EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 1. Rentas financieras. Rentas variables valoradas en capitalización compuesta. Variable en progresión geométrica. Variables en progresión aritmética. Casos de pos y prepagables.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Rentas financieras.

Para conocer el concepto de renta financiera hay que definir primero el concepto de distribución de capitales financieros.

Este concepto de distribución de capitales surge de la necesidad de operar con conjuntos de capitales disponibles en momentos diferentes en los fenómenos financieros.

De modo que:

Siendo T un conjunto de vencimientos correspondientes a un fenómeno financiero y B una familia de conjuntos de vencimientos que tambien recibe el nombre de $\sigma -$ álgebra o familia de Borel,

Al par (T, B) le llamamos estructura de vencimientos del fenómeno financiero.

Entonces T representa un conjunto financiero o distribución de capitales financieros cuando $\forall\ T_s \epsilon\ B$ se define una aplicación M en $\mathbb{R}^+$ que exprese el total de cuantía o masa de capital con vencimiento en T_s.

Así, la terna (T,B,M) permite conocer la masa de capital asociado a cualquier $T_s \epsilon\ B$ y define el conjunto financiero o distribución de capitales. Cada elemento del conjunto financiero (capitales financieros) lo podremos definir con el par cuantía y vencimiento (C_s, T_s).

Definición de Renta financiera.

Dado un intervalo $\mathbb{I} \equiv [t_0, t_n]$

Sea $\mathbb{P}$ una partición de $\mathbb{I}$ en n subintervalos de modo que se verifica que

$$\left[\mathbb{I} = \bigcup_{1}^{n} \mathcal{I}_r \ siendo \quad \mathcal{I}_r \ \neq \emptyset \quad y \quad \mathcal{I}_r \cap \mathcal{I}_j \ = \emptyset \qquad para\ r \neq j\right]$$

Y sea $\mathbb{D}$ una distribución discreta de capital, definida por el conjunto

$$\mathbb{D} \equiv \{(C_1, \tau_1), (C_2, \tau_2), \dots . (C_n, \tau_n)\}$$

Decimos que la correspondencia biunívoca entre capitales financieros y elementos de la partición pertenecientes a $\mathbb{P}$ y $\mathbb{D}$*, respectivamente,* es una renta financiera en su sentido financiero más amplio.

A cada $\mathcal{I}_s$ le corresponde un (C_s, τ_s), es decir a cada subintervalo, que llamamos periodo de maduración le corresponde un capital financiero llamado término de la renta.

Podemos definirlo de otro modo:

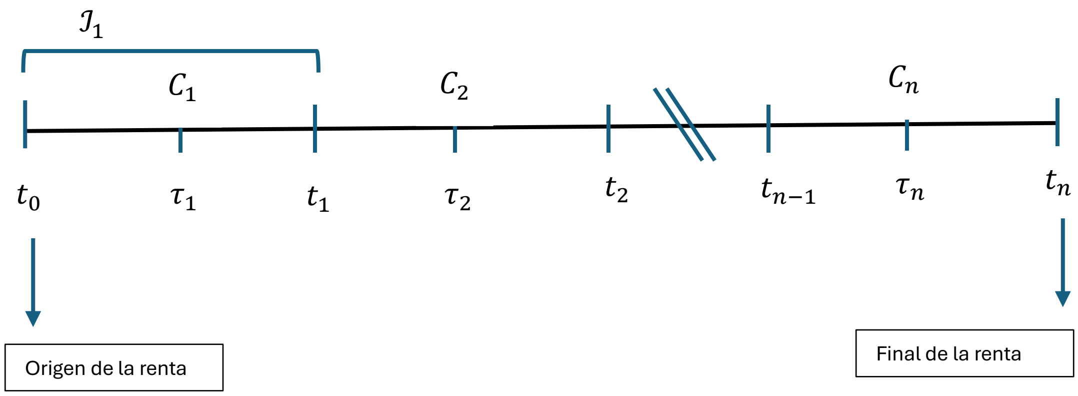
Dado un conjunto de capitales y un intervalo dividido en tantos subintervalos coo capitales tiene el conjunto, una renta en sentido financiero es el ente formado por ambos conjuntos (capitales y subintervalos) asociados biyectivamente.

Gráficamente podemos realizar la siguiente representación de una renta financiera y su estructura.

$$(C_1, \tau_1) \Leftrightarrow (t_0, t_1)$$

$$(C_2, \tau_2) \Leftrightarrow (t_1, t_2)$$

$$(C_n, \tau_n) \Leftrightarrow (t_{n-1}, t_n)$$



$$(C_i, \tau_i) = Términos\ de\ la\ renta$$

$$\mathcal{I}_s \equiv [t_{i-1}, t_i] \ = Periodos\ de\ maduración$$

Esta representación gráfica corresponde a una distribución finita de capitales.

Existen otros casos:

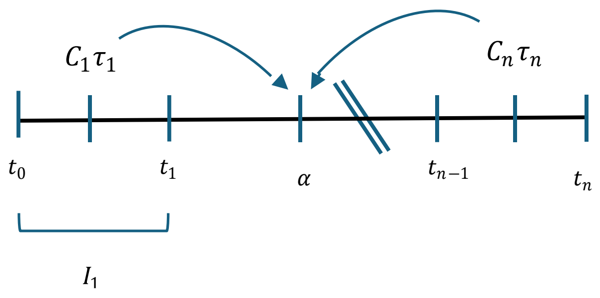
- Distribución de capitales infinito y numerable ⇒

  ⇒ Renta perpetua (no termina en t_n) y continua hasta ∞.

- Distribución de capitales infinito no numerable ⇒ Renta continua

Valor capital de una renta

Dada una renta financiera y definida una ley financiera F(t;p), como su criterio de valoración, denominamos valor capital o valor financiero de una renta en un momento α al capital cuya cuantía es la suma financiera de los términos de la proyectados al vencimiento α.



El valor capital de una renta en α es

$$V_\alpha = \sum_{s=1}^{n} C_s \times f(\tau_s;\alpha)$$

Siendo $f(\tau_s;\alpha)$ el factor financiero que traslada el término de la renta que vence en τ_s hasta α.

SI $\alpha = t_0$ se denomina valor actual,

SI $\alpha = t_n$ se denomina valor final.

