo representamos por N, la vida media será:

$E_x = \frac{N}{l_x}$

La vida probable es el número de años (t) de vida que le restan aproximadamente a un individuo de edad x.

$$l_{x+t} = \frac{1}{2} l_x$$

La esperanza de vida se refiere al número de años que en promedio se espera que viva una persona después de nacer.

$$\overline{e}_x = E(T(x)) = \int_0^{\omega - x} t.g_x(t)dt$$

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

donde

Tx es el número total de años vividos desde la edad x

lx son los supervivientes en la edad exacta x

Estimación de las probabilidades de mortalidad

Las relaciones entre las principales funciones biométricas se muestran en este cuadro:

	$f(x)$	$F(x)$	$S(x)$	μ_x	l_x
$f(x)$		$F'(x)$	$-S'(x)$	$\mu_x e^{-\int_0^x \mu_t\ dt}$	$-\frac{l'_x}{l_0}$
$F(x)$	$\int_0^x f(t)\ dt$		$1 - S(x)$	$1 - e^{-\int_0^x \mu_t\ dt}$	$1 - \frac{l_x}{l_0}$
$S(x)$	$\int_x^{+\infty} f(t)\ dt$	$1 - F(x)$		$e^{-\int_0^x \mu_t\ dt}$	$\frac{l_x}{l_0}$
μ_x	$\frac{f(x)}{1 - \int_0^x f(t)\ dt}$	$\frac{F'(x)}{1 - F(x)}$	$-\frac{S'(x)}{S(x)}$		$-\frac{l'_x}{l_x}$

Función de supervivencia

El análisis de la supervivencia se basa en los tiempos de falla, los cuales provienen de una variable aleatoria NO NEGATIVA T, que representa la longitud de tiempo de vida futura o tiempo de supervivencia.

La variable T, viene caracterizada por cuatro funciones:

- función de supervivencia
- función de densidad de probabilidad
- función de riesgo
- función de riesgo acumulado

Estas funciones son matemáticamente equivalentes, conocida una se derivan las otras tres. La variable T, puede ser variable aleatoria continua o discreta, según el caso.

Función de supervivencia caso continuo.

La función de supervivencia S(t), tanto en el caso continuo como en el discreto, se define como la probabilidad de que un individuo sobreviva más allá del tiempo t. O la probabilidad que un recién nacido llegue con vida a la edad x. Para el caso continuo:

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F_T(t) = \int_t^{\infty} f_T(u)du$$

Si tomamos la igualdad

$$S(t) = 1 - F_T(t)$$

y derivamos en ambos lados y multiplicamos por −1, obtenemos:

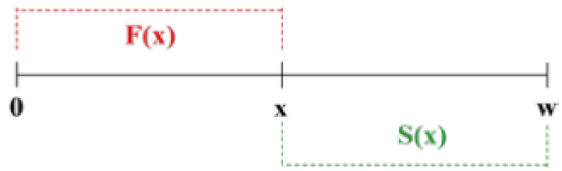
$$-\frac{d}{dt}S(t) = f_T(t)$$

Las propiedades de S(t)son:

1.-Es monótona no creciente.
2.-S(t)=1 para t=0.
3.-S(t)=0 cuando t→∞.

Esto significa :
Es decreciente porque la probabilidad que un recién nacido llegue con vida a una determinada edad cae conforme se avanza en la edad.
La probabilidad que una persona fallezca después de nacer es 1
Si t tiende a infinito, es decir tiende a w, ninguna persona puede sobrevivir, la probabilidad de sobrevivir después de esa edad es cero.

La función S(t) es conocida también como la *tasa de supervivencia acumulativa*;
La función de distribución y de supervivencia se complementan.

	S(x) + F(x) = 1 S(x) = 1 – F (x) o F(x) = 1 – S(x)

Función de supervivencia caso discreto

Si T es una variable aleatoria discreta que toma valores $0 < t_1 < t_2 < \ldots$.. Entonces la función de probabilidad de Tes:

$$f(t) = \begin{cases} \mathbb{P}(T = t_j) & \text{si } t = t_j, j = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo que su función de supervivencia es:

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = \sum_{t < t_j} f(t_j)$$

Sus propiedades son las mismas que en el caso continuo.

Función de riesgo. Caso continuo. Tiempo futuro de supervivencia

La función de riesgo h(t) (función Hazard), también llamada **tasa de falla condicional** (en el análisis de confiabilidad) o *tasa de mortalidad* (en demografía), se define como la probabilidad de falla durante un intervalo de tiempo muy pequeño suponiendo que el individuo ha sobrevivido hasta el inicio del intervalo. (Aunque en la definición de h(t) se tenga explícitamente la palabra “probabilidad”, hay que tener en claro que esta función no es una función de probabilidad, si no tal cual una **tasa**, ya que la acumulación de esta puede dar valores superiores a 1).

Su expresión matemática es:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \mathbb{P}(t < T \leq t + \alpha | T \geq t) \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \frac{\mathbb{P}(T \leq t + \alpha) - \mathbb{P}(T < t)}{\mathbb{P}(T \geq t)} \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \frac{F(t + \alpha) - F(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \end{aligned}$$

Entonces:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{d}{dt} log(S(t))$$

Y despejando S(t):

$$S(t) = exp\left[-\int_0^t h(u)du\right] = exp[-H(t)]$$

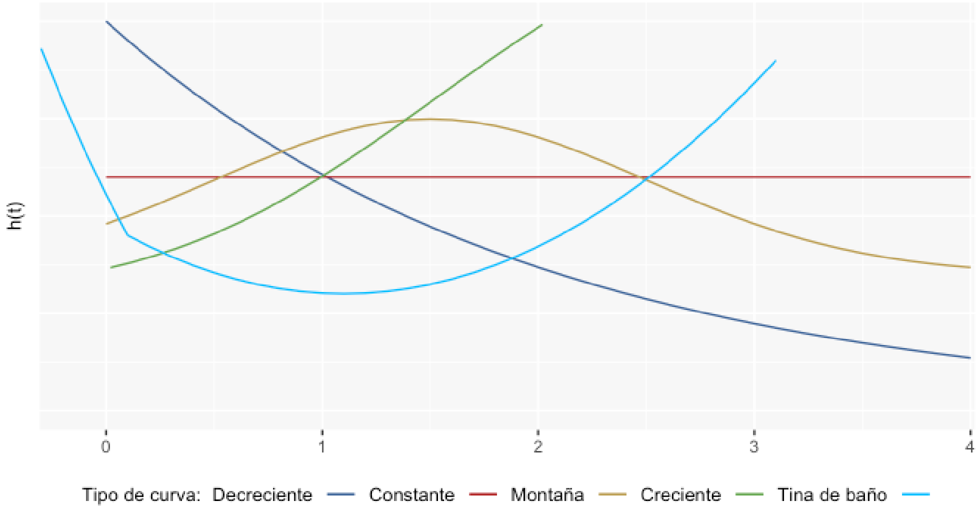
La función H(t) es la función acumulada de riesgo.

$H(t) = \int_0^t h(u)du$

La función de riesgo juega un papel importante en el análisis de supervivencia. Describe la forma en que cambia la *tasa instantánea de muerte de un individuo al paso del tiempo (*constante, lineal, exponencial, etc.)

El conocer h(t)puede darnos alguna idea sobre la selección del modelo para la distribución del tiempo de supervivencia, por ejemplo, puede ser útil al considerar restricciones para modelos con funciones de riesgo no decrecientes o modelos con funciones de riesgo no crecientes.
No hay un comportamiento “habitual” en la gráfica de h(t), es decir, h(t)puede crecer, decrecer, o ser constante.

La curva h(t) en color azul (*llamada curva de tina de baño*) describe el proceso de la vida humana: al inicio existe mortalidad infantil y el riesgo de morir es alto, crece el individuo y el riesgo de morir se reduce y hasta cierto punto es constante, después viene el envejecimiento(hay deterioro) y entonces el riesgo de morir aumenta. Una función de riesgo creciente como la curva de color verde implica un envejecimiento natural. Una función decreciente como la curva color morado es menos común e indica rejuvenecimiento. Una función en forma de montaña como la curva color café, podría representar un comportamiento de muerte por enfermedad después de llevar un tratamiento para la misma enfermedad. No siempre se comporta así, en España durante los años 80 hubo una cuenca (elevación si se observa la complementaria curva de mortalidad) en las edades más jóvenes debido al efecto de la heroína.



Función de riesgo acumulado. Caso discreto

En este caso, la función de riesgo proporciona la probabilidad condicional de falla al tiempo $t=u_k$, dado que el individuo estaba vivo antes de u_k.
Sea T una variable aleatoria discreta con soporte en $\{u_1,u_2,u_3,...\}$. la función de riesgo al tiempo u_k se define como[3]

$$h(u_k) = \mathbb{P}(T = u_k | T \geq u_k) = \frac{\mathbb{P}(T = u_k)}{\mathbb{P}(T \geq u_k)}$$

Como

$$\mathbb{P}(T = u_k) = \mathbb{P}(T \geq u_k) - \mathbb{P}(T > u_k) = S(u_{k-1}) - S(u_k)$$

Si dividimos entre $S(u_{k-1})$:

$$h(u_k) = \frac{S(u_{k-1}) - S(u_k)}{S(u_{k-1})} = 1 - \frac{S(u_k)}{S(u_{k-1})}$$

Por otro lado, para S(t) se cumple que:

$$S(t) = \frac{S(t)}{1} = \frac{S(t)}{S(0)} = \frac{S(u_1)}{S(0)} \cdot \frac{S(u_2)}{S(u_1)} \cdot \frac{S(u_3)}{S(u_2)} \cdots \frac{S(u_k)}{S(u_{k-1})} \cdot \frac{S(t)}{S(u_k)}$$

Por tanto, la expresión anterior de la función se convierte en un producto:

$$S(t) = \prod_{k: u_k \leq t} (1 - h(u_k))$$

EJERCICIO 1
Financiero- Actuarial

TEMA 12: MATEMATICAS ACTUARIAL. FUNDAMENTO FINANCIERO Y ESTOCASTICO. PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA ACTUARIAL. ENFOQUE ESTATICO Y DINAMICO. CLASIFICACION DE LA MATEMATICA ACTUARIAL

Edición Enero 2025

Matemática Actuarial

El objeto de la matemática actuarial lo constituye el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro (generalizable a las financieras) con el fin de optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en estas operaciones:

- Existencia de un ente financiero
- Entorno económico-social

Por tanto, dentro de esta disciplina se estudian:

- ✓ Modelos de tarificación y reservas técnicas
- ✓ Primas, reservas, valores garantizados...
- ✓ Sistemas actuariales (seguros colectivos y planes de pensiones)
- ✓ Magnitudes de estabilidad y análisis de solvencia.

Ubaldo Nieto y Vegas consideran llamar a las operaciones de la matemática actuarial "operación actuarial" en lugar de fenómeno para distinguirlo de la parte de estadística actuarial y porque se basa en un acuerdo previo entre partes, sujeto y dependiente de la voluntad humana.

Los elementos que definen la operación actuarial son:

1. Duración: Dividida en periodos o momentos
2. Sucesos: Aquellos sucesos que de acuerdo con un contrato, concierto o convenio dan lugar al pago de primas y prestaciones.
3. Capitales financiero-aleatorios: Asociados a los sucesos sometidos al principio de subestimación de capitales futuros

La matemática actuarial es la ciencia que permite cuantificar el riesgo en términos monetarios. En los seguros de vida la matemática actuarial cuantifica el riesgo incierto mediante la utilización de datos de mortalidad (los cuales se expresan en tablas). Estas tablas permiten obtener el valor de una prima o precio del seguro que pueda cubrir el monto en caso de que se produzca el siniestro (ocurrencia del riesgo asegurado). En la seguridad social la prima es la cotización total (empresario + trabajador) destinada al financiamiento de las prestaciones temporales o permanentes del trabajador (riesgos).

Fundamento financiero y estocástico

Fundamento financiero: Puesto que se da en un entorno económico y social con la intervención de un ente financiero y dado que las operaciones tienen su origen en contratos, conciertos, acuerdos o convenios, la DURACIÓN de la operación está sujeta al principio de subestimación de capitales futuros. Frecuentemente se aplica capitalización simple para operaciones No vida (si bien Solvencia II establece el Best Estimate en compuesta) y compuesta en vida. Esto es así porque en vida generalmente los contratos son de mayor duración, mientras que en no vida se renuevan anualmente.
Fundamento estocástico: Los fenómenos objeto de las operaciones actuariales son fenómenos actuariales y por definición de éstos, aleatorios con consecuencias económicas. Los fenómenos están sujetos a que:

- El evento ocurra o no
- El momento en el que se producirá el evento

- Combinación de ambas

Por tanto, debe estudiarse bajo un prisma estocástico.

Principio de Equivalencia actuarial

Un sistema financiero es el método que estable el equilibrio entre las aportaciones realizadas y las prestaciones a recibir. En general la ecuación de equilibrio financiero-actuarial se valora en el momento actual y ha de verificar:

Valor actual actuarial de las aportaciones = Valor actual actuarial de las prestaciones

En los seguros colectivos, la equivalencia entre aportaciones y prestaciones responde al "principio de equivalencia colectiva", el cual tiene tres aspectos:

- El colectivo es un grupo demográfico abierto con una cierta estructura. Por colectivo abierto se entiende aquel que tiene entradas y salidas de integrantes, por el contrario, colectivo cerrado se entiende aquel en el cual únicamente se producen salidas del colectivo: despidos, fallecimientos, etc.
- La equidad entre derechos adquiridos y aportaciones pueden responder a un principio social más que individual. Por ejemplo, aquellos que están próximos a la jubilación pueden necesitar aportaciones del colectivo porque sus propias aportaciones no lleguen a cubrir sus derechos reconocidos. Por tanto, los sistemas actuariales a aplicar en seguros colectivos pueden diferir de los basados en capitalización individual.
- En los seguros sociales se contempla una variable económica, el salario. Tanto aportaciones como prestaciones están en términos de salario REAL (no nominal).

Surgen así dos posibilidades:

1. Aportación definida: donde es conocida la primera parte de la ecuación y la variable es determinar la prestación a percibir.
2. Prestación definida: donde se fijan las prestaciones que han de percibir los beneficiarios cuando se produzca el hecho causante y la variable a determinar es la aportación.

El sistema de reparto de la seguridad social española está financiado por un sistema de aportación definida (cotización basada en los salarios reales). El sistema de prestación definida es propio de los seguros privados.