Clases de rentas

Las podemos clasificar atendiendo a :

- Aleatoriedad:
  - Ciertas o deterministas
  - Aleatorias o probabilísticas

- Amplitud de los periodos de maduración:
  - Discretas (periódicas en las que todos los subintervalos son iguales y no periódicas)
  - Continuas (Aquellas con periodos de maduración infinitesimales y un flujo continuo de capitales).

- Cuantías de capitales:
  - Constantes. Todas las cuantías de todos los términos de la renta son iguales.

- Variables. Pueden tener o no leyes de formación:
  - Aritméticas
  - Geométricas
  - Polinómicas…

- Duración:

  - Temporales, en las que el periodo es (t_0, t_n)
  - Perpetuas, el periodo es (t_0, ∞)

- Momento de vencimiento de los términos dentro del periodo de maduración:

  - Prepagables. $\tau_n = t_n - 1$
  - Pospagables $\tau_n = t_n$

- Momento en que se valoran:

  - Inmediatas. $\alpha \in I$
  - Diferidas. $\alpha < t0$
  - Anticipadas. $\alpha > t_n$.

Propiedades de las rentas

Proporcionalidad del valor financiero respecto a la cuantía.

Dadas 3 rentas $R_1, R_2\ y\ R_3$ con idénticos periodos de maduración y ley financiera, si se verifica que $C_s(R_1) = C_s(R_2) + C_s(R_3)$, entonces se verifica que $V_\alpha(R_1) = V_\alpha(R_2) + V_\alpha(R_3)$

Es una propiedad que puede ser útil al estudiar las rentas variables en progresión aritmética como suma de rentas constantes.

Si se cumple que $C_s(R_1) = k * C_s(R_2)$
Entonces $V_\alpha(R_1) = k * V_\alpha(R_2)$

Útil para valorar en rentas de cuantía unitaria y después multiplicar por la cuantía de cada termino.

Aditiva respecto al tiempo.

V_α puede valorarse como la suma del valor financiero en α de cada uno de los subintervalos en los que dividamos el intervalo de duración total.

Puede ser útil para valorar rentas que tienen términos que varían su formación según el subintervalo en el que se encuentren contenidos.

Condensación de una renta en otra equivalente de menor número de términos.

Siempre que la suma financiera de los términos contenidos en los periodos que se integran en el nuevo periodo de maduración mayor sea financieramente equivalente al nuevo término de la renta correspondiente a ese periodo nuevo de maduración.

Es útil para sustituir, por ejemplo, una renta con un vencimiento de periodicidad mensual en otra que tenga periodicidad anual.

Significado de la valoración de una renta perpetua.

$$V_\alpha = \sum_{s=1}^{\infty} C_s * f(\tau_s; \alpha)$$

Solo tiene significado financiero si la serie es convergente, es decir cuando

$$\lim_{s \to \infty} C_s * f(\tau_s; \alpha) = 0$$

Rentas variables valoradas en capitalización compuesta

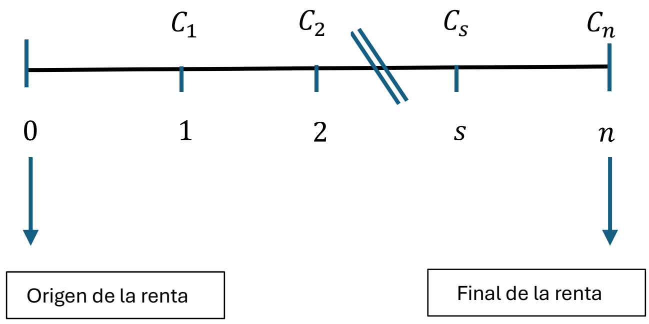
Estudiamos en este epígrafe las rentas financieras constituidas por términos de cuantía no constante (variable).

Estudiaremos este tipo de rentas en sus formas temporal, pos y prepagables.

En primer lugar, las vamos a estudiar considerando que no siguen ninguna ley de variación conocida, para después estudiar las que varían la cuantía de sus términos de forma geométrica y aritmética.

Renta Variable General Pospagable.

El esquema grafico d este tipo de rentas lo podemos representar así:



Valorada según la ley financiera de capitalización compuesta a un tanto i :

$$Valor\ actual = V_0 = \sum_{s=1}^{n} C_s * (1+i)^{-s}$$

$$Valor\ final = V_n = \sum_{s=1}^{n} C_s * (1+i)^{n-s}$$

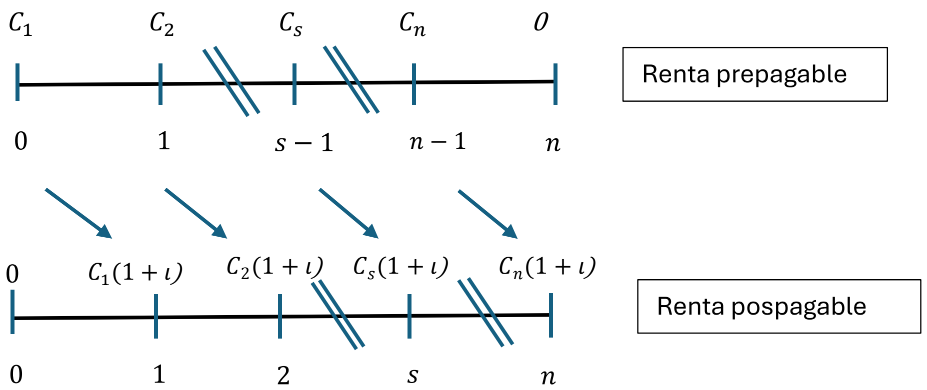
Estas relaciones indican que hay que hacer el sumatorio de cada una de las cuantías de cada termino valoradas en el momento de valoración.

También podemos indicar la relación

$V_n = V_0 * (1+\imath)^n$

Renta Variable General Prepagable

Las rentas prepagables son equivalentes a una renta de pospagable cuyos términos son de una cuantía igual a los de la renta prepagable multiplicados por el factor $(1+i)$



El valor de una renta prepagable se representa con el símbolo $\ddot{V}$

$$Valor\ actual = \ddot{V}_0 = V_0(1+i) = \sum_{s=1}^{n} C_s * (1+i)^{-(s-1)}$$

$$Valor\ final = \ddot{V}_n = V_n(1+i) = \sum_{s=1}^{n} C_s * (1+i)^{n-1+1}$$

Rentas de términos de cuantía variable en progresión aritmética

Caso temporal pospagable

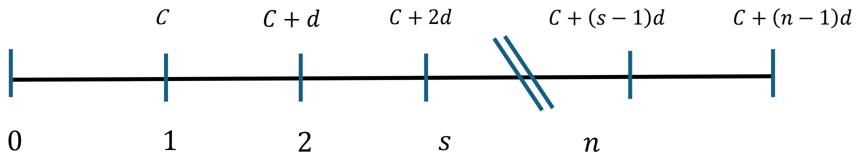
En este tipo de rentas, cada término de la renta se obtiene sumándole una cantidad constante a la cuantía del término anterior.

A la cuantía del primer término la llamamos C.

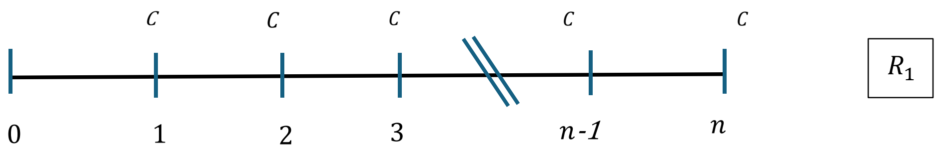
A la razón de la progresión (cantidad constante que se añade al termino anterior) la llamamos *d*.

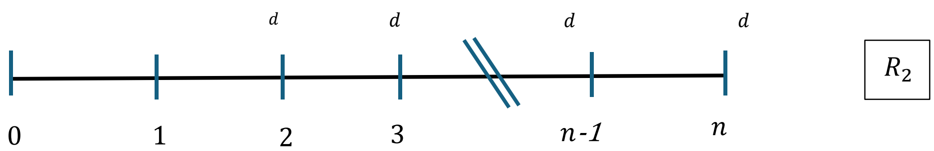
Esta razón puede ser menor que cero siempre que la cuantía del último término de la renta sea superior a cero.

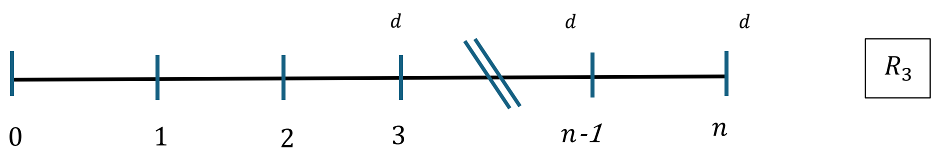
La podemos representar del siguiente modo:

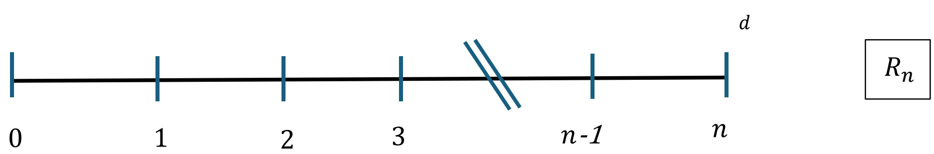


Podemos descomponer la renta variable en progresión aritmética en una suma de n rentas de cuantía C constante. Gracias a la propiedad de la proporcionalidad del valor financiero respecto a la cuantía de las rentas financieras,









Por lo tanto:

$$R = \sum_{1=1}^{n} R_i$$

Según este planteamiento podemos decir que R_1 es una renta inmediata y las demás rentas son diferidas, cada una un periodo más que la anterior.

Representamos simbólicamente el valor actual de la renta y desarrollamos la obtención de su expresión desarrollando la suma de rentas diferidas.

Periodos de diferimiento

$$A(C,d)_{n\rceil i} = C * a_{n\rceil i} + d * [1/a_{n-1\rceil i} + 2/a_{n-2\rceil i} + \cdots + n - 1/a_{1\rceil i}] =$$

$$= C * a_{n\rceil i} + d * \left[v * \frac{1-v^{n-1}}{i} + v^2 * \frac{1-v^{n-2}}{i} + \cdots + v^{n-1} * \frac{1-v}{i}\right] =$$

Sustituimos por la expresión de una renta diferida

Simplificando

v = Factor de actualización o descuento financiero en capitalización compuesta

$$= C * a_{n\rceil i} + \frac{d}{i} * [v + v^2 + \cdots + v^{n-1} - (n-1) * v^n] =$$

$$= C * a_{n\rceil i} + \frac{d}{i} * [\underbrace{v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n}_{a_{n\rceil i}} - n * v^n] =$$

$$= C * a_{n\rceil i} + \frac{d}{i} * [a_{n\rceil i} - n * v^n] = \boxed{\left[C + \frac{d}{i}\right] * a_{n\rceil i} - \frac{d * n * v^n}{i}}$$

Podemos desarrollar más la expresión si sumamos y restamos $d * \frac{n}{i}$

$$A(C,d)_{n\rceil i} = \left(c + \frac{d}{i}\right) * a_{n\rceil i} - \left(d * \frac{n}{i}\right) + \left(d * \frac{n}{i}\right) - \left(\frac{d * n * v^n}{i}\right) =$$

$$= \left(c + \frac{d}{i}\right) * a_{n\rceil i} - \left(d * \frac{n}{i}\right) + \left((d * n) * \left(\frac{1-v^n}{i}\right)\right) =$$

$$= \left(c + \frac{d}{i}\right) * a_{n\rceil i} + \left((d * n) * a_{n\rceil i}\right) - \left(d * \frac{n}{i}\right) =$$

$$\boxed{= \left(\left(c + \frac{d}{i} + (d * n)\right) * a_{n\rceil i}\right) - \left(d * \frac{n}{i}\right)}$$

Para conocer el valor final multiplicamos el valor actual por $(1+i)^n$:

$$S(C,d)_{n\rceil i} = \left((1+i)^n * \left[C + \frac{d}{i}\right] * a_{n\rceil i}\right) - \left((1+i)^n * \frac{d * n * v^n}{i}\right) =$$

$$\boxed{= \left(\left[C + \frac{d}{i}\right] * s_{n\rceil i}\right) - \left(d * \frac{n}{i}\right)}$$

Caso temporal prepagable

Este tipo de renta es posible obtenerlo en función de una renta temporal pospagable utilizando el operador (1+i)

$$\ddot{A}(C,d)_{n\rceil i} = A(C,d)_{n\rceil i} * (1+i)$$

$$\ddot{S}(C,d)_{n\rceil i} = S(C,d)_{n\rceil i} * (1+i)$$

Rentas de términos de cuantía variable en progresión aritmética

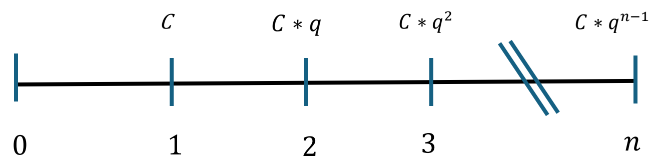
En este tipo de rentas, cada termino se obtiene como una función del anterior que multiplica el termino anterior por una cuantía constante, la razón de la progresión que llamamos *q*.