Enfoque estático y dinámico

Los elementos esenciales de la operación de equivalencia financiera-actuarial son:

1. Duración dividida en periodos o momentos. Temporalidad
2. Sucesos que dan lugar a aportaciones y a prestaciones
3. Capital financiero-actuarial asociado a estos sucesos y que están sometidos al principio de capitalización y/o descuento financiero.

Principio de equivalencia estática:

Este principio considera a la operación en su total duración. Existe equilibrio actuarial cuando el valor actual de las aportaciones es igual al valor actual de las prestaciones, calculados estos valores actuariales por medio de la esperanza matemática de los correspondientes capitales que definen el proceso financiero-estocástico.

En este enfoque se sustituyen los capitales financiero-aleatorios por sus valores medios o esperados y considera la operación en su total duración.

Subproceso de primas:

$$P(0) = \sum_{t=t_1}^{t_n} E(P(\omega, t)) \cdot v^t$$

Siendo $E(P(\omega, t)$ el valor esperado de cada pago en el momento t

$$E(P(\omega, t) = \sum_i P(\omega_i; t)p(\omega_i)$$

y siendo v^tel factor de actualización financiero:

$$v^t = \frac{1}{(1+i)^t}$$

En general dos procesos financiero-estocásticos son equivalentes (estático) si se cumple que:

$$\{C(\omega, t); t \in T_1\} \text{ y } \{B(\omega, t); t \in T_2\}$$

$$\sum_{t \in T_1} E(C(\omega, t)\, v^t = \sum_{t \in T_2} E(B(\omega, t)\, v^t$$

C(0)=B(0)

Bajo este enfoque la reserva matemática ex -ante se calcula como:

$$V(\omega, t) = [P_1(\omega, t) - K_1(\omega, t)] \cong [K_2(\omega, t) - P_2(\omega, t)]$$

Siendo el primer término la reserva por el método retrospectivo y el segundo la reserva por el método prospectivo.

Su valor medio o esperanza matemática será

$$E\big(V(\omega, t)\big) = E(P_1(\omega, t) - K_1(\omega, t)) \cong E(K_2(\omega, t) - P_2(\omega, t))$$

La equivalencia estática es un caso particular de la equivalencia dinámica, cuando se dan las condiciones iniciales y finales.

Principio de equivalencia dinámica

Se considera la operación en los distintos periodos en que se va desenvolviendo.

$$C(\omega'; t)(1 + i_{t+1}) = E\big(C(\omega; t+1)\big) = \sum_{i=1}^{s} C(\omega_i; t+1) \cdot p(\omega_i; t+1)$$

Dadas las condiciones iniciales $C(\omega, t_0)$ se puede conocer la situación en función de su pasado (retrospectivo). Si se conocen las finales $C(\omega, t_n)$ se puede conocer su situación en función de su futuro (prospectiva). Si se conocen ambas condiciones de contorno se da el caso particular de la equivalencia estática.

Clasificación de la matemática actuarial

Tradicionalmente la matemática actuarial ha estado asociada a las finanzas y empresas de seguros. Cuantificando los riesgos para adaptar las primas y las prestaciones, además de establecer las estrategias de inversiones.

Así, la clasificación clásica de la matemática actuarial como disciplina cuantitativa de las operaciones de seguros es:

- Matemáticas de las operaciones de seguros
  - Seguros vida
  - Seguros no vida
- Matemáticas de la estabilidad
  - Fundamento matemático. Teoría del riesgo (Individual y colectivo)
  - Problemas de estabilidad (reservas de estabilización, del reaseguro y de los recargos de seguridad)
- Matemáticas de la decisión
  - Modelos matemáticos para la toma de decisiones

EJERCICIO 1
Financiero-Actuarial

TEMA 13: EL FACTOR DE ACTUALIZACION. DEFINICION Y PROPIEDADES. FACTOR DE CAPITALIZACION ACTUARIAL. SIMBOLOS DE CONMUTACION. INTERES VARIABLE

Edición Enero 2025

La valoración actuarial es uno de los temas fundamentales de la matemática de los seguros de vida. Consiste en la valoración ACTUAL de capitales futuros cuya cuantía y/o vencimiento dependen de un suceso aleatorio, en este caso la supervivencia de un individuo. Son pues operaciones demográficas-financieras.

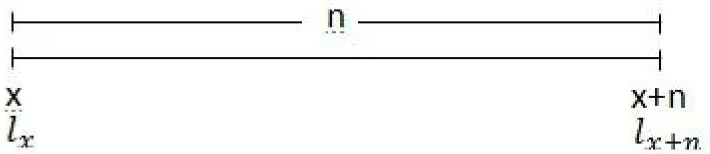
Para dicha valoración son necesarias las denominadas: BASES TECNICAS. En este concepto se recogen tres puntos esenciales: ley financiera, tipo de interés empleado y las probabilidades de los sucesos (fallecer o sobrevivir a una determinada edad). Como se observa, existe una parte financiera (ley financiera y tipo de interés) y otra estadística-biométrica (la probabilidad).

En las valoraciones actuariales siempre se utiliza la ley financiera de CAPITALIZACION COMPUESTA; al tipo de interés se le denomina INTERES TECNICO. El interés técnico es el tipo de interés de mercado y es la rentabilidad que el asegurador garantiza en sus operaciones de seguro. Para la valoración de las proyecciones de prestaciones permanentes, el tipo de interés es el tipo de INTERES LIBRE DE RIESGO a nivel nacional, es decir el contemplado en los bonos españoles a 10 años. Por último, las TABLAS DE MORTALIDAD proporcionan las citadas probabilidades de muerte y supervivencia.

EL FACTOR DE ACTUALIZACION: DEFINICION Y PROPIEDADES.

El factor demográfico financiero puede ser de actualización o de capitalización. El factor de actualización es el caso más utilizado en las operaciones actuariales. Se trata de obtener el valor de la prima que debe pagarse para la situación específica como vida o muerte.

Supongamos que una persona de edad x recibirá un capital unitario si sobrevive dentro de n años, es decir si alcanza la edad x+n. La prima a pagar en el momento inicial o valor actual actuarial de lo que supone recibir dentro de n años una unidad monetaria será nE_x



Se define nE_x como el valor actual actuarial a la edad x de un capital unitario que se pagará a la edad x+n

Se trata de un valor esperado. Es el valor actual actuarial o esperanza matemática de una variable aleatoria que se define como:

$$Z = F(T_x) = \begin{cases} 0 \; si \; T_x \leq n \longrightarrow \; {}_nq_x \\ v^n \; si \; T_x > n \longrightarrow \; {}_np_x \end{cases}$$

Siendo T_x la variable de vida residual y v^n el factor financiero

$$E(Z) = v^n \cdot \; {}_np_x + 0 \cdot {}_nq_x = v^n \cdot \; {}_np_x$$

Por tanto, teniendo en cuenta los datos de cohorte si:

l_x, numero de individuos de edad x en el momento inicial
l_{x+n}, numero de individuos de edad x+n en el momento n (los que han sobrevivido n años)
$v^n = \left[\frac{1}{(1+i)}\right]^n$, factor financiero de actualización con ley financiera de capitalización compuesta o factor de descuento de n periodos (años)

El factor actuarial de actualización será:

$${}_nE_x * l_x = l_{x+n} * v^n; \qquad v = (1+i)^{-1}$$

Para despejar el factor, multiplicamos por la unidad expresada como. $\frac{v^x}{v^x}$ y operamos con potencias,

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} * \frac{v^{x+n}}{v^x}$$

Otra manera de expresarlo es:

$${}_nE_x = {}_np_x \; v^n$$

Propiedades:

Propiedad de escindibilidad: El factor de actualización actuarial cumple con la propiedad de escindibilidad porque $v^n \; y \; {}_np_x$ son escindibles

$${}_{s+r}E_x = {}_rE_x + {}_sE_{x+r}$$

Variaciones de ${}_nE_x$

1. ${}_nE_x$ disminuye si se incrementa i
2. ${}_nE_x$ disminuye si se incrementa n
3. ${}_nE_x$ respecto de la edad x crecerá o disminuirá dependiendo de la diferencia entre $(\mu_x - \mu_{x+n})$

FACTOR DE CAPITALIZACION ACTUARIAL.

El factor de actualización es el equivalente actuarial del valor V^n , que se denomina factor de actualización financiera.

De manera similar, se define factor de capitalización actuarial. En este caso se trata de hallar la suma asegurada que es un valor futuro. Tiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{(1+i)^n}{{}_np_x}$$

Que es el análogo actuarial del factor de capitalización financiera:

$$v^{-n} = (1+i)^n.$$

SIMBOLOS DE CONMUTACION

Todas las rentas actuariales se pueden poner como sumas de los ${}_nE_x$; si además el interés es fijo, se pueden usar símbolos de conmutación.

Para facilitar los cálculos, introducimos los SIMBOLOS DE CONMUTACION.
El primer símbolo corresponde a:

$$D_x = l_x v^x$$

Por tanto, el factor de actualización actuarial o factor demográfico financiero es menor que el factor de actualización financiero puro v^n, precisamente por el riesgo de que al fallecer antes no recibiría el capital esperado. Se interpreta también como la prima neta única de un seguro dotal puro (capital diferido) que tendría que pagar una persona de edad x para recibir una suma asegurada de 1 unidad monetaria dentro de n años si sobrevive.

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Los símbolos de conmutación son relaciones matemáticas artificiosas que ayudan a simplificar el desarrollo de los cálculos laboriosos que conllevan la ciencia actuarial. Son valores son calculados en base a una determinada tabla de mortalidad y una tasa de interés técnico. Hay seis símbolos de conmutación, los tres primeros se aplican a rentas actuariales y los tres últimos a seguros. Como se observa cada símbolo es una extensión del anterior, de esta manera, D_x es base para N_x y éste es utilizado para obtener S_x.. En caso de seguros, C_x, M_x y R_x, también están relacionados. Nunca se varia la amplitud del intervalo, sin embargo, si puede variar el tipo de interés. El tipo de interés técnico influye en el cálculo de la prima de seguro de cualquier tipo ya que a mayor tasa la prima será menor y viceversa.

Uso:	Rentas = se calcula considerando número de vivos (l_x) al principio del periodo x.	Seguros = se calcula considerando el número de fallecidos (d_x) al principio del periodo x+1.
Factor de actualización.	$D_x = l_x * v^x$	$C_x = d_x * v^{x+1}$
Rentas o seguros cuyos montos son iguales o constantes.	$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}$	$M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}$
Rentas o seguros cuyos montos son distintos o variables.	$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} N_{x+t}$	$R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t}$

El desarrollo del segundo símbolo se estudia en los siguientes apartados. La aplicación del primer símbolo se estudió el factor de actualización actuarial.

Definiciones:

D_x: Se define como el número de sobrevivientes descontados a una determinada tasa de interés anual por un tiempo equivalente a su edad.

$$Dx = lx /(1+i)^x$$

N_x: Para ayudar al calculo que se realiza en n años se utiliza el símbolo de conmutación denominado N_x, cuyo valor es:

$$N_x = D_x + D_{X+1} + \ldots + D_W$$

C_x: Se define como el número de fallecidos a la edad x descontados por un plazo equivalente a su edad más un año más.

$$Cx = dx / (1 + i)^{x+1}$$

M_x: Para ayudar al calculo que se realiza en n años se utiliza el símbolo de conmutación denominado M_x, cuyo valor es:

$$M_x = C_x + C_{X+1} + \ldots + C_W$$

R_x Es el sumatorio de M_x

En los tres últimos casos hay que hacer hipótesis sobre el momento del fallecimiento; los que se presentan arriba tienen la hipótesis de la mortalidad se produce a primeros de año.

INTERES VARIABLE

En ocasiones el tipo de interés técnico es variable, i_h. Es el tipo de interés técnico en el año h-ésimo a partir del momento de la valoración y dar lugar a rentas variables.

Renta prepagable

$$(V\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \, {}_kE_x = c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} {}_kp_x \prod_{h=1}^{k} (1+i_h)^{-1}$$

Renta pospagable

$$(Va)_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} c_k \, {}_kE_x = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x \prod_{h=1}^{k} (1+i_h)^{-1}$$

ANEXO: DIFERENCIAS ENTRE TERMINOS FINANCIEROS Y ACTUARIALES

En financieras, se sabe que la tasa instantánea de interés o fuerza de interés, el cual dice como varia el capital a cada instante tiene la expresión,

$$\delta = \ln(1+i):$$

Tras sustituir esta expresión en la formula del factor actuarial de actualización y tras desarrollarla

$$\begin{aligned}
{}_nE_x &= e^{-n\,\delta}\;{}_np_x \quad ; \quad n\,\delta = \int_x^{x+n} \delta \; dt \\
{}_np_x &= e^{-\int_0^n \mu_{x+t} \; dt} \\
&= e^{-\int_x^{x+n} \mu_t \; dt} \\
{}_nE_x &= e^{-\int_x^{x+n} \mu_t \; dt} \; e^{-\int_x^{x+n} \delta \; dt} \\
{}_nE_x &= e^{-\int_x^{x+n} (\mu_t + \delta) \; dt}
\end{aligned}$$

Se obtiene el factor financiero como equivalente al factor actuarial si se considera la probabilidad de supervivencia 1, o equivalentemente una fuerza de mortalidad μ_t cero.

$$v^n = e^{-\int_x^{x+n} \delta \; dt}$$

Las propiedades que se derivan de esta equivalencia son muy importantes:

- El factor de actualización actuarial es menor (o igual) que el factor de actualización financiera.

$$ {}_nE_x \leq v^n $$

- El factor de capitalización actuarial, en cambio, es mayor o igual al factor de capitalización financiera.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{{}_nE_x} &= e^{\int_x^{x+n}(\delta+\mu_x)\ dx} \\
\frac{1}{{}_nE_x} &\geq (1+i)^n \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 1
Financiero-Actuarial

TEMA 14: RENTAS ACTUARIALES CONSTANTES DE CAPITALIZACION COMPUESTA. RENTAS POSPAGABLES Y PREPAGABLES. RENTAS TEMPORALES Y VITALICIAS. RENTAS DIFERIDAS Y ANTICIPADAS

Edición Enero 2025

Rentas actuariales constantes en capitalización compuesta.

Una renta actuarial es una distribución de capitales financiero-aleatorios en la que el vencimiento de los términos amortizativos depende de la probabilidad de supervivencia de una persona (cabeza, elemento...) o grupo (de cabezas).

Un capital financiero-aleatorio es una variable aleatoria bidimensional sujeta al principio de subestimación de capitales futuros y a la supervivencia (esto es, en términos de probabilidad) de la cabeza o grupo. Teniendo en cuenta este último aspecto hay autores como Heras, Vilar Zanón y Gil Fana que las denominan rentas vitalicias, frente a otros autores como Andrés de Pablo o Rafael Moreno que dejan el término vitalicia a aquellas rentas de duración ilimitada. Sin embargo, teniendo en cuenta que todas las rentas actuariales son temporales dado que la vida es limitada a una edad máxima, parece más correcto utilizar el término vitalicia asociado a la vida, y no a la atemporalidad como en el caso financiero.

La clasificación de las rentas actuariales es la siguiente:

Atendiendo a la **amplitud de los periodos de maduración**, es discreta si tienen amplitud medible o continua si son de amplitud infinitesimal. En el caso de las rentas utilizadas en la seguridad social, si bien la variable edad implica utilizar calculo integral para calcular las rentas deseadas se suele simplificar utilizando valores medios obtenidos a mitad de año, convirtiéndose la edad en variable discreta. Esta simplificación se puede realizar por considerar que, aunque amplio (toda la población española) el colectivo es homogéneo. Esto es, el colectivo tiene una característica común a todos los integrantes de este, la vida. El estudio actuarial se centra en estudiar al colectivo atendiendo al hecho de que sus componentes vivan o no en un determinado momento. El tiempo biométrico, la variable edad, es la medida de la vida.

Atendiendo a la **duración de la renta**, ésta puede ser temporal si esta acotada para un numero finito de periodos o vitalicia (ilimitada) para todo el periodo.

Atendiendo a la **cuantía de los términos**, son constantes o variables.

Atendiendo al **punto valoración y al origen** de los términos de la renta:

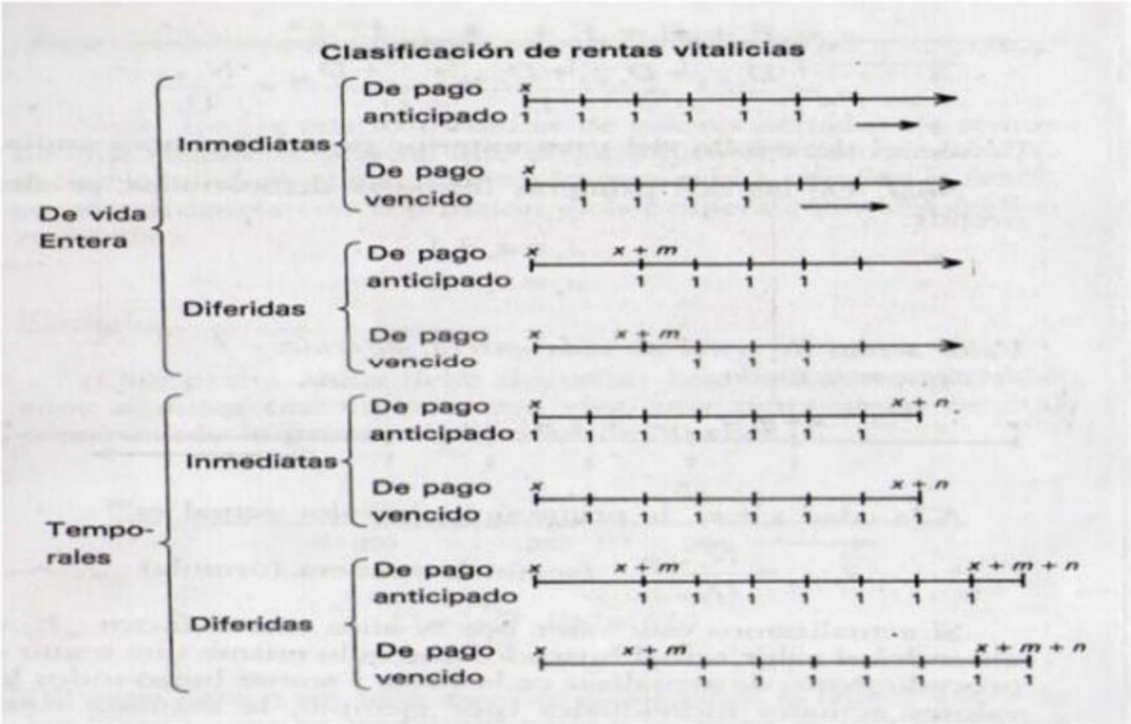
- si el punto de valoración coincide con el origen de la renta es inmediata
- si el punto de valoración es anterior al origen de la renta es diferida
- si el punto de valoración es posterior al origen de la renta es anticipada

En las **rentas discretas** se distingue:

- las rentas anuales y de periodos inferiores al año
- las pospagables (al principio del periodo) y prepagables (al final del periodo), en función de si los términos vencen en los extremos superiores o inferiores de los periodos de maduración.

(Esta última clasificación no tiene sentido en las rentas continuas)

Rentas pospagables y prepagables. Rentas temporales y vitalicias. Rentas diferidas y anticipadas.



Considerando la valoración actual, se tienen las siguientes expresiones:

Renta		Símbolo y Valor
Vitalicia	Prepagable	$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$
	Pospagable	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$

Renta		Símbolo y Valor
Temporal n periodos	Prepagable	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$
	Pospagable	$a_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$

Renta		Símbolo y Valor
Anticipada en k periodos	Prepagable	$^{k}/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$
	Pospagable	$^{k}/a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$

Renta		Símbolo y Valor
Anticipada k y temporal n periodos	Prepagable	$^{k}/\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k}-N_{x+k+n}}{D_x}$
	Pospagable	$^{k}/a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k+1}-N_{x+k+n+1}}{D_x}$

Como se puede observar, se pueden establecer algunas reglas interesantes:

- el subíndice de todos los denominadores indica la edad en que fue contratada la renta
- el subíndice del único o primer término del denominador indica la edad en que se comienza a percibir o pagar la renta
- solo en rentas temporales, el subíndice del segundo término del denominador indica la edad que se deja de percibir o pagar la renta.

EJERCICIO 1
Financiero- Actuarial

TEMA 15: SISTEMAS FINANCIEROS ACTUARIALES. SISTEMAS DE REPARTO. SISTEMAS DE CAPITALIZACION INDIVIDUAL Y COLECTIVA. ESTUDIOS COMPARATIVO

Edición Enero 2025

Sistemas Financiero- Actuariales

Un sistema financiero de un régimen de previsión social como el conjunto de métodos y fórmulas que establecen el equilibrio entre los recursos y los gastos, de forma que trata de ver la ordenación financiero actuarial mediante la que se van a determinar los tipos de primas o cuotas con la que se va a financiar el sistema para poder hacer frente a las distintas prestaciones que se compromete a cubrir.

Todo sistema de previsión social actúa sobre un colectivo por lo que se debe conocer la estructura del mismo, analizando especialmente, los siguientes aspectos:

Demográficos:

- La estructura y composición de las edades de las personas que forman el colectivo.
- Previsión de evolución y estabilidad
    - Envejecimiento de la población
    - Incremento de la esperanza de vida
    - Tasa de natalidad
- Amplitud del colectivo

Económicos:

- Individuales: salarios y prestaciones
- Colectivos: evolución de la economía en su conjunto, tasa de ocupación y desempleo, ...

El estudio de la interrelación entre la previsión social y la evolución demográfica debe ser constante dado que la mayoría de los sistemas de previsión social implican la existencia de solidaridad intergeneracional.

Un sistema financiero es el método o modelo que, de acuerdo con unos criterios previamente fijados, establece el equilibrio entre las aportaciones realizadas y las prestaciones a recibir. En general, la ecuación de equilibrio financiero-actuarial debe verificar:

Valor actual actuarial de las aportaciones esperadas	**=**	**Valor actual actuarial de las prestaciones esperadas**

Esta igualdad requiere de un colectivo bien definido y de un horizonte temporal al que se refiere esta ecuación.

Las variables que van a influir en este equilibrio son:

- Estructura de edades
- Contingencias que se cubran
- Tasas de mortalidad, morbilidad, incapacidad,
- Los tipos de interés

- Cotizaciones, cuotas
- Reservas en su caso

Las características de un sistema financiero tendrán en cuenta, además:

- Si el colectivo es abierto (es posible la entrada y salida por diversos motivos) o cerrado (la entrada se produce al mismo tiempo y se permanece en el grupo hasta su salida por muerte o contingencia hasta su extinción)
- Obligatorio o no
- Horizonte temporal en el que se define.

Teniendo en cuenta lo anterior se va a hablar de sistemas:

1. De reparto
2. De reparto de capitales de cobertura
3. De capitalización

Sistemas de Reparto

Sistema de reparto puro de los gastos

Se dice que un sistema de previsión social se financia con sistema de reparto cuando se establece el equilibrio financiero para un periodo determinado, valorando cargas y recursos anuales. Nieto y Vegas (1993) lo definen como el modelo matemático de naturaleza estocástica que permite establecer la equivalencia financiero-actuarial entre primas (aportaciones) y prestaciones (reembolsos) de un colectivo en un horizonte temporal determinado.

Las prestaciones causadas no quedan garantizadas en el futuro y sólo se garantizan en tanto exista personas activas que realicen las aportaciones necesarias (transferencia intergeneracional)

Requiere colectivos de gran dimensión y abiertos (generalmente de asociación obligatoria lo cual favorece la gran dimensión) y la duración ilimitada (para que exista solidaridad intergeneracional).

Para conseguir cotizaciones niveladas es necesario admitir una serie de hipótesis.

- Renovación continua
- Grupo de activos creciente para que haya reemplazo

Sistema de reparto simple o ex -ante

Se estima el importe de los gastos del ejercicio que se inicia y en función de éstos se determinan las cuotas a ingresar durante ese periodo. Su principal ventaja es que puede reaccionar ante la depreciación monetaria ya que las prestaciones del año están en función de las cotizaciones. Debe ser de carácter obligatorio porque de otra manera el colectivo más joven podría no participar (requiere solidaridad intergeneracional).

Consiste en establecer la equivalencia entre las primas satisfechas en un año por todo el colectivo y las prestaciones de un año.

No garantiza a los pasivos, dependen de la retroalimentación. El colectivo ha de ser abierto y la duración ilimitada. No acumula recursos ni genera ahorro institucional. Es necesario que haya obligatoriedad en la afiliación (solidaridad impuesta). Es muy sensible a la evolución demográfica. Como ventaja se puede ver que se puede reaccionar en este sistema ante una depreciación monetaria.

Ecuación de equilibrio caso general

En el caso general que vamos a ver el número de individuos para una edad determinada y sus salarios varían con el paso del tiempo y la prima y las prestaciones se distribuyen de forma uniforme a lo largo del tiempo.

$$C_i = \frac{\sum_{h=1}^{i} \theta^h \;\; W_F^h \;\; l_{x+r}^h \;\; {}_{i-h}p_{x+r}}{\sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^i \;\; l_{x+k}^i}$$

θ^i porcentaje (tasa de sustitución) a aplicar sobre la base reguladora para calcular la pensiónde los que se jubilan durante el año i-ésimo
W_F^i salario medio de jubilación durante el año i-ésimo
x+r es la edad a la que se tiene derecho a la jubilación
l_{x+r}^i Número de individuos que alcanzan la jubilación en el año i-ésimo
l_{x+k}^i Número de individuos que en el año i-esimo tienen la edad x+k
${}_{i-h}p_{x+r}$ son las probabilidades de llegar con vida cada uno de los siguientes años, una vez jubilado

Para llegar a la anterior ecuación se ha partido de una estructura demográfico-financiera en un año cualquiera, de esta forma:

Edad	Nº de personas	Salario medio
x	l_x^h	W_x^h
x+1	l_{x+1}^h	W_{x+1}^h
x+2	l_{x+2}^h	W_{x+2}^h
…	…	…
x+r-1	l_{x+r-1}^h	W_{x+r-1}^h

Según van alcanzando la edad x+r se van jubilando

La **ecuación de equilibrio financiero** para un *caso particular* bajo las siguientes hipótesis:

- La estructura demográfica es estable en el tiempo: las tasas de fecundidad y mortalidad no sufren cambios y no ha fenómeno migratorio
- El peso relativo de cada grupo de edad x es, por tanto, estable, se mantiene constante (el tamaño relativo de las distintas cohortes no cambia a lo largo del tiempo).
- Colectivo abierto
- La pensión de jubilación es constante (se calcula como un porcentaje θ de la media de los salarios de los últimos años)

Edad	Nº de personas	Salario medio
x	l_x	W_x
x+1	l_{x+1}	W_{x+1}
x+2	l_{x+2}	W_{x+2}
…	…	…
x+r-1	l_{x+r-1}	W_{x+r-1}

$$c_i = \frac{\theta W_F l_{x+r}(1 + p_{x+r} + {}_2p_{x+r} + \cdots + {}_{i-1}p_{x+r})}{\sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k} \quad l_{x+k}}$$

De modo que $c_1 < c_2 < \cdots < c_i <..c_s$

A partir de un valor $i = \omega - x - r$ se cumple que la probabilidad de que un individuo de edad x+r alcance la edad ω es cero ya que ω es la edad límite del colectivo y no hay supervivientes a dicha edad.

Como la esperanza de vida se puede poner en función de la suma de probabilidades de superar cada uno de los años siguientes:

$$e_{x+r} = p_{x+r} + {}_2p_{x+r} + \cdots + {}_{i-1}p_{x+r}$$

$$c_i = \frac{\theta W_F l_{x+r}(1 + e_{x+r})}{\sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k} \quad l_{x+k}}$$

Al restringir la ecuación general se puede estudiar qué ocurre si se relaja la hipótesis de la pensión constante y el salario constante:

Salario $W_x(1 + \beta)$
Pensión $\theta W_F(1 + \alpha)$

Entonces se puede escribir

$$c'_i = \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \beta)} c_i = (1 + \gamma) c_i$$

$(1 + \gamma)$ representa la variación de la prima ante cambios en la pensión y en el salario. Su interpretación es obvia, si es mayor que 1 es porqueel incremento en pensiones es superior al incremento en salarios y si es menor que uno es porque ocurre el efecto contrario.

Si se relaja la hipótesis de que la estructura demográfica no es estable en el tiempo las consecuencias pueden provocar una prima excesivamente alta si el número de cotizantes va disminuyendo y por tanto no estén dispuestos a asumir dicha prima; se elimina por completo la solidaridad intergeneracional y se pierde confianza en el sistema. Esto puede ocurrir sobre todo en un colectivo cerrado que provoque regresividad demográfica.