Al primer término le llamamos C.

La razón de la progresión, q, debe ser siempre mayor que cero en este tipo de rentas.

Caso temporal pospagable

La podemos representar del siguiente modo:



Representamos simbólicamente y desarrollamos su cálculo utilizando la valoración según la ley financiera de capitalización compuesta, valorando todos los términos de la renta en el origen y sumándolos.

$$A(C,q)_{n\rceil i} = c*v + c*q*v^2 + c*q^2*v^3 + \cdots + c*q^{n-1}*v^n =$$

$$= c*v(1 + q*v + q^2*v^2 + \cdots + q^{n-1}*v^{n-1}) =$$

Suma de progresión geométrica de razón q*v

$$= c * v\left(\frac{1-q^n*v^n}{1-q*v}\right) = \underbrace{\;}_{\text{Desarrollando v}} c * v\left(\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{v*(1+i-q)}\right) = \boxed{c * \left(\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{(1+i-q)}\right)}$$

Capitalizamos el valor actual para conocer el valor final

$$S(C,q)_{n\urcorner i} = (1+i)^n * A(C,q)_{n\urcorner i} = \boxed{c * \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}}$$

Existe un caso particular en el que q=1+i

En este caso resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Para poder desarrollar una expresión para este caso debemos recurrir a la expresión inicial del valor actual.

$$c * v(1 + q * v + q^2 * v^2 + \cdots + q^{n-1} * v^{n-1})$$

Si q=1+i entonces q*v=1

De modo que $(1 + q * v + q^2 * v^2 + \cdots + q^{n-1} * v^{n-1}) = n$

$$\boxed{A(C,q)_{n\urcorner i} = c * v * n = c * \frac{n}{1+i}}$$

Hallar el valor final no tiene ninguna dificultad añadida.

Caso temporal geométrica prepagable

Igual que en el resto de las rentas prepagables, se puede obtener su valor multiplicando por el factor (1+i) el valor de la pospagable.

$$\ddot{A}(C,q)_{n\urcorner i} = (1+i) * A(C,q)_{n\urcorner i}$$

En el caso particular de que q=1+i podemos seguir este mismo procedimiento.

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 2. Fraccionamiento de rentas. Rentas fraccionadas uniformes. Valoración de rentas fraccionadas en capitalización compuesta. Casos de pos y prepagables, constantes y variables. Estudio de la renta fraccionada cuando el fraccionamiento tiende a infinito.

Edición Noviembre 2025

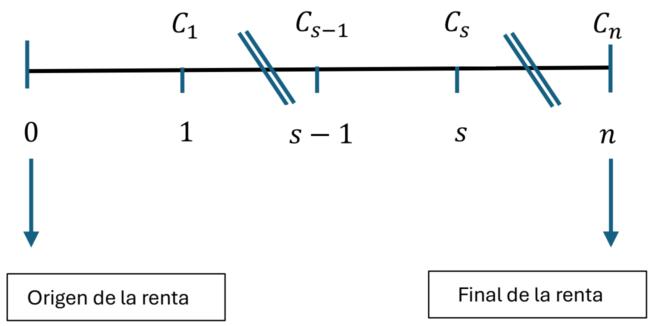
C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

(Véase tema 1 para una introducción a las rentas financieras)

Fraccionamiento de rentas

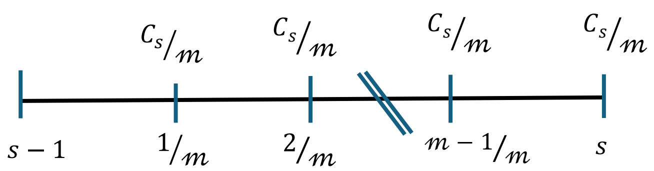
Concepto.

Consideramos una renta cualquiera, por ejemplo, una variable temporal pospagable.



Denominamos renta fraccionada, con fraccionamiento aritmético uniforme de frecuencia m a la renta que surge de descomponer cada cuantía de cada término de la renta C_i, en m cuantías iguales C_i/m .

Observando solo un periodo de maduración de la renta, $[(s-1, s]$, lo representamos así:



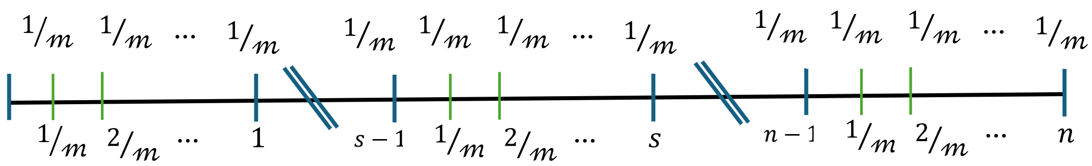
Y la renta en su conjunto la representaríamos del mismo modo, efectuando esta división en cada periodo de maduración.

Podemos utilizar **dos aproximaciones** para calcular el valor de la renta:

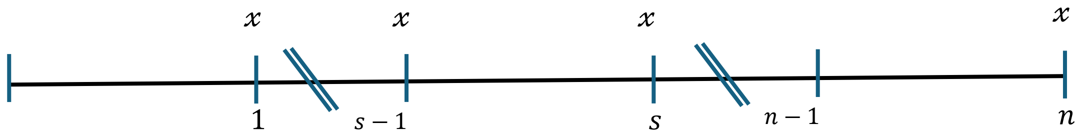
1- Cualquier renta fraccionada se puede estudiar y valorar como una no fraccionada, utilizando intervalos de amplitud igual a los subperiodos en los que dividimos el periodo de maduración como unidad de tiempo y utilizando el redito equivalente que corresponda.
2- Podemos usar, también, la propiedad de condensación de las rentas en otra equivalente con menor número de términos.