Factores

Por último, se definen a continuación dos factores importantes

Factor económico o tasa de sustitución de ingresos del año i: Pensión media entre salario medio

$$TSI_i = \frac{\bar{P}}{\bar{S}}$$

Factor demográfico o tasa de dependencia

$$TD_i = \frac{N^{\underline{o}}\ Pasivos}{N^{\underline{o}}\ de\ activos}$$

Se puede expresar el tipo de cotización en función de los factores:

$$c_i = TSI_i\ TD_i$$

Generalmente en los sistemas contributivos se actúa sobre la base reguladora y años cotizados para establecer los importes de la pensión por ser este importe donde más directamente se puede actuar, no obstante, se pueden promover políticas de natalidad y de empleo sin embargo el efecto de éstas sobre el tipo requieren de un plazo mayor.

Características del Sistema de reparto simple:

1. No genera reservas: la prima pagada corresponde con la prima natura, los activos cubren a los pasivos.
2. Por lo anterior, existe una transferencia íntegra de recursos de activos a pasivos
3. El modelo en sí no garantiza pensiones futuras, que deben ser garantizadas por el Estado de bienestar.
4. Como se ha visto es muy sensible a modificaciones en la evolución demográfica y la regresividad demográfica puede hacer que el sistema sea inviable
5. Requiere de obligatoriedad en la afiliación
6. Las compañías privadas en España tienen prohibido el uso de este sistema por no poder garantizar las pensiones futuras (cosa que sí puede hacer el Estado).

Sistemas de reparto de cuota media escalonada y cuota media general

Cuando el horizonte temporal es superior al año se denomina reparto simple atenuado o cuota media escalonada. Es decir, la equivalencia anterior se hace no año a año sino por periodos más largos. Este sistema se debe a Zelenka y Thullen y busca el equilibrio en periodos de varios años siendo constante la prima durante los años que ocupan ese periodo. Esto hace que se generen ciertas reservas (llamadas fondos de nivelación de cuotas) ya que usualmente las prestaciones son crecientes (revalorización de las pensiones). En un momento del periodo las aportaciones y las prestaciones se igualan, a partir de dicho momento las prestaciones son superiores a las aportaciones y es cuando se aplican los fondos de nivelación anteriormente creados. En definitiva, al final del horizonte temporal dichas reservas se han anulado por completo.

Este sistema de reparto está a medio camino entre el reparto simple y el de capitales de cobertura (también de Thullen).

La prima debe seguir los principios siguientes:

- La variación entre periodos debe ser pequeña
- Su valor debe estar a medio cambio entre la que surge del sistema de reparto simple y el de capitales de cobertura (lo cual es lógico porque este sistema se sitúa a caballo entre estos otros dos, como se ha indicado)
- El cálculo de las reservas debe tener en cuenta la situación del mercado de capitales de forma que se pueda obtener una rentabilidad de las inversiones de los fondos de nivelación.

Las características más importantes son:

1. La pima es muy sensible a la evolución demográfica (no deja de ser un sistema de reparto)
2. No existe a priori garantía financiera para activos ni pasivos (igual que en el de reparto simple)
3. Existe transferencia intergeneracional de recursos (como en el reparto simple)
4. Debe ser obligatorio para que sea viable (igual que en el reparto simple)
5. En España no pueden optar por este sistema las compañías privadas por no poder garantizar el futuro de las prestaciones (igual que en el reparto simple)
6. Diferencia fundamental con el reparto simple: se crean reservas – fondo de nivelación- que como su propio nombre indica nivela la diferencia del valor de las prestaciones en los años que intervienen en el periodo y dado este fondo o reserva, debe hacerse una gestión financiera adecuada del mismo.

Partiendo de una estructura demográfica financiera como en el caso general visto en el punto anterior

Edad	Nº de personas	Salario medio
x	l_x^h	W_x^h
x+1	l_{x+1}^h	W_{x+1}^h
x+2	l_{x+2}^h	W_{x+2}^h
…	…	…
x+r-1	l_{x+r-1}^h	W_{x+r-1}^h

Primero se va a considerar un horizonte temporal de s años, en el momento en el que nace el sistema, en este caso las prestaciones van a ser similares a las vistas en el apartado anterior, pero al intervenir varios años, hay que realizar una equivalencia financiero actuarial y calcular el valor actual actuarial de estas prestaciones.

$$K(0) = K_1 v^{1/2} + K_2 v^{1+1/2} + \cdots + K_s v^{s-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$v^t = (1+i)^{-t}$$

$$K(0) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{j} \theta^h \quad W_F^h \; l_{x+r}^h \quad {}_{j-h}p_{x+r} \quad v^{j-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Las aportaciones serán:

$$P(0) = P_1 v^{1/2} + P_2 v^{1+1/2} + \cdots + P_s v^{s-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$P(0) = c_c^1 \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^j \quad l_{x+k}^j \quad v^{j-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

La equivalencia será, como siempre:

$$P(0) = K(0)$$

De donde se puede despejar c_c^1 ese porcentaje constante que se aplicará al salario cada uno de los s años que dura el horizonte de planificación.

Este sistema sí genera reservas, fondos de nivelación; el valor de las reservas es la diferencia entre lo que se recauda y se paga cada año más las reservas constituidas hasta ese año.

Segundo horizonte de planificación

Ahora se supone un horizonte de igual amplitud, pero con la condición de $2s < \omega - (x+r)$ La prima constante despejada de la ecuación de equivalencia queda como:

$$c_c^2 = \frac{\sum_{j=s+1}^{2s} \sum_{h=1}^{j} \theta^h \; W_F^h \quad l_{x+r}^h \; {}_{j-h}p_{x+r} \quad v^{j-s-\left(\frac{1}{2}\right)}}{\sum_{j=s+1}^{2s} \sum_{k=0}^{r-1} \; W_{x+k}^j \quad l_{x+k}^j \quad v^{j-s-\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

N-ésimo horizonte de planificación

En este horizonte se alcanzaría el número máximo de generaciones jubiladas:

$$ns = \omega - (x+r)$$

El sistema habría alcanzado la máxima madurez, a partir de ns se puede considerar que el número de generaciones jubiladas es constante y cada año se extingue por completo la jubilación incorporada ns años antes y es completamente sustituida por los que alcanzan la jubilación durante ese año.

$$c_c^n = \frac{\sum_{j=(n-1)s+1}^{ns} \sum_{h=1}^{j} \theta^h \; W_F^h \quad l_{x+r}^h \; {}_{j-h}p_{x+r} \quad v^{j-(n-1)s-\left(\frac{1}{2}\right)}}{\sum_{j=(n-1)s+1}^{ns} \sum_{k=0}^{r-1} \; W_{x+k}^j \quad l_{x+k}^j \quad v^{j-(n-1)s-\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

Sistema de reparto de capitales cobertura

Otra forma de sistema de reparto es la de capitales de cobertura, a caballo entre el sistema de reparto y el sistema de capitalización. En este sistema el equilibrio se establece entre las primas satisfechas por el colectivo en ese periodo (como en el reparto) y el valor actual actuarial (como en capitalización) de las prestaciones futuras que se han generado en ese mismo periodo de tiempo.

El sistema puede ser simple cuando se toma un año o atenuado cuando se toman periodos de equivalencia superiores al año.

Este sistema fue propuesto por Thullen y su interpretación es que en cierta forma con la prima única se compra una renta vitalicia. De nuevo hay transferencia intergeneracional, pero en este caso se ofrece cierta garantía financiera a los pasivos.

Las características principales son:

a) Las aportaciones o primas de un periodo no están relacionadas de forma directa con los pagos que se realiza por parte del sistema en ese mismo periodo
b) Las aportaciones del periodo garantizan actuarialmente las prestaciones causadas en ese periodo (únicamente las causadas en ese periodo, pero no las de un periodo anterior que ya deberían estar garantizadas)
c) Los activos no tienen garantizada su prestación, sus aportaciones únicamente garantizan las pensiones causadas
d) Por todo esto se requiere la afiliación obligatoria
e) Genera reservas anuales para pensiones causadas
f) En el caso de que el sistema sea atenuado, también genera fondo de reserva de nivelación
g) Es muy sensible a la evolución demográfica de los activos y el colectivo debe realimentarse (debe ser abierto)

Sistemas de reparto de aportación o de prestación definida

Otra clasificación que puede hacerse de los sistemas de reparto es en función de cómo se determinan los recursos que las generaciones en activo han de transferir a las generaciones pasivas, ya que el reparto, como se ha visto, tiene un contrato intergeneracional implícito que liga generaciones de cotizantes con generaciones de pasivos.

Prestación definida

La pensión que recibe el pasivo es un porcentaje constante de su salario cuando estaba activo de modo que el tipo de cotización es la variable dependiente y debe adaptarse a las necesidades recaudatorias del sistema. Los desequilibrios se asumirían por los activos (ya que incrementaría ese tipo de cotización).

En la práctica el tipo de cotización es fijo y los desequilibrios se asumen con transferencias del estado ya que las empresas y trabajadores no podrían estar en función de los cambios en el tipo de cotización.

Aportación definida

En este caso la tasa de cotización se fija previamente y la pensión para cada pasivo depende de los recursos disponibles, de modo que las desviaciones las asumen los pasivos. Este sistema podría generar mucha pobreza y desigualdad ya que los pasivos no pueden optar por otra fuente de ingresos que no sea su prestación.

Sistemas de capitalización individual y colectiva.

En los sistemas de capitalización la ecuación de equilibrio se produce entre el valor actual actuarial de las primas y el valor actual actuarial de las prestaciones.

En el sistema individual esta ecuación de equilibrio se hace individuo a individuo teniendo en cuenta sus características personales y abonando una prima ajustada a ese riesgo, mientras que en el sistema colectivo se aplica el principio de equivalencia a todo el colectivo de forma que todos los que lo integran pagan una prima común (que será más alta o más baja en función del colectivo tomado en su conjunto, si está envejecido, si hay una masa importante de gente joven, etc....).

La capitalización es una aportación de cuotas durante la vida activa del trabajador, de forma que estas cuotas se materializan en activos financieros hasta la jubilación o contingencia cubierta que se recibe lo aportado más los rendimientos que haya generado lo aportado (bajo la hipótesis de que los rendimientos han sido positivos, si bien se ha visto en las últimas décadas una evolución de varios años con tipos de interés negativos o nulos).

Este sistema no permite que se abonen pensiones desde el inicio del recorrido de este ya que es necesario que se genere un fondo de capital que cree los rendimientos suficientes para hacer frente a las prestaciones.

La capitalización es un sistema de aseguramiento, en este tema no se exponen fórmulas porque las formulaciones responden a las equivalencias actuariales que se exponen en todos los temas de seguros y rentas actuariales de este temario.

Sistema de capitalización individual – características principales

1. Las aportaciones del partícipe se consideran a título individual y los cálculos se realizan para cada individuo
2. Se puede considerar una mezcla entre una operación de constitución de capitales financieros y una operación de amortización a partir de la edad en la que se empieza a recibir la prestación. Por un lado, el individuo aporta de forma periódica una cuantía de dinero a recibir a partir de su jubilación en forma de renta; dicha renta corresponde a una amortización de cuantías de forma periódica hasta amortizar la totalidad del fondo. Si bien en este caso interviene el factor estocástico.
3. Dada la intervención del factor estocástico, la edad del partícipe es importante a la hora de acumular y posteriormente desacumular capital.
4. Las prestaciones futuras del partícipe quedan garantizadas por el sistema, si bien existe el riesgo de que no se hayan gestionado adecuadamente los fondos por parte del ente asegurador.

5. Se generan reservas
6. Es un sistema autosuficiente en el sentido que no requiere la incorporación de nuevos activos al colectivo (pero sí requiere de colectivos suficientemente grandes como para que opere la ley de los grandes números)
7. Es un sistema caro ya que si se desea garantizar una pensión alta como las que generan los sistemas de reparto se debe aportar un porcentaje muy importante de salario y comenzar la aportación desde edades muy tempranas.
8. No hay solidaridad intergeneracional al no existir la transferencia de recursos
9. No existe la obligatoriedad de la afiliación (pero de nuevo el asegurador debe tener una cartera suficientemente grande como para que opere la ley de los grandes números)

Sistema de capitalización colectiva– características principales

1. El cálculo de la prima se basa en una única ecuación; la prima es única para todo el colectivo, no se ajusta a los riesgos individuales.
2. En ocasiones se hacen clases más homogéneas con primas distintas para cada clase.
3. Los partícipes más jóvenes financian a los de más edad, de forma que sí existe una especie de solidaridad intergeneracional. Existe una edad crítica a partir de la cual, para una misma prestación la capitalización individual es superior a la colectiva (lo contrario ocurre antes de esa edad)
4. Dado el punto anterior, requiere de cierta obligatoriedad en la afiliación.
5. La reserva matemática es inferior en el sistema colectivo a la suma de las reservas matemáticas del sistema individual.
6. Existe menor riesgo de desvalorización de activos que en el sistema individual
7. La necesidad de obtener rendimientos es menor que en el sistema individual
8. La principal diferencia con los sistemas de reparto es que en capitalización la evolución demográfica no afecta a la garantía de las prestaciones futuras, si bien la modificación en la composición de las bases técnicas, y esto incluye la tabla demográfica, puede hacer que sea necesario reelaborar las primas para que se mantenga la equivalencia actuarial. Igual que si se modifica el tipo de interés técnico.
9. En el sistema colectivo el cálculo de la reserva para un cotizante concreto es más difícil, por ello es importante que se recoja en la póliza o reglamento. En ocasiones se suele utilizar el grado de capitalización en el momento t para determinar esta reserva individual. El grado de capitalización es el cociente entre las reservas matemáticas en t constituidas por el método colectivo de forma prospectiva entre el total de reservas en t calculadas por el sistema individual; Esto es, la reserva individual en el sistema colectivo consistiría en multiplicar el grado de capitalización por la que hubiera correspondido en el momento t en el sistema individual.

EJERCICIO 1
Financiero-Actuarial

TEMA 16: EL RIESGO. CONCEPTO Y ELEMENTOS. CLASES. PRESUPUESTOS TECNICOS DE ASEGURABILIDAD DE LOS RIESGOS: INDEPENDENCIA, INDIVIDUALIZACION, FRECUENCIA. ACUMULACION, HOMOGEINIDAD CUANTITATIVA Y CUALITATIVA, RIESGO OBJETIVO Y SUBJETIVO.

Edición Enero 2025

El Riesgo: Concepto y elementos

Concepto: El riesgo es la posibilidad de que por azar ocurra un hecho que produzca una necesidad patrimonial.

El riesgo junto con la prima y la indemnización son los tres pilares de la institución aseguradora. Algunos autores identifican al daño como otro de los elementos del riesgo.

Elementos:

1. Posibilidad (objetiva) e incertidumbre (subjetiva): Los sucesos son fenómenos aleatorios que deben ser posibles (existe una exposición al riesgo). Estos sucesos no ciertos se dan sobre cuándo se producirá (vida), sobre si se producirá (accidentes) y sobre el número de eventos que se producirán, así como su intensidad (cuantías).
2. Azar: El riesgo no responde a la voluntad de las partes
3. Necesidad patrimonial: La producción del riesgo produce una necesidad patrimonial. El seguro trata de cubrir ese daño (repara, resarce)

La gestión del riesgo permite a una organización aumentar las probabilidades de alcanzar sus objetivos y esto se aplica también a las instituciones de seguridad social. La gestión efectiva del riesgo exige los aportes y la participación de especialistas que comprendan la medición y el tratamiento del riesgo y el uso de metodologías e hipótesis apropiadas para analizar el riesgo. Las contribuciones actuariales son, por tanto, cada vez más importantes en esta área.

El proceso de gestión del riesgo se compone de tres elementos:

- la identificación del riesgo: riesgos del régimen y riesgos operativos
- la medición del riesgo: evalúa la frecuencia y gravedad de los riesgos identificados
- el tratamiento del riesgo, incluida la retención o transferencia: reaseguros.

Si bien todos ejercen repercusiones directas o indirectas para la institución, el análisis y el tratamiento del riesgo a menudo se dividen entre:

- los que afectan a la financiación y el diseño de las prestaciones (“riesgos del régimen”)
- los que ejercen efectos financieros directos en el régimen y los que afectan a la gestión de la institución de seguridad social (“riesgos operativos”)
- y los que ejercen efectos financieros más indirectos o difíciles de cuantificar.

Clases de riesgo

Según su naturaleza:

- Positivos: Cuando ocurre à muerte, incendio
- Negativos: cuando no ocurrenà Supervivencia

Según su causa:

- Naturales: force majure, act of god, daños catastróficos
- Humanos: robo, vandalismo, tumultos, negligencia, falta de diligencia, .
- Materiales: seguros sobre daños, todo riesgo, property...
- Jurídicos: Seguro de responsabilidad civil (liability)

Según el número de causas:

- De una sola causa
- De causas concatenadas

Según la procedencia:

- Hechos externos (rayos, granizo...)
- Hechos internos (avería maquinaria...)

Según el tiempo de realización:

- Instantáneo (incendio, granizo...)
- De desarrollo (por ejemplo, los que cubre la responsabilidad civil de un producto de farmacia)

Según los efectos:

- Ocurren una única vez
- Los daños son de repetición

Según la intensidad:

- Monogrados o constantes: como la muerte
- Variables o heterogrados: como la enfermedad o incapacidad

Según su regularidad estadística:

- Ordinarios o masa: daños por humedades en hogar
- Catastróficos o grandes siniestros

Según sus ramos:

- Daños materiales:
    - Transporte
    - Property
    - Patrimoniales
        - Pérdida de beneficios
        - Crédito y caución...
- Daños personales
    - Enfermedad
    - Accidentes
    - Asistencia sanitaria
    - Decesos
    - Vida: muerte y supervivencia.

Riesgos de Solvencia
Los más importantes en cuanto al seguro se refieren son:

1. El riesgo de tarificación: Es el riesgo de que con las primas cotizadas no se cubra el total de siniestralidad. Este es el riesgo principal y específico en cuanto a aseguramiento.
2. Riesgo de suscripción. Es el riesgo derivado de la suscripción de contratos de seguro, atendiendo a los siniestros cubiertos y los procesos seguidos en el ejercicio de la actividad.
    - Vida:
        - Riesgo de longevidad
        - Riesgo de mortalidad
        - Riesgo de invalidez
        - Riesgo de caída de cartera
        - Riesgo de gastos
        - Riesgo de revisión
        - Riesgo catastrófico/pandemia
    - No Vida
        - Riesgo de catástrofe
        - Riesgo de reserva
        - Riesgo de caída de cartera
        - Riesgo de pandemia (en salud)

Riesgos de Mercado

3. Riesgo de financiación tiene que ver con la posibilidad de que los recursos financieros sean insuficientes para cumplir con las obligaciones.

4. Riesgo de inversión. Este riesgo tiene que ver con todos los aspectos del proceso de inversión, entre ellos los riesgos específicos relacionados con los activos detenidos, un aumento de los ingresos y de la apreciación capital inferior a lo previsto, riesgo de equilibrio de las inversiones, el riesgo de terceros, el riesgo volatilidad y el riesgo de impago.

5. Riesgo de tipo de interés. En especial en el cálculo de los derechos de las prestaciones y la valoración de activos.

6. Riesgo cambiario. Este riesgo tiene que ver con una potencial incompatibilidad entre la divisa en la que se nominan los pasivos del sistema (por lo general la moneda nacional) y la divisa en la que se mantienen algunos activos del fondo de reserva.

7. Riesgo de Spread

8. Riesgo de concentración

9. Riesgos de contraparte o de crédito. Riesgo de impagos.

10. Riesgo de activos intangibles: Pérdida del valor de activos.

Otro tipo de riesgos son aquellos que pueden afectar a cualquier tipo de empresa

11. Riesgo de recursos humanos. Se trata del riesgo de perder personal competente, de no atraer a personal apropiado, de no contar con el personal suficiente para el volumen de actividad, de no disponer de una formación adecuada ni de un plan de sucesiones y del riesgo relacionado con el lugar de trabajo (por ejemplo, el estrés).

12. Riesgo de gobernanza. Se trata del riesgo relacionado con la mala gobernanza de la institución y puede resultar en ineficiencias en la ejecución de los procesos, cuestiones de reputación, falta de supervisión de los proveedores externos, conflictos de interés, etc. La gobernanza abarca diversos procesos y procedimientos, entre ellos la preparación de informes, los procesos de revisión por homólogos). las aptitudes y experiencia del personal, el cumplimiento de normas profesionales y la realización de cálculos correctos.

13. Riesgo reglamentario. Consiste en el incumplimiento de los requisitos legislativos relacionados con el sistema y pueden incluir la inversión en activos no autorizados, el incumplimiento de los objetivos mínimos de suministro de servicios o de suministro de la información necesaria a los beneficiarios y el incumplimiento de los requisitos legales de información. Varios de estos riesgos se relacionan con el régimen, aunque también forman parte de una evaluación más amplia del riesgo de gobernanza.

14. Riesgo de reputación. Este riesgo incluye eventos que generan repercusiones negativas en la reputación de la institución y pueden comprender el impago de las prestaciones, la demora en el pago de las prestaciones, la mala calidad del servicio, errores en el cálculo de las indemnizaciones, posibles conflictos de interés, etc. El riesgo de reputación puede ejercer importantes repercusiones financieras en la organización.

15. Riesgo operativo. Comprende los riesgos del funcionamiento cotidiano del sistema de seguridad social, por ejemplo, el riesgo relacionado con las TIC (como la prueba inadecuada de nuevos sistemas y programas informáticos), la recaudación de las cotizaciones, el mantenimiento de registros y la continuidad de las actividades. Este riesgo está directamente relacionado con los objetivos del régimen y los riesgos de financiación.

Presupuestos técnicos de la asegurabilidad de los riesgos: Independencia, individualización, frecuencia, acumulación, homogeneidad cuantitativa y cualitativa

Presupuestos
Para que un riesgo sea asegurable debe cumplir que (los tres primeros son los elementos vistos antes)

1. Sea posible pero incierto
2. Aleatorio, a causa del azar
3. Genere una necesidad patrimonial
4. Que amenace por igual a todos los elementos del colectivo
5. Que no puedan producirse cúmulos. Esto es algo que se conoce una vez acaecido el siniestro por lo que se debe reasegurar esta posibilidad
6. Que sea lícito
7. Que no produzca lucro al asegurado
8. Que sea susceptible de tratamiento estadístico:
    a. Colectivo amplio
    b. Experiencia estadística

Los **presupuestos técnicos** son:

1. La **frecuencia**: deben ser poco frecuentes
2. Deben ser **independientes**: la ocurrencia de un siniestro no depende de la ocurrencia de otro siniestro, por tanto, al asegurar un riesgo se debe valorar la posibilidad de que existan riesgos contiguos, próximos o distintos.
3. Deben ser **individualizables**:
    a. Del riesgo en concreto, en el sentido de cosa asegurada
    b. De los riesgos incluidos y excluidos: en el sentido de cobertura o posibilidad de ocurrencia del daño.
4. Deben ser **homogéneos**: Los riesgos asumidos por el asegurador han de ser de un mismo tipo o clase y lo más homogéneos posible respecto a una o más características dadas sobre Las que se basará el cálculo de probabilidades.
    a. **Cuantitativamente:** se manifiesta en el principio de división del riesgo por ramos de seguros y por clases dentro de un mismo ramo. Se conocen los riesgos que pueden producirse, pero no cuáles dado que están sujetos a la aleatoriedad, de modo que si se producen pocos y de pequeña cuantía se producirá un beneficio y contrariamente si se producen muchos y de gran cuantía se producirán pérdidas. En este rango de combinaciones es donde se hace el mercado del seguro. Por ello se deben establecer:
        i. Límites de responsabilidad, capas
        ii. Contratos de reaseguro
        iii. Contratos de coaseguro
        iv. franquicias
    b. **Cualitativamente:** se manifiesta en las normas del seguro por la selección de riesgos. Para conseguir mayor homogeneidad cualitativa se buscarán fórmulas de transferencia de riesgo mediante reaseguro o coaseguro.
        i. por la naturaleza del riesgo:
        ii. por la naturaleza del objeto asegurado
            1. Mismo ramo: como aproximación, ya que son clasificaciones jurídicas y comerciales.

        2. Objeto asegurado: hogar, autos, industria, etc…
    iii. Por la duración. Habrá de separar la valoración de seguros que tengan una duración anual respecto de otros que tengan duraciones distintas como un seguro vida entera o uno que cubre la accidentalidad para unos días de viaje, por ejemplo.
c. Homogeneidad de la cartera: En consecuencia, de lo anterior, de cara a la homogeneidad de la cartera se debe proceder con la selección y vigilancia de riesgos de modo que en base a ciertas condiciones se acepta o no la contratación de riesgos propuestos.
    i. Selección: Se fundamenta en el principio de homogeneidad de modo que sólo se seleccionan únicamente riesgos homogéneos, seleccionando éstos mediante cuestionarios, características, reconocimientos médicos, etc.
    ii. Vigilancia: El contrato de seguro es de tracto sucesivo de modo que debe realizarse la continua inspección de riesgos para comprobar en todo momento que no se han producido cambios que supongan heterogeneidad.
    iii. Riesgo moral y selección adversa:
        1. El riesgo moral es la asimetría en la información o en el comportamiento de un agente no observable por el principal (la forma de conducir es algo que no se puede valorar desde una compañía de seguro de automóvil).
        2. La selección adversa consiste en tomar como homogéneos riesgos que realmente no lo son porque hay ciertas características no observables y que incrementan la probabilidad de tener siniestros de forma no observable.
        3. La solución que se impone es mediante franquicias, periodos de carencia, sistemas bonus-malus, etc.

Riesgo objetivo y subjetivo

Riesgo objetivo:
Aquel cuya composición, características, circunstancias intrínsecas o extrínsecas y otros aspectos básicos aparecen descritos en la póliza o son susceptibles de ello, de modo que permiten a la entidad aseguradora tener una información suficiente y correcta del mismo.

Riesgo subjetivo:
Aquel que, al contrario del riesgo objetivo implica un conjunto de circunstancias relativas al asegurado (al sujeto) difícilmente objetivables, por lo que son de compleja valoración para el asegurador. Son ejemplos de riesgo subjetivo la moralidad del asegurado, su estado de salud, su situación económica, su conducta más o menos despreocupada, etc.

EJERCICIO 1
Financiero-Actuarial

TEMA 17: LOS ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA OPERACIÓN DE SEGURO: VALOR ASEGURADO. LAS VALORACIONES PREVIAS EN LOS SEGUROS DE DAÑOS A LAS COSAS. EL CAPITAL COMO LIMITE DE RESPONSABILIDAD. SEGURO A VALOR TOTAL. SEGURO A VALOR PARCIAL. SOBRESEGURO. INFRASEGURO Y REGLA PROPORCIONAL. SEGUROS A PRIMER RIESGO. SEGUROS A VALOR CONVENIDO. DESCUBIERTO OBLIGATORIO Y FRANQUICIA.

Edición Enero 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA OPERACIÓN DE SEGURO: VALOR ASEGURADO

Una operación de seguro es aquella por la que una entidad aseguradora se obliga, mediante el cobro de una prima, para el caso en que se produzca el evento de cuyo riesgo es objeto la cobertura del seguro, a indemnizar, dentro de los limites pactados, los daños producidos al asegurado o a satisfacer un capital, renta u otra prestación convenida.

Elementos objetivos
Son aquello en lo que consiste el contrato:
- Objeto o contenido del contrato: Es el riesgo asegurado
- Causa del mismo
- Finalidad: Es el mantenimiento del valor o interés del bien asegurado

Elementos materiales
Conforme a la definición de la operación del seguro los elementos materiales son:

El <u>riesgo</u>:

Esto es, la posibilidad de que se dé el hecho dañoso previsto en el contrato. Este es el elemento principal en el contrato del seguro sin el cual no existe la relación de seguro. Se identifica con el objeto del contrato e identifica al propio objeto de cada contrato en particular. Sus características son la futuridad y la incertidumbre

Lo que se asegura en una operación de seguro es el riesgo y no la indemnización.

El riesgo del seguro es fundamental en un contrato de seguro. Es la probabilidad de que, aleatoriamente, ocurra un evento o un hecho dañino que provoque una modificación en el patrimonio del asegurado.

En la terminología técnico-aseguradora en ocasiones el término riesgo se identifica con:
- El acontecimiento que produce los efectos dañosos (sobre el patrimonio, cosas o personas).
- Con el propio objeto asegurado
- Con referencia al siniestro
- Con referencia al tiempo de exposición
- Como sinónimo de peligro (probabilidad de ocurrencia del daño)
- Y en ocasiones se confunde con el valor de la suma asegurada.