Caso de rentas fraccionadas temporales constantes y pospagables.

Utilizamos una renta unitaria para su estudio.
Cada unidad monetaria y cada periodo se divide en m partes iguales.



Aplicando la propiedad de condensación de la renta podemos sustituir m capitales de cada periodo por uno equivalente valorado en capitalización compuesta, de cuantía x , al final de cada periodo.



Y valorar la renta como una renta de cuantía constante x.
Valor actual y final de una renta unitaria temporal fraccionado:

$$a_{n\rceil i}{}^{(m)} = x * a_{n\rceil i}$$

$$s_{n\rceil i}{}^{(m)} = x * s_{n\rceil i}$$

Siendo i el tanto de valoración para un periodo unitario sin fraccionar.

Para calcular x valoramos cada cuantía $1/m$ al final de cada periodo.

$$x = \frac{1}{m} * \left[\underbrace{1 + (1+i)^{1/m} + (1+i)^{2/m} + \cdots (1+i)^{m-1/m} +}_{\text{Suma de términos en progresión geométrica de razón } (1+i)^{1/m} > 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{(1+i)^{m-1/m} * (1+i)^{1/m}}{(1+i)^{1/m} - 1}\right) = \frac{1+i-1}{m\left((1+i)^{1/m} - 1\right)} = \boxed{\frac{i}{j_m}}$$

Siendo j_m= Tanto nominal de frecuencia m definido como la proyección aritmética de i_m en el periodo sin fraccionar;

Siendo i_m = redito del periodo $\frac{1}{m}$.

$$\boxed{i_m = (1+i)^{1/m} - 1 = \frac{j_m}{m}}$$

Por lo tanto:

$$a_{n\rceil i}{}^{(m)} = \frac{i}{j_m} * a_{n\rceil i}$$

$$s_{n\rceil i}{}^{(m)} = \frac{i}{j_m} * s_{n\rceil i}$$

Podemos decir que $\frac{i}{j_m}$ es el operador que transforma la valoración de una renta fraccionada en función de su renta correspondiente sin fraccionar.

Hay que añadir que $i > j_m$ cuando $m > 1$

De modo que $a_{n\rceil i}{}^{(m)} > a_{n\rceil i}$

Utilizando el otro método expuesto al principio del epígrafe podemos valorar la renta como una renta no fraccionada, tomando como periodo de maduración $\frac{1}{m}$.

De modo que tenemos una renta de cuantía unitaria constante con $n * m$ términos, valorada con el redito i_m correspondiente a cada periodo de maduración $\frac{1}{m}$.

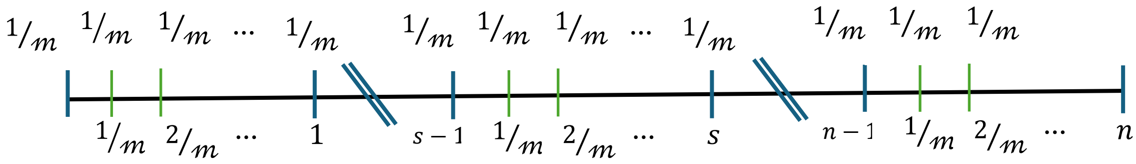
Valor actual= $V_0 = \frac{1}{m} * a_{n*m\rceil i_m}$

Valor final= $V_{n*m} = \frac{1}{m} * s_{n*m\rceil i_m}$

Es importante que cualquiera que sea el método de valoración no se "mezclen" las magnitudes y todas estén referidas al mismo intervalo temporal.

Caso de rentas constantes fraccionadas temporales prepagables

En este caso, la cuantía $\frac{1}{m}$, se corresponde con el principio de cada subperiodo.



Es posible valorar este tipo de rentas como una función de su correspondiente renta pospagable capitalizándola un subperiodo $1/_m$.

Multiplicamos por el factor $(1+i)^{1/m}$ para capitalizar la correspondiente renta.

$$\boxed{\ddot{a}_{n\rceil i}{}^{(m)} = (1+i)^{1/m} * a_{n\rceil i}{}^{(m)} = (1+i_m) * \ a_{n\rceil i}{}^{(m)} = (1+i_m) * \frac{i}{j_m} * a_{n\rceil i}}$$

$$\boxed{\ddot{s}_{n\rceil i}{}^{(m)} = (1+i)^{1/m} * s_{n\rceil i}{}^{(m)} = (1+i_m) * \ s_{n\rceil i}{}^{(m)} = (1+i_m) * \frac{i}{j_m} * s_{n\rceil i}}$$

Caso de rentas fraccionadas temporales de cuantía variable

Cuando no existe una ley específica en la formación de los términos de la renta hablamos de rentas variables generales.

Caso de temporal pospagable variable general

Aplicando la propiedad de condensación de las rentas financieras podemos valorar estas rentas del siguiente modo:

Llamamos $\mathcal{X}_s$ al valor final de la renta formada por las m cuantías $^{C_s}/_m$ que tienen su vencimiento en el intervalo $(s-1, s]$.

$$\mathcal{X}_s = \frac{C_s}{m} * s_{m\rceil i} = \frac{C_s}{m} * \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} = \frac{C_s * i}{j_m}$$

$$V_0{}^{(m)} = \sum_{s=1}^{n} \mathcal{X}_s * (1+i)^{-s} = C_s * \frac{i}{j_m} * (1+i)^{-s} = \frac{i}{j_m} * V_0$$

Recordamos que $\frac{i}{j_m}$ es el factor para valorar una renta fraccionada en función de la correspondiente sin fraccionar.

Caso de temporal prepagable variable general

Al igual que hacíamos con las rentas de cuantía constante valoramos la prepagable obteniendo previamente la pospagable correspondiente a la que queremos valorar y capitalizamos cada termino una fracción $\frac{1}{m}$ del periodo de maduración.

$$\ddot{V}_0{}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} * V_0{}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} * \frac{i}{j_m} * V_0$$

$$\ddot{V}_n{}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} * V_n{}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} * \frac{i}{j_m} * V_n$$

Caso de renta fraccionada temporal de cuantía variable en progresión aritmética

Caso pospagable

En este tipo de rentas la ley de variación de la cuantía de los términos de la renta es $C_s = C_1 + (s-1) * d$.

Y las cuantías de cada subperiodo $\frac{1}{m}$, $\frac{C_S}{m} = \frac{C_1+(s-1)}{m}$ $\forall\, s = 1,2,\ldots,n$

Interpretando como un caso particular de la renta variable general tenemos:

$$A^{(m)}(C,d)_{n\urcorner i} = \frac{i}{j_m} * A(C,d)_{n\urcorner i} = \frac{i}{j_m} * \left(\left(c + \frac{d}{i} + (d*n)\right) * a_{n\urcorner i}\right) - \left(d * \frac{n}{i}\right)$$

$$S^{m}(C,d)_{n\urcorner i} = \frac{i}{j_m} * S(C,d)_{n\urcorner i} = \frac{i}{j_m} * \left(\left[C + \frac{d}{i}\right] * s_{n\urcorner i}\right) - \left(d * \frac{n}{i}\right)$$

Caso prepagable

Igual que se hizo en anteriores desarrollos, se utiliza el operador

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1 + i_m$$

$$\ddot{A}^{(m)}(C,d)_{n\urcorner i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} * A^{(m)}(C,d)_{n\urcorner i}$$

Y lo mismo se puede hacer para valorarla en cualquier otro momento, como por ejemplo el valor final.

CASO DE RENTA TEMPRAL FRACCIONADA DE TERMINOS DE CUANTIA VARIABLE EN PROGRESION GEOMETRICA

Caso prepagable

En este tipo de rentas las cuantías de los términos se gorman según la ley

$$C_s = C * q^{s-1}$$

Siendo q la razón de la progresión y C la cuantía del primer término de la renta.

Al tratarse de un caso particular de la renta variable en progresión geométrica no fraccionada aplicamos, como ya hicimos en otros desarrollos el factor de transformación $\frac{i}{j_m}$

$$A^{(m)}(C,q)_{n\urcorner i} = \frac{i}{j_m} * A(C,q)_{n\urcorner i} = \frac{i}{j_m} * c * \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{(1+i-q)} \right)$$

$$S^{(m)}(C,q)_{n\urcorner i} = \frac{i}{j_m} * S(C,q)_{n\urcorner i} = \frac{i}{j_m} * c * \left(\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} \right)$$

Caso prepagable

Al igual que en anteriores desarrollos similares utilizamos el operador de transformación $(1+i)^{\frac{1}{m}}$

$$\ddot{A}^{(m)}(C,q)_{n\urcorner i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} * A^{(m)}(C,q)_{n\urcorner i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} * \frac{i}{j_m} * A(C,q)_{n\urcorner i}$$
$$= \left(\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} * i * C * \left[1 - \left(\frac{q}{1+i}\right)^n\right]}{j_m * (1+i-q)} \right)$$

$$\ddot{S}^{(m)}(C,q)_{n\urcorner i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} * \frac{i}{j_m} * c * \left(\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} \right)$$

Estudio de la renta fraccionada cuando el fraccionamiento tiende a infinito.

Sea una renta pospagable de termino general (C_s, t_s) que puede correspondiente a un periodo $(t_{s-1}, t_s]$, definidos de forma general (pueden ser variables o constantes).

Cuando $m \to \infty$ es equivalente a repartir C_s en $(s-1, s]$ de manera uniforme y continua.

La función de densidad de la cuantía se mantiene constante dentro del periodo

$$k = \frac{C_s}{t_s - t_{s-1}}$$

Esta función de densidad, al definir la renta en términos generales, puede variar al pasar de un periodo a otro si se modifica la cuantía o la amplitud del intervalo de tiempo.

Siendo $C_s = \int_{t_{s-1}}^{t_s} \mathrm{K}_s \, dt$ la cuantía total asociada al periodo de maduración.

La renta que llamamos $\mathcal{R}(t)$ será una clase particular de renta continua y tendrá la siguiente una representación poligonal rectilínea creciente y la podemos expresar así:

$$\mathcal{R}(t) = \sum_{s=1}^{n} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \mathrm{K}_s \, dt$$

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 3. Operaciones financieras. Postulados de la equivalencia financiera. Concepto de reserva y métodos de cálculo. Operaciones financieras simples. Operaciones financieras compuestas: operaciones de constitución.

Edición Noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

OPERACIONES FINANCIERAS

Podemos definir las operaciones financieras como un intercambio no simultaneo de capitales financieros, en la que el conjunto de capitales entregados por el acreedor se denomina prestación y el conjunto de capitales devueltos por el deudor se denomina contraprestación.

Las operaciones financieras constan de los siguientes **elementos**:

- Personales o subjetivos
    - Acreedor. Entrega el primer capital, y asume la contraprestación.
    - Deudor. Asume la contraprestación.
    - Monetarios u objetivos. Son los capitales que han de entregar y recibir las partes subjetivas.
    - Principio fundamental. Los compromisos adquiridos han de ser financieramente equivalentes, dada una ley financiera y un interés pactado en un acuerdo previo.

El origen de la operación es aquel en el que se entrega el primer capital y el final coincide con la entrega del último y la duración es el intervalo de tiempo entre ambos.

En este intercambio de capitales la prestación es equivalente financieramente a la contraprestación, según una ley financiera y un interés, *i, previamente pactado.*

En las rentas financieras que vamos a estudiar y valorar en este tema se utilizará la ley financiera de capitalización compuesta.

Clasificación

Según:

- Duración:
    - ✓ Corta: menos de un año, suelen ser leyes financieras simples.
    - ✓ Larga: más de un año, suelen ser leyes financieras compuestas.
- Numero de capitales:
    - ✓ Simples, solo un capital tanto en prestación como en contraprestación.
    - ✓ Compuestas; varios capitales en la prestación y/o la contraprestación.
        - Constitución: varios capitales en la prestación y una en la contraprestación
        - Amortización: un capital en la prestación y varios en la contraprestación
- Sentido crediticio:
    - ✓ Crédito unilateral, no cambia las posiciones de los elementos subjetivos
    - ✓ Crédito reciproco, cambia la posición de los elementos subjetivos.
- Ley financiera utilizada:

- ✓ Capitalización.
- ✓ Descuento.
- ✓ Mixta, cambiando el tipo de ley utilizada según el tramo.