La doctrina ha identificado el riesgo como el estado o situación, esto es, la definición indicada de la <u>posibilidad</u> de que por <u>azar</u> ocurra un hecho que produzca una <u>necesidad patrimonial.</u>

<u>Posibilidad:</u> Debe ser algo posible

<u>Azar</u>: Sujeto a la incertidumbre
- Objetiva: incierto el hecho
- Subjetiva: desconocimiento de los sujetos

El desconocimiento es sobre:

- Si ocurrirá
- Cuántos siniestros ocurrirán.
- Cuándo ocurrirán.
- Cuánto costarán.

Necesidad patrimonial; El seguro no previene el daño, lo repara en caso de producirse y está limitado a las sumas y condiciones contractuales.

Este riesgo debe tener una serie de características básicas:

- ✓ Debe ser futuro y posible.
- ✓ Fortuito, es decir, causal, que no esté previsto.
- ✓ Que sea concreto y lícito.
- ✓ Que sea incierto. No se conoce si va a ocurrir (como un incendio, por ejemplo) y, en caso de que vaya a ocurrir (el fallecimiento de una persona), no se conozca la fecha en que va a tener lugar.
- ✓ No puede depender de la voluntad de la persona asegurada.
- ✓ Que suponga una consecuencia económica desfavorable para el asegurado.

La prima:
Es el importe que la compañía aseguradora ha calculado para poder asumir la cobertura del riesgo establecido en el contrato (prima pura) más los gastos asociados a su gestión, comercialización, etc...

El interés asegurado:
El interés asegurado y con éste el daño en caso de que se produzca el riesgo, será lo que determine si ha lugar o no la indemnización. El interés asegurado es el interés que tiene el tomador en que el siniestro no se produzca y, si se produce, emplear todos los recursos a su alcance en aminorar sus consecuencias. En el caso de no existir interés asegurado, el seguro podría ser objeto de un enriquecimiento injusto.

La indemnización:
O compensación del daño y la merma económica asociada al daño que se ha producido. La indemnización no tiene por qué identificarse necesariamente con el daño y dependerá del tipo de seguro, la suma asegurada, la aplicación o no de la regla proporcional, si es o no a primer riesgo. En los casos de seguros sobre la vida, por ejemplo, nunca se corresponde el daño con la indemnización.

Elementos subjetivos
Los elementos personales (subjetivos) son: el asegurador, tomador, asegurado y beneficiario.

El asegurador es la persona que se obliga a indemnizar el daño producido al asegurado o a satisfacer un capital, una renta u otras prestaciones, cuando se produce el suceso de riesgo que es cubierto con el contrato, mediante el previo cobro de una prima.

El tomador es la persona física o jurídica que contrata un seguro con el asegurador y firma con él la póliza de contrato. Es decir, es la persona que queda obligada directamente con la entidad aseguradora, y a quien le corresponden las obligaciones que nazcan del contrato. También es el obligado al pago de la prima en la forma que se estipule en la póliza.

El asegurado es la persona que está expuesta a un riesgo determinado, y que está cubierto por una póliza (esta persona también puede ser física o jurídica). En los seguros personales, el asegurado es la persona expuesta al riesgo de la cobertura. Es decir, la que tiene derecho a la asistencia sanitaria en caso de enfermedad, por ejemplo, en un seguro de salud. Mientras que, en los seguros de daños, es aquella persona titular del interés asegurado, por ejemplo, el dueño de una casa en un seguro de hogar.

En determinados tipos de seguros, existe la figura del beneficiario, que sin ser una figura parte del contrato, sí que adquiere derechos derivados del propio contrato. Es la persona titular del derecho a la indemnización. La designación del beneficiario deberá hacerse en la póliza bien nombrándole expresamente o bien de forma genérica. Determinándolo de algún modo en el que no haya dudas, por ejemplo, por su relación familiar, como los hijos o el cónyuge.

Valor asegurado

Valor asegurado es el valor por el que se va a asegurar el interés, y sobre el que se va a establecer el capital o suma asegurada, por tanto, se debe tener en cuenta los siguientes conceptos:

El **valor del interés** es el valor que se atribuye a los bienes asegurados en una póliza de seguros; Este valor puede ser:

- Subjetivo :valor afectivo
- Objetivo: valor real del mercado
    - Valor real: la valoración puede realizarse en función de la satisfacción que se deriva del uso o disposición del bien (valor en uso, se define más abajo) o a valor de mercado (valor en cambio, valor a nuevo)
    - Valoración alzada: se usa cuando no se puede hacer una valoración real con la suficiente precisión por tanto se desliza al plano subjetivo.

El valor del interés puede ser, además:

- Constante: si no varía con el paso del tiempo
- Variable. Si el paso del tiempo puede producir variaciones, por depreciación o por inflación, por introducción de mejoras en el interés, etc.
    - Valor inicial: es el valor del interés en el momento de la celebración del contrato
    - Valor sucesivo: es el valor del bien que va adquiriendo a lo largo de la duración del contrato
    - Valor final: es el valor en el instante inmediatamente anterior al momento del siniestro
    - Valor residual: es aquel que tiene el objeto tras ocurrir el siniestro (también se denomina valor de salvamento)
    - Valor resarcible: diferencia entre el final menos el residual.

Definiciones:

- **Valor en uso** . Valor individual que para el asegurado ofrece el objeto del contrato y por tanto lo que deberá pagarse para que pudiera procurarse otro igual en el mismo estado de uso (depreciado) o bien, suma que ha de invertirse en reparar la cosa dañada.

- **Valor a nuevo**: es el valor de la cosa dañada a precio de venta de forma que se indemniza la depreciación. En ocasiones existen cláusulas en los contratos que determinan la indemnización a valor de nuevo (por ejemplo, en el primer año de aseguramiento de un vehículo nuevo).

- **Valor de la suma asegurada**: La suma asegurada es la que figura en la póliza y ésta se define como el límite de responsabilidad del asegurador. No debe confundirse con la suma que debe pagar el asegurador, ya que dependerá del valor del interés. Sí coincide en los casos de vida y valor a alzada.

LAS VALORACIONES PREVIAS EN LOS SEGUROS DE DAÑOS A LAS COSAS. EL CAPITAL COMO LIMITE DE RESPONSABILIDAD.

Los seguros de daños son seguros no vida y como tal, sus características son las siguientes:

- Son operaciones a corto plazo
- Las probabilidades de los sucesos no dependen de la edad (son no vida)
- La indemnización está en función de la cuantía del daño. Se pueden dar los supuestos de infraseguro y sobreseguro
- Las primas únicamente cubren el riesgo no llevan un componente de ahorro
- Los problemas de estabilidad son más complejos que en vida
- Es de gran importancia el entorno socioeconómico

Para su correcta valoración se realizan estudios actuariales sobre la distribución del número de siniestros y sobre la distribución de la cuantía de un siniestro.

Es sabido que las pólizas de seguros emitidas por las Compañías de Seguros se basan en la información aportada por el tomador del seguro o el asegurado en la Solicitud-Cuestionario del Seguro. La ley de Contrato de Seguro indica que es preceptivo declarar al Asegurador, de acuerdo con el cuestionario que éste le someta, todas las circunstancias por él conocidas que puedan influir en la valoración del riesgo, así como, durante el curso del contrato, comunicar al asegurador, tan pronto como le sea posible, todas las circunstancias que pudieran modificar la valoración del riesgo, para que posteriormente quede reflejado en la póliza, entre otras:

- El concepto en el cual se asegura.
- Naturaleza del riesgo cubierto.
- Designación de los objetos asegurados y de su situación.
- Suma asegurada o alcance de la cobertura.

En los seguros de daños se va a establecer siempre un valor del objeto asegurado porque sobre dicho valor se establece la suma asegurada. En los seguros de vida el valor se establece por convenio entre las partes, no siendo mesurable el valor de la vida.

En el momento de contratar una póliza de seguro la compañía debe conocer cuáles son sus verdaderos valores asegurables, intentando establecer los elementos que en ese momento son operativos y los que no lo son.

SOBRESEGURO E INFRASEGURO. LA REGLA PROPORCIONAL.

Sobreseguro
La Ley del Contrato del Seguros (Ley 50/1980) establece en el artículo 26 el concepto de sobreseguro, basado en el principio de que el seguro nunca puede causar un enriquecimiento.

Suma asegurada>Valor del interés => Indemnización= Daño
En este caso se repondrán las primas pagadas de más.

Infraseguro y regla proporcional

La Ley del Contrato del Seguros (Ley 50/1980) establece en los artículos 29 y 30 el concepto de Infraseguro

"Si en el momento de la producción del siniestro la suma asegurada es inferior al valor del interés, el asegurador indemnizará el daño causado en la misma proporción en la que aquélla cubre el interés asegurado"

Esta es la llamada "regla proporcional" porque la indemnización de los daños, cubiertos por la póliza, se efectuará en la misma "proporción" entre la suma asegurada que figura en la póliza en el momento del siniestro y la que debía haber figurado conforme a la correcta valoración de los bienes asegurados.

Suma asegurada < Valor del interés => Indemnización= x% daño

X es el resultado de aplicar la regla proporcional.
De común acuerdo entre las partes se puede excluir la aplicación de la misma.

SEGURO A VALOR TOTAL. SEGURO A VALOR PARCIAL.

Seguro a valor total

El aseguramiento a **valor total** es la modalidad por la que la suma asegurada o capital contratada en la póliza de seguro debe ser igual al valor de reposición del interés o bien asegurado. En esta forma de aseguramiento se puede aplicar la regla proporcional en caso de insuficiencia del capital.

Suma asegurada= valor del interés => Indemnización = Daño (si siniestro total entonces se indemniza con la suma asegurada)

Seguro a Valor parcial

Esta es una forma de aseguramiento en la que el asegurado informa a la compañía del valor total de los bienes, pero asegura solo un porcentaje de estos ya que entiende que la probabilidad que ocurra la pérdida total de los objetos asegurados en caso de siniestro es muy baja.

Suma asegurada= % Valor del interés => Indemnización=% Daño (Si se da siniestro total se indemniza con la suma asegurada)

SEGUROS A PRIMER RIESGO Y A VALOR CONVENIDO

La forma de aseguramiento a primer riesgo es aquella a través de la que se asegura un importe determinado hasta el que queda garantizado el riego, pero (a diferencia del valor parcial) es independiente del valor total que realmente tengan los bienes que estamos asegurado. Por lo tanto, en este caso no se aplica la regla proporcional.

El termino valor convenido es sinónimo de valor estimado y es aquel valor que se pacta entre las partes de mutuo acuerdo.

DESCUBIERTO OBLIGATORIO Y FRANQUICIA.

El descubierto obligatorio y la franquicia forman parte de la prevención del riesgo moral y la selección adversa

La franquicia
Es una porción del riesgo no cubierta que debe soportar el asegurado. Esto obedece a dos motivos principales: en primer lugar, se busca excluir de la cobertura a los daños de mínima importancia cuyo monto no justifica el desgaste administrativo que produce su verificación y liquidación; en segundo término, al cargar sobre el asegurado una porción del riesgo, se procura una mayor diligencia y un mayor interés en precaver el siniestro.

La franquicia puede establecerse fijando una suma mínima que el daño debe superar para ingresar en el ámbito de la cobertura, o un porcentaje del valor del darlo que debe soportar el asegurado. Es común también encontrar en las pólizas ambas modalidades combinadas.

La franquicia es «condicional» cuando el daño debe superar el monto indicado en la póliza como condición para que el asegurador lo indemnice en su totalidad; es «incondicional» cuando, aunque el daño supere la suma establecida, el valor de la Franquicia o el porcentaje estipulado están siempre incondicionalmente a cargo del asegurado. Por eso, como se deja a cargo de éste «el primer tramo indemnizatorio», los seguros contratados con esta modalidad se denominan «a segundo riesgo».

Descubierto obligatorio
Es un porcentaje de la suma asegurada o una cantidad fija a cargo del asegurado de forma obligatoria de modo que:

- No se puede asegurar dicho porcentaje o cuantía

- El asegurador entra en el siniestro si se supera esa parte por la cantidad o porcentaje superado

Esta figura, es generalmente confundida con la franquicia incondicional ya que, como aquella, consiste en una suma fija o en un porcentaje del daño que siempre “incondicionalmente», está a cargo del asegurado. Pero se diferencia de ella en que su finalidad es eminentemente moralizadora: procurar una conducta decorosa y alejada del riesgo en el asegurado. Por tanto, éste no puede cubrir el importe del descubierto con otro seguro. En la franquicia, en cambio no hay inconveniente alguno para su aseguramiento,

La cláusula de descubierto obligatorio se caracteriza esencialmente por el hecho de que el asegurado debe, en caso de siniestro, soportar necesariamente una parte del daño y la prohibición de cubrirlo mediante la celebración de un contrato de seguro

EJERCICIO 1
Financiero- Actuarial

TEMA 18: PRIMAS: CONCEPTO Y CLASIFICACION. PRINCIPIOS DE EQUIVALENCIA ACTUARIAL. PRIMAS UNICAS ANUALES: CONSTANTES Y VARIABLES

Edición Enero 2025

PRIMAS: CONCEPTO Y CLASIFICACION

La prima es un precio por la cobertura de un seguro.
El seguro es un servicio ofrecido por un ente asegurador por el cual se compromete a pagar una cantidad, en forma de capital o de renta, a otra unidad o ente en el caso de producirse una contingencia que se ha convenido previamente en una póliza, a cambio de un precio que se establece por la cobertura del riesgo de que se produzca dicha contingencia. A dicho precio se le denomina prima y ésta estará en función del riesgo asegurable y de los demás factores que integran el coste de la empresa.

La prima es el precio a pagar por el coste de la cobertura del riesgo que asume más sus gastos, margen de beneficio o excedente.

La prima por tanto ha de servir para hacer frete tanto a los costes que se derivan de las prestaciones previstas en la póliza como a los gastos que corresponden a la gestión, distribución y captación de clientes, mantenimiento y beneficio del negocio.

Se observa pues dos partes diferenciadas, una parte de la prima que va a cubrir la cobertura del riesgo asumido, a dicha parte se le denomina PRIMA PURA, esto es, la prima pura es la que cubre el riesgo y atiende únicamente a esta cobertura y la rentabilidad teórica de los activos (provisiones técnicas).