- Partes intervinientes
    - ✓ Bancarias, uno de los elementos es una entidad financiera.
    - ✓ No bancarias.
- Tipo de liquidez
    - ✓ Interna
        - Total: se puede cancelar en cualquier momento.
        - Parcial: no permitida la cancelación hasta el vencimiento o permitida con previo acuerdo.
    - ✓ Externa: Esta permitida la transferencia de la operación a otros sujetos.

Postulados de la equivalencia financiera

Como ya hemos visto, las operaciones financieras quedan definidas por la prestación y la contraprestación.

Estas se describen a través de un conjunto de capitales que se valoran como rentas financieras.

El conjunto de capitales puede ser discreto, continuo o una combinación de los dos.

Así, el conjunto de capitales financieros que definen una operación, y la ley financiera acordada, **la equivalencia financiera** es el principio fundamental que establece que el sumatorio de los valores financieros de la prestación han de coincidir con el sumatorio de los valores financieros de la contraprestación en cualquier momento α del tiempo.

Dados (C_s, t_s) = capitales que componen la prestación y $(C_s^{'}, t_s^{'})$ = capitales que componen la contraprestación,

$$\sum_{s=0}^{n} C_s \times f(t;p) = \sum_{s=0}^{m} C_s^{'} \times f(t';p) \ \forall \ \alpha$$

$f(t;p)$= factor financiero de la correspondiente ley financiera previamente pactada que permite obtener la cuantía equivalente de $C_s$en α

Normalmente esta equivalencia nos permite despejar la incógnita de la operación financiera.

Por ejemplo, conociendo el resto de los elementos de un préstamo, permite conocer su término amortizativo.

Concepto de reserva y métodos de cálculo

*Desde un **punto de vista dinámico** también se puede estudiar la operación financiera y conocer su evolución.*

*Así, la reserva matemática o **saldo financiero**, valorada en un momento t de la operación, es la diferencia financiera de los compromisos pasados y los compromisos futuros valorados en el momento t.*

Teniendo en cuenta que:

S_1= *cuantía de la suma financiera de los capitales de la prestación anteriores a t.*

S_2= *cuantía de la suma financiera de los capitales de la prestación posteriores a t.*

$S_1^{'}$= *cuantía de la suma financiera de los capitales de la contraprestación anteriores a t.*

$S_2^{'}$= *cuantía de la suma financiera de los capitales de la contraprestación posteriores a t.*

Se ha de verificar que:

$S_1 + S_2 = S_1^{'} + S_2^{'}$

Y transponiendo:

$S_1 - S_1^{'} = S_2^{'} - S_2 = R_t$ =*saldo financiero en t*

$S_1 - S_1^{'}$= ***método retrospectivo***

$S_2^{'} - S_2$=***método prospectivo***

Si $R_t > 0$, el saldo financiero es a favor de la prestación (falta contraprestación por entregar para alcanzar el equilibrio) y viceversa.

Si ya se ha hallado el saldo en t y se quiere hallar en t´:

S_3 = *suma financiera de los capitales de la prestación situados entre t y t´*

$S_3^{'}$ = *suma financiera de los capitales de la contraprestación situados entre t y t´*

$R_t = S_3 - S_3^{'}$= ***método recurrente***

Cuando algún capital tiene el vencimiento coincidente con algún momento de valoración del saldo:

*Denominamos R_t^{+} , **saldo por la derecha**, cuando se considera que el capital ha vencido un instante antes del momento de valoración del saldo. Este capital se tendrá en cuenta en el método retrospectivo de cálculo del saldo financiero en t.*

*En R_t^- , **saldo por la izquierda** ocurre lo contrario.*

Operaciones financieras simples

Son aquellas que están formadas por un único capital financiero en la prestación y un único capital financiero en la contraprestación

EL acreedor entrega la prestación como un capital (C_0, t_0) y el deudor entrega la contraprestación como un Capital(C_n, t_n) .

Análisis estático

Dada una ley financiera previamente pactada, F(t;p) , la ecuación de equivalencia financiera satisface:

$$C_0 \times F(t_0; p) = C_n \times F(t_n; p) \Leftrightarrow C_n = C_0 \times f(t_0; t_n)$$

Entendiendo C_0 como la cuantía de la prestación entregada en el origen de la operación y C_n como la cuantía de la contraprestación entregada en el final de la operación.

$$f(t_0; t_n) = factor\ finaciero\ asociado\ al\ intervalo[t_0; t_n], dada\ F(t; p)$$

Análisis dinámico

Se realiza, como ya se comentó anteriormente, valorando el saldo financiero, o reserva matemática, de la operación en un punto τ *perteneciente al intervalo* $[t_0; t_n]$*, entendido como la cuantía que entregada en un punto intermedio del intervalo de duración de la operación restablece la equivalencia financiera y cancela la operación.*

$$C_\tau \begin{cases} C_0 \times f(t_0; \tau) \rightarrow método\ retrospectivo \\ C_0 \times f'(t_n; \tau) \rightarrow método\ prospectivo \end{cases}$$

O bien el método recurrente para calcular en otro momento $\tau' > \tau$

$$C_{\tau'} = C_\tau \times f(\tau; \tau')$$

Operaciones financieras simples a corto y largo plazo.

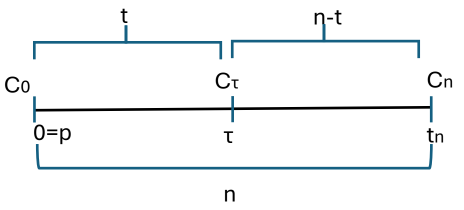
Largo plazo

Son operaciones con una duración superior al año.

De forma habitual se utiliza la ley financiera de capitalización compuesta o de descuento compuesto.

Estas son leyes estacionarias que permiten situar el origen de tiempos donde nos convenga, normalmente en el origen de la operación y que además al ser multiplicativas no dependen del momento de valoración p y no hace falta fijarlo.