Existen dos tipos de primas en función de su **periodicidad o frecuencia de vencimiento**:

- <u>Prima única</u>: El asegurado paga una única vez y llegado el momento, si se da el caso supuesto en el contrato, se efectúa por parte de la aseguradora la prestación correspondiente.
- <u>Prima periódica:</u> Se satisface de forma escalonada e implica pagos periódicos (anuales o de otra periodicidad). Es resultado de distribuir el precio del seguro en varios vencimientos
  Esta a su vez puede ser:
    - i. Anual: de periodo coincidente con el año
    - ii. Inferior al año
        1. fraccionaria: los periodos de riesgo se fraccionan dentro del año. La prima natural es para el periodo y tienen poder liberatorio.
        2. Se permite el pago de la prima anual en fracciones mediante un recargo o corrección por intereses de aplazamiento. No son liberatorias.
    - iii. Periodos superiores al año. Prima bienal, prima quinquenal, etc.

Dentro de las primas periódicas, se pueden clasificar además en:

En función de su **actualización**

- <u>Prima natural:</u> cubre el riesgo dentro de cada uno de los sucesivos periodos. Esto supone que durante los primeros años es muy baja y se incrementa con el tiempo. Se suele usar en seguros de tipo anual renovable.
- <u>Prima nivelada:</u> la ley de evolución de la prima no coincide con la ley de evolución del riesgo. Se usa en seguros individuales de modo que, si bien los primeros años

se paga algo más de lo que correspondería al riesgo, el precio se mantiene más o menos constante (o con un crecimiento más leve que la prima natural).

Según su variabilidad:

- Prima constante: si no varía a lo largo del tiempo
- Prima variable: si su cuantía se ve modificada en el tiempo de acuerdo a lo estipulado en la póliza. Los más frecuentes son:
  - Crecimiento aritmético razón h:
  $$P(t) = P(0)[1 + th]$$
  - Crecimiento geométrico razón q
  $$P(t) = P(0)[1 + q]^t$$

Además, se pueden encontrar otra clasificación según la forma de reparto en grupos de asegurados:

- Prima fija: Las sociedades a prima fija tienen por objeto la cobertura de sus socios asegurados por los riesgos garantizados mediante el cobro de una prima pagadera al inicio del periodo de riesgo y que libera a estos de mayores obligaciones de pago salvo en el caso excepcional de derramas pasivas en mutuas y cooperativas de seguros
- Prima variable: Las mutuas y cooperativas a prima variables están fundadas sobre el principio de ayuda recíproca. Los riesgos asegurados se cubren con derramas posteriores a los siniestros y la prima se calcula a posteriori en función de los siniestros que hayan acaecido.

Además, la prima debe cubrir diferentes costes derivados de su gestión. La clasificación de la prima según costes es:

- Prima pura: o prima neta, cubre el coste de la prestación garantizada. Su cálculo se realiza estableciendo el equilibrio o equivalencia, en términos medios esperados y para la duración de las coberturas contratadas.
- Prima de recargo: es la prima pura incrementada en el recargo de seguridad. El recargo de seguridad absorbe las posibles desviaciones desfavorables de la siniestralidad respecto de su valor medio esperado. Se basa en la teoría del riesgo usando los modelos de la probabilidad de ruina.
- Prima comercial o de tarifa. Esta prima comprende todos los gastos de seguridad y gestión que conlleva el seguro.

PRINCIPIOS DE EQUIVALENCIA ACTUARIAL

Al calcula la prima hay que establecer algún principio de equivalencia entre las obligaciones de las partes, esto es, entre la prestación y la contraprestación. Uno de los principios es el de equivalencia actuarial (no es el único, existen otros como el de utilidad nula que no se aborda en este tema).

Este principio se aplica en seguros de vida y en aquellos no vida que tienen una duración mayor al año ya que se basa en la intervención del tiempo en la operación y, por tanto:

- El principio de subestimación de capitales futuros: aspecto financiero

- Probabilidades de ocurrencia o no de ciertos acontecimientos que son los que se aseguran: aspecto aleatorio o estocástico.

Con carácter general, el cálculo de la prima pura se realiza estableciendo el equilibrio o equivalencia, en términos medios esperados y para la duración de las coberturas contratadas, entre siniestralidad y las primas.

$$\text{E[Valor financiero actual de las prestaciones} \\ \text{- Valor actual de la primas netas]} = 0$$

Si se define la variable L como variable resultado:

Là Resultado
L<0 Beneficios
L<0 Ganancias

L es una función de la variable T_x: vida residual o tiempo de vida hasta la muerte de un individuo de edad x, la equivalencia actuarial establece que:

$$VAA_{prestacion} = VAA_{contraprestación}$$

De forma que E(L)=0, como se ha indicado antes.

La cuantía de las primas ha de ser tal que igual el valor actual actuarial de éstas con el valor actual actuarial de las prestaciones.

Este método, modelo o sistema de cálculo de prima se denomina “principio de equivalencia actuarial” y es el habitualmente aplicado en la práctica. En los seguros de vida, al ser su duración larga, el tanto de valoración se realiza con el tipo de interés técnico.

El principio de equivalencia actuarial se puede aplicar de manera individual o colectiva. Su aplicación individual implica que la prima estará en función de características o factores de riesgo de cada individuo. Como no se da el principio de homogeneidad de los asegurados prevalece el principio de equidad. Sin embargo, la aplicación a colectivos implica homogeneidad, por lo que todos pagaran la misma prima pura.

Existen otros métodos o sistemas de cálculo de primas, como el “principio de utilidad nula”, en el cual no se establece el equilibrio entre siniestro y prima, sino en función de la utilidad que suponen dichas magnitudes para el asegurado. Se basa en la teoría de la utilidad.

Equivalencia en el caso de seguros No Vida
En No vida los contratos suelen ser anuales renovables y por tanto no interviene el tiempo. Por otro lado, lo que modela es la probabilidad de que ocurra un siniestro y dada la realización, el número de repeticiones (número de siniestros esperados) y la cuantía de los mismos (cuantía esperada). Por tanto, la equivalencia entre la siniestralidad total (número de siniestros por sus cuantías) y la prima (lo que debe pagarse por la cobertura de dicho riesgo) se establece como:

- Sea S la siniestralidad total
- Sea N el número de siniestros

- Sea X la cuantía de los siniestros
- Sea P la prima pura

$$P = E(S)$$
$$E(S) = E(N) \cdot E(X)$$

PRIMAS UNICAS.

PRIMA ÚNICA
La prima única es aquella pagada una única vez en el momento de formalizarse el contrato.

Sea Z: valor actual de una modalidad de seguro o de renta

➔ Z depende de T_x: vida residual o tiempo de vida hasta la muerte de un individuo de edad x (o en su forma discreta de K_x: número de años enteros cumplidos de un individuo de edad x antes de morir.

Sea π la prima única

$$L = Z - \pi => E(L) = E(Z - \pi) = E(Z) - E(\pi) = 0 =>$$
$$E(Z) = \pi$$

Por tanto, los valores actuales actuariales de las rentas y seguros vida coinciden con el concepto de prima pura única; dicho de otra manera, la prima única pura coincide con la esperanza matemática del valor actual de las coberturas contratadas.

*En los **seguros no vida**, la prima anual es también una prima única, aunque se pague anualmente, ya que la cobertura que ofrece es el riesgo durante ese año.*

Centrados en los **seguros de vida**, la prestación (indemnización) se realizará en forma de entrega de un capital por parte del asegurador al beneficiario del contrato siempre que se haya pagado una prima y se haya producido el hecho objeto del seguro (fallecimiento o supervivencia).

Al ser una prima y por el principio de equivalencia actuarial, es igual al valor actual actuarial de la contraprestación;

Los seguros sobre la vida se clasifican en tres:

- En caso de vida. Se divide en:
  1. Seguro de renta vitalicia
  2. Seguro de capital diferido
- En caso de fallecimiento. Se dividen en:
  1. Seguro de muerte a vida entera
  2. Seguro temporal de muerte
  3. Seguro diferido de muerte
  4. Seguro diferido y temporal de muerte
- Mixto

Algunos ejemplos son (con capital unitario)

Seguro de capital diferido para caso de vida:

$$_nE_x = v^n \,_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

La prima única será:

$$\pi_x = {}_nE_x$$

Seguro de vida entera:

Sea (hipótesis de fallecimientos a mitad de año)
$Z = f(K_x) = C \cdot v^{\frac{1}{2}+K_x} = v^{\frac{1}{2}+K_x}$ siendo C=1, capital unitario.

$K_x = 0, 1, 2, \dots, \omega - x - 1$: Nº de años cumplidos antes de morir

$P\left(Z = v^{k+1}\right) = {}_{k/}q_x$

Y sea $L = Z - \pi = v^{\frac{1}{2}+K_x} - \pi_x$

$$E(L) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{\frac{1}{2}+K_x} \,_{k/}q_x - \pi_x = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{\frac{1}{2}+K_x} \,_{k/}q_x = \pi_x$$

Siendo A_x el seguro de vida entera para la edad x

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{\frac{1}{2}+K_x} \,_{k/}q_x = A_x$$

La prima única será:

$$\pi_x = A_x$$

Si el tipo de interés técnico es fijo se puede poner con símbolos de conmutación:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

El valor del capital C multiplica a A_x pudiendo usar cualquier valor para el capital.

Modificando los intervalos del sumatorio se pueden obtener el seguro temporal, el diferido y el mixto, que con símbolos de conmutación quedarían como:

Es muy importante la relación entre el seguro de vida entera, el seguro temporal y el seguro diferido. El valor actual actuarial de un seguro de vida entera diferido n años para una cabeza de edad x es igual a la diferencia de los valores actuales actuariales de un seguro de vida entera a la edad x y un seguro temporal n años para una cabeza de edad x

$$A_x = A'_{x:n} + {}_{n/}A_x$$

PRIMAS ANUALES: CONSTANTES Y VARIABLES

Primas anuales constantes

Las primas anuales constantes son primas en las que se hace un único pago al principio de cada año (o teóricamente un pago de forma uniforme y continuo a lo largo del año si suponemos una prima continua). Las primas se pagan mientras vive el asegurado.

No se debe confundir con las primas anuales temporales renovables típicas de los seguros no vida, ya que en éstos el riesgo se valora cada año y no depende de la supervivencia o no del asegurado.

En los seguros de vida se va a pagar una prima anualmente que cubre una indemnización a la muerte o supervivencia del asegurado (o en un periodo temporal si sigue vivo, dependiendo el producto) en un momento previamente pactado y el riesgo se valora en el momento del contrato.

Supóngase un seguro vida entera como el que se ha visto en el ejemplo anterior al exponer la prima única de vida entera. En aquel caso se tenía que la prima única coincidía con el valor actual actuarial del riesgo cubierto (Ax). Supóngase ahora que la prima π se paga anualmente al principio de cada año, por lo que se va a representar como P_x la prima anual constante.

Ahora L será:

$$L = v^{K_x+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}}$$

Para valores $K_x = 0,1,2,\ldots$

Con

$$P\left(L = v^{k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) = {}_{k/}q_x$$

Como antes, se busca el valor esperado de L

$$E(L) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left(v^{k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right) {}_{k/}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x - P_x \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\ {}_{k/}q_x = 0$$

Sabiendo que:

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x = A_x$$

Y

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\ {}_{k/}q_x = \ddot{a}_x$$

Luego

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Esto es, el valor actual actuarial de las primas pagadas (en este caso una renta constante, prepagable e ilimitada) iguala el valor actual actuarial de la prestación del asegurado.

En el caso de que las primas se paguen mientras viva el asegurado, pero como máximo hasta una edad (por ejemplo, hasta la jubilación, supóngase hasta la edad x+n)

$${}_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}}$$

A partir de aquí se pueden suponer todo tipo de variaciones y sobre éstas, se ajustarán las formulaciones anteriores. Si la prima es mientras viva el asegurado, pero se empieza a pagar a partir de n periodos desde la edad x, la renta del denominador será una renta diferida. Si las primas anuales se pagan al final del año, la renta del denominador será pospagable, etc. En el numerador se pondrá el tipo de seguro (los tipos de seguros se ven en el tema correspondiente, aquí se han indicado algunos únicamente como ejemplo).

***Todos los casos expuestos son con primas discretas, pudiendo pasar a continuas pasando los sumatorios a integrales o incluso al caso semicontinuo.*

Primas anuales variables

Hasta aquí se ha considerado que las primas anuales tienen siempre el mismo valor, sin embargo, se pueden dar contratos en los que las primas sean variables en progresión aritmética o geométrica. Además, se puede considerar que la indemnización también se incrementa anualmente con otra progresión aritmética o geométrica.

Se va a ejemplificar con un caso general en el que hay una indemnización en caso de fallecimiento y sean

$$C = \{C_1, C_2, \dots, C_{\omega-x}\}$$

Los capitales que recibe la cabeza en caso de fallecimiento.
Sea el conjunto

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_{\omega-x-1}\}$$

las primas a pagar cada año.
El valor de L será:

$$L = C_{K_x} v^{K_x+1} - \sum_{t=0}^{n-1} P\ v^t$$

Y, por tanto, si se supone que:

- Si las primas crecen en progresión geométrica de razón q

$$P_x = \frac{C_{K_x} v^{K_x+1}}{{}^{q}\ddot{a}_x}$$

- Si las primas crecen en progresión aritmética cuya diferencia a se establece en un porcentaje de la prima θ

$$P_x = \frac{C_{K_x} v^{K_x+1}}{\ddot{a}_x + \theta \ {}_{1/}(I\ddot{a})_x}$$

EJERCICIO 1
Financiero -Actuarial

TEMA 19. RESERVA MATEMATICA. RESERVA MATEMATICA A PRIMA PURA: DEFINICION, ECUACION RECURRENTE DE LAS RESERVAS. RECARGO DE SEGURIDAD Y RECARGOS ECONOMICOS

Edición Enero 2025

RESERVA MATEMATICA

La reserva matemática es una herramienta técnica para valorar la posición del asegurador en cualquier momento del tiempo. Las reservas técnicas se deben reflejar en el balance de las compañías de seguros y reaseguros en el pasivo y servirán para atender a las contingencias derivadas de los contratos de seguros que emitan, así como de desviación en la siniestralidad.

El principio de equivalencia actuarial consiste en igualar el valor actual medio esperado de los compromisos futuros que la entidad aseguradora asume con la póliza y el valor actuarial de las futuras obligaciones. Sin embargo, este equilibrio inicial no existe posteriormente y a la diferencia se denomina reserva matemática.