Gráficamente:



Aplicando lo estudiado anteriormente sobre estas leyes financieras podemos escribir su equilibrio estático y dinámico:

$$L(t;p) = (1+i)^{p-t} = e^{\rho(p-t)}$$

$$A(t;p) = (1-d)^{t-p} = (1+i)^{-(t-p)}$$

Equilibrio estático:

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n$$

$$C_o = C_n \times (1+i)^{-n} = (1-d)^n$$

Equilibrio dinámico:

$$C_\tau = C_0 \times (1+i)^t = C_n \times (1+i)^{-(n-t)} = C_n \times (1-d)^{n-t}$$

Método retrospectivo

Método prospectivo

Método recurrente

$$C_{\tau'} = C_\tau * (1+i)^{(\tau'-\tau)}$$

Corto plazo

Son operaciones con duración inferior a un año.

Las leyes financieras que se utilizan en estas operaciones a corto plazo suelen ser leyes simples:

Capitalización simple y descuento simple, ya sea comercial o racional.

Capitalización simple

La ley de capitalización simple $L(t;p) = 1 + i * (p - t)$ se suele utilizar cuando la duración es inferior a un año y es conocido el primer capital (C_0, t_0).

Es habitual fijar el punto $p = t_n$,

estableciéndose de este modo la equivalencia financiera, en el análisis estático:

$$C_n = C_0 * [1 + i \times (t_{n-}t_0)] = C_0 \times \left[1 + \frac{i \times n}{365}\right]$$

En el análisis dinámico, por el método retrospectivo, una vez alcanzado s días de duración, desarrollando el factor financiero, el saldo financiero se expresa así:

$$C_\tau = C_0 \times u\left[0, \frac{s}{365}\right] = C_0 \times \left[\frac{365 + i \times n}{365 + i \times (n - s)}\right]$$

Por el método prospectivo:

$$C_\tau = C_0 \times u\left[\frac{s}{365}, \frac{n}{365}\right] = C_n \times \left[\frac{365}{365 + i \times (n - s)}\right]$$

Descuento comercial y descuento racional

Se usan en la práctica cuando se conoce $(C_n; t_n)$.

Se sitúa $p\ en\ t_0$.

El tiempo igualmente, suele medirse en días.

- Al aplicar el **descuento comercial**:

Con duración n días y ley $A(t;p) = 1 - d\ *\ (t - p)$, la equivalencia financiera es:

$$C_0 = C_n * [1 - d \times (t_{n-}t_0)] = C_0 \times \left[1 - \frac{d \times n}{365}\right]$$

Y el saldo transcurridos s días por el método prospectivo es:

$$C_\tau = C_n \times v\left[\frac{s}{365}, \frac{n}{365}\right] = C_n \times \left[\frac{365 - d \times n}{365 - d \times s}\right]$$

- Al aplicar el **descuento racional**:

Con duración n días y ley $A(t;p) = \frac{1}{1+i\times(t-p)}$, la equivalencia financiera es:

$$C_0 = C_n * \left[\frac{365}{365 + i \times n}\right]$$

Y el saldo transcurridos s días por el método prospectivo es:

$$C_\tau = C_n * \left[\frac{365 + i \times s}{365 + i \times s}\right]$$

Operaciones financieras compuestas

Son aquellas que están formadas por más de un capital financiero, bien en la prestación, bien en la contraprestación, o en ambas.

Dado que suelen ser operaciones a largo plazo, las vamos a estudiar según la ley financiera de capitalización compuesta

Existen varios casos, como el de una prestación y varias contraprestaciones corresponde a una amortización de capital, por ejemplo, en un préstamo, el de varias prestaciones y varias contraprestaciones, como por ejemplo operaciones de crédito reciproco o operaciones compuestas por varias prestaciones y una única contraprestación a l final de la operación, como es el caso de las operaciones de constitución de capital

Operación de constitución

Estas operaciones tienen por objeto la formación de un capital (C_n, t_n) mediante la entrega de n importes, o imposiciones periódicas, que reciben el nombre de términos constitutivos.

(C_n, t_n) recibe el nombre de capital constituido.

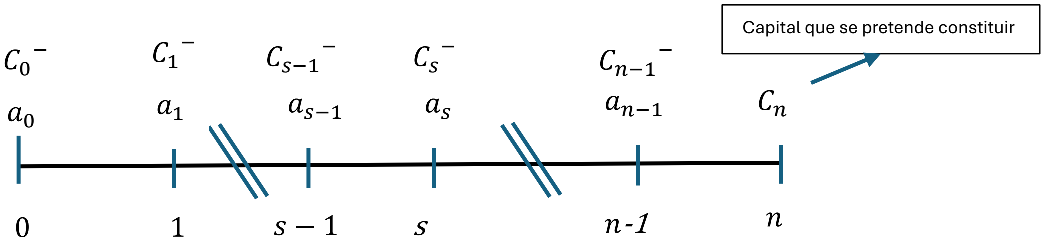
Las imposiciones pueden ser constantes o variables y prepagables o pospagables.

Operación de constitución de términos constitutivos variables prepagables.

Estudiamos en primer lugar las operaciones que están constituidas por términos constitutivos variables de forma general.

Estos términos, a_s, tienen si vencimiento al principo de cada periodo.

Consideramos los réditos de valoración de la operación constantes.



La ecuación de Equilibrio Financiera calculada al final de la operación:

$$C_n = \sum_{s=0}^{n-1} a_s * (1+i)^{n-s}$$

Al capital constituido hasta el periodo s y hallado por la izquierda

se le denomina C_s^-.

Por el método retrospectivo:

Suma de capitales constituidos en s por la izquierda

$$C_s^- = \sum_{r=0}^{s-1} a_r * (1+i)^{s-r}$$

Por el método prospectivo:

$$C_s^- = C_n * (1+i)^{-(n-s)} - \left(a_s + \sum_{r=s+1}^{n-1} a_r * (1+i)^{-(r-s)}\right)$$

Capital que se quiere constituir valorado en s

Capital que queda por constituir en s

Por el método recurrente:

$$C_s^- = (C_{s-1}^- + a_{s-1}) * (1+i)$$

$$C_s^- - C_{s-1}^- = (C_{s-1}^- + a_{s-1}) * i + a_{s-1}$$

$$A_s^- = I_s^- + a_{s-1}$$

Cuota de constitución del periodo