Así , la reserva matemática en el momento t, (V(t) se define como:

V(t) = valor actual actuarial de las prestaciones futuras – valor actual actuarial de las primas futuras

Generalmente en las operaciones de seguros de vida se supone que las Reservas matemáticas a primas netas son no negativas por lo que al asegurado le interesara mantener la operación. Esto implica que el valor esperado de las prestaciones futuras será siempre mayor que el valor esperado de las primas futuras y, por tanto, el asegurador siempre deberá disponer en su pasivo de los fondos necesarios, o lo que es lo mismo, de las reservas matemáticas V(t)= para cubrir tal diferencia.

${}_tV_x$ = se denomina valor actuarial de las reservas matemáticas en el **momento t** para el seguro de vida completo. Si la reserva en el momento t+1 esta en función de las reservas en el momento anterior t, la reserva se llama recurrente o de Fouret.

Considerando el tipo de prima, prima pura, de inventario, comercial o de tarifa, así existen las reservas. Una reserva tiene especial atención la reserva Zillmer basada en la prima Zillmer. Como la matemática actuarial se basa en la matemática financiera, las reservas pueden ser calculadas de manera prospectivas, retrospectivas o recurrentes.

RESERVA MATEMATICA A PRIMA PURA: DEFINICION, ECUACION RECURRENTE DE LAS RESERVAS. RECARGO DE SEGURIDAD Y RECARGOS ECONOMICOS

Por ejemplo, en un seguro de vida entera: después de t años el valor actuarial de las prestaciones por parte del asegurador vendría dado por Ax+t y el valor actuarial de las primas netas futuras será:

$$p_x \ \ddot{a}_{x+t}:$$

de donde el valor actuarial de las reservas matemáticas será:

$$A_{x+t} - p_x \ \ddot{a}_{x+t} = \ {}_tV_x \ , \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Donde .

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Si el seguro a prima de inventario,

$$p'_x \ \ddot{a}_x = A_x + g \ \ddot{a}_x$$

la reserva será:

$${}_tV'_x = A_{x+t} + g \ \ddot{a}_x - P'_x \ \ddot{a}_{x+t}$$

= reserva a prima pura + reserva para gastos de administración.

A continuación, se muestran algunas reservas en función del tipo de seguro:

- **Seguro temporal**

Prima Neta

$$p_{x:\overline{n}|}^{\ 1} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}$$

Reserva Matemática

$$\begin{aligned} {}_tV_{x:\overline{n}|}^{\ 1} &= A_{x-t:\overline{n-t}|}^{\ 1} - p_{x:\overline{n}|}^{\ 1} \ \ddot{a}_{x-t:\overline{n-t}|} \\ &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} - p_{x:\overline{n}|}^{\ 1} \ (N_{x+t} - N_{x+n})}{D_{x+t}} \end{aligned}$$

Con:

$$
\begin{aligned}
p_{x:\overline{n}|}^{\;1} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}
\end{aligned}
$$

- **Seguro Mixto**

Prima Neta

$$
p_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}
$$

Reserva Matemática

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x:\overline{n}|} &= A_{x+t:\overline{n-t}|} - p_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\, \xi_{x:\overline{n}|}^{\;1} \\
&= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n} - P_{x:\overline{n}|}\,(N_{x+t} - N_{x+n})}{D_{x+t}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}
\end{aligned}
$$

- **Seguro que paga al momento de f/q**

Prima Neta

$$p\ (\bar{A}_x)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_x$$

Reserva Matemática

$$\begin{aligned}
{}_tV\ (\bar{A}_x) &= A_{x+t} - p\ (\bar{A}_x)\ \ddot{a}_{x+t} \\
&= \frac{\bar{M}_{x+t} + p\ (\bar{A}_x)\ N_{x+t}}{D_{x+t}} \\
p\ (\bar{A}_x) &= \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{\bar{M}_x}{N_x - N_{x+n}}
\end{aligned}$$

- **Caso de la renta diferida**

Prima Neta

$$p\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n/}\ddot{a}_x$$

Reserva Matemática

$$\begin{aligned}
{}_t^nV\ (\ {}_{n/}\ddot{a}_x) &= {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t} - p\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\
&= \frac{N_{x+n} - P\ (N_{x+t} - N_{x+n})}{D_{x+t}}\ , \quad \forall\ t < n
\end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{x+t} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}\ ; \quad \forall\ t \geq n$$

Bibliografía:

MATEMATICA ACTUARIAL (Ed: Fundación Mapfre Estudios)
Autores: Ubaldo Nieto de Alba
Jesús Vegas Asensio

MATEMATICA DE LOS SEGUROS DE VIDA (Ed: Pirámide)
Rafael Moreno Ortiz
Olga Gómez Perez-Cacho
Eduardo Trigo Martinez

EJERCICIO 1

Financiero- Actuarial

Tema 20. Planes y fondos de pensiones y otros instrumentos de los sistemas complementarios de previsión social. Contratos de seguros colectivos y Mutualidades de previsión social.

Edición Enero 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

20.1 Sistemas complementarios de previsión social.

La previsión social complementaria es un fenómeno económico reciente, ligado al desarrollo de los sistemas públicos de pensiones que, como su propio nombre indica, complementa las carencias de estos últimos y conjuntamente tratan de cubrir las necesidades económicas que tienen los individuos al alcanzar su edad de retiro del mercado de trabajo por jubilación, por desempleo, por incapacidad laboral o por fallecimiento prematuro.

Aunque los orígenes de la previsión social son muy antiguos, la creación de sistemas públicos de pensiones no se produce hasta finales del siglo XIX, cuando la revolución industrial da paso a una nueva clase social de asalariados que crecen en dimensión y reivindicaciones.

La previsión social complementaria ha aparecido con posterioridad a la generalización de los sistemas públicos de pensiones y su nivel de desarrollo ha sido inversamente proporcional, dentro de cada país, al alcance de su sistema público.

Existe un razonamiento muy aceptado que dice que la previsión social ha de basarse en **tres pilares**:

- Un primer pilar básico y asistencial:

  financiado directamente por el Estado a través de sus presupuestos generales de modo que alcance a toda la población.

- Un segundo pilar:

  público y obligatorio, sólo para los trabajadores, financiado por contribuciones de los propios trabajadores y de sus empresas.

- Un tercer pilar:

  privado y voluntario, complementario a los dos anteriores, financiado individualmente por los ciudadanos.

El primer pilar, básico y asistencial y el segundo pilar, su sistema de financiación, siempre se financia por reparto y el tercero, privado y voluntario, por capitalización.

El alcance de este primer y segundo pilar públicos y obligatorios es lo que ha condicionado, históricamente, el desarrollo de la previsión social complementaria.

Los instrumentos de previsión social complementaria estudiados en este tema son los Planes y fondos de pensiones, los seguros colectivos y las mutualidades de previsión social.

Para el desarrollo de estos sistemas de previsión social complementaria se establece un marco legal-fiscal que sea adecuado y ventajoso para los sujetos que participen.

Esto puede verse justificado porque:

- Potencia la previsión para el ahorro, protegiendo así a los ciudadanos.
- Reduce el gasto del estado en el periodo pasivo del individuo.
- Recompensa el ahorro pasivo frente al consumismo.
- Incrementa la tasa de ahorro a largo plazo

20.2 Planes y fondos de pensiones

Los planes de pensiones son una institución contractual voluntaria no sustitutiva de la Seguridad Social, que organiza un programa de ahorro para la provisión de prestaciones económicas en favor de determinados colectivos según las condiciones del acuerdo y actúa como un instrumento de previsión privada para las contingencias de jubilación , supervivencia, viudedad, orfandad o invalidez.

Los planes de pensiones quedan regulados en el Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones.

Según su artículo 1:

1. **Los planes de pensiones** definen el derecho de las personas a cuyo favor se constituyen a percibir rentas o capitales por jubilación, supervivencia, viudedad, orfandad o invalidez, las obligaciones de contribución a los mismos y, en la medida permitida por la presente Ley, las reglas de constitución y funcionamiento del patrimonio que al cumplimiento de los derechos que reconoce ha de afectarse.

2. Constituidos voluntariamente, sus prestaciones no serán, en ningún caso, sustitutivas de las preceptivas en el régimen correspondiente de la Seguridad Social, teniendo, en consecuencia, carácter privado y complementario o no de aquéllas.

Según su artículo 2:

Los fondos de pensiones son patrimonios creados al exclusivo objeto de dar cumplimiento a planes de pensiones, cuya gestión, custodia y control se realizarán de acuerdo con la presente Ley.

También podrán crearse fondos de pensiones abiertos con el objeto de canalizar las inversiones de otros fondos de pensiones.

Según los sujetos que constituyen el plan de pensiones los clasificamos como:

- De empleo, corresponde a los planes cuyo promotor sea cualquier entidad, corporación, sociedad o empresa y cuyos partícipes sean los empleados de estos.
- Sistema asociado: corresponde a planes cuyo promotor o promotores sean cualesquiera asociaciones o sindicatos, siendo los partícipes sus asociados, miembros o afiliados.

- Sistema individual: corresponde a planes cuyo promotor son una o varias entidades de carácter financiero y cuyos partícipes son cualesquiera personas físicas.

En razón de las obligaciones estipuladas:

- Planes de prestación definida, en los que se define como objeto la cuantía de las prestaciones a percibir por los beneficiarios.
- Planes de aportación definida, en los que el objeto definido es la cuantía de las contribuciones de los promotores y, en su caso, de los partícipes al plan.
- Planes mixtos, cuyo objeto es, simultáneamente, la cuantía de la prestación y la cuantía de la contribución.

Los planes de los sistemas de empleo y asociados podrán ser de cualquiera de las tres modalidades anteriores y los del sistema individual sólo de la modalidad de aportación definida.

Definimos diversos elementos que participan en los planes de pensiones:

- Promotor: Es una entidad, empresa, corporación, asociación, sindicato,etc..., que inste o participe en el desenvolvimiento de un plan de pensiones.
- Partícipe: Es la persona física en cuyo interés se crea el plan de pensiones.
- Beneficiario: Es la persona física con derecho al cobro de prestaciones.
- Derecho consolidado: es la parte que le corresponde al beneficiario del fondo de capitalización.
- Cuenta de posición: Recoge las contribuciones hechas al fondo y los rendimientos generados hasta la fecha.

Loa planes de pensiones se pueden plasmar de diferentes modos dependiendo del ámbito de aplicación:

- Laboral: mediante contrato laboral a través de un convenio colectivo.
- Asociativo: mediante un contrato civil.
- Individual: mediante un contrato mercantil.

Los **fondos de pensiones** son el patrimonio sin personalidad jurídica afectos al cumplimiento de uno o varios planes de pensiones, planes y fondos van ligados.

Los fondos de pensiones, a su vez, pueden ser:

- Fondos de pensiones personales. Se limitan al ámbito asociativo e individual.
- Fondos de pensiones de empleo. Se limitan al ámbito laboral.
- Cerrados. Utiliza para su inversión los recursos del plan o planes adscritos a él.
- Abierto. Utiliza para su inversión también los recursos de otros fondos de igual categoría.

Los planes responderán a equilibrios de sistemas financiero-actuariales de capitalización, según el principio de equivalencia entre aportaciones y prestaciones futuras y estableciendo unas reservas

Las prestaciones podrán ser en forma de :

- Capital: solo una vez y diferido o inmediato.
- Renta: de cuantía constante o variable, inmediata o diferida y revertibles a otros beneficiarios en caso de fallecimiento.
- Mixta: Combina rentas y capital único.

El Reglamento de Planes BOE-A-2004-3453 real decreto 304/2004, de 20 de febrero, por el que se aprueba el reglamento de planes y fondos de pensiones, en sus artículos 19-23 de la Sección 2.ª (Aspectos financieros y actuariales de los planes de pensiones) y en su disposición adicional tercera (Actividad profesional de los actuarios en relación con los planes de pensiones) es el que define las bases técnicas y las hipótesis que deben ser utilizadas en el desarrollo actuarial de estos instrumentos de previsión social.

20.3 Seguros Colectivos sobre la vida

Este sistema de previsión debe ser constituido por un conjunto de personas que se reúnen en contrato colectivo y a las que les una un vínculo o un interés común diferente al de asegurarse.

Las coberturas deben garantizarse en un contrato único que suscribirá el asegurador y el contratante.

Lo más habitual es que sean personas d la misma empresa o de un grupo de empresas. Pero también se da en cualquier colectivo vinculado por un interés común.

Puede tener las coberturas de muerte y/o muerte y supervivencia.

Puede complementarse con las coberturas para invalidez, muerte por accidente, muerte por accidente de circulación, etc…

Sus características más importantes son:

- Es un instrumento jurídico de cobertura de riesgos que afectan a un grupo de personas.
- Es un contrato único en el que el tomador interviene a favor de los asegurados.
- Tiene una estructura de contrato de abono en el que existe un único tomador, pero muchos beneficiarios, y que estos pueden abandonar el grupo, incorporarse como nuevas adhesiones o diferenciar distintas obligaciones para cada beneficiario.
- El pago de las primas puede ser realizado por el tomador, los asegurados o una mezcla de los dos.

El tomador tiene derechos para:

- Designar y revocar beneficiarios
- Realizar reducciones y rescates.
- Percibir anticipos.

- Cesión o pignoración de la póliza .

Existe diversos tipos de contrato colectivo sobre lo vida:

- Riesgo: capital o renta en caso de muerte o invalidez permanente.
- Ahorro: Capital final garantizado más una participación en los beneficios obtenidos con la inversión.
- Salud: prestación sanitaria o económica en caso de enfermedad.

Es un sistema más flexible que el plan de pensiones en el que no existe una comisión d control y la empresa puede decidir sobre qué compañía de seguros contrata en cada momento.

No existe el principio de no discriminación que existe en el plan de pensiones.

Otra opción que permite este tipo d previsión es que la empresa puede no imputar las primas a los trabajadores y mantiene así los derechos económicos. Si el trabajador extingue su relación laboral queda desvinculado de sus derechos.

20.4 Mutualidades de previsión social

Los seguros colectivos sobre la vida pueden suscribirse con una entidad privada o con una mutualidad de previsión social.

Estas mutualidades tienen históricamente carácter constitutivo de la Seguridad Social.

Las que no se integraron al sistema quedaron sometidas a los mismos criterios de solvencia que cualquier entidad aseguradora.

Definimos las mutualidades de previsión social como entidades aseguradoras que ejercen una modalidad de previsión social de carácter voluntario y complementario a la Seguridad Social obligatoria mediante aportaciones a prima fija o variable y en la que todos los mutualistas son empleados de las empresas, instituciones o empresarios promotores de los contratos.

Las prestaciones son otorgadas como consecuencia de acuerdos de previsión entre la empresa y los empleados.

Son entidades privadas sin ánimo de lucro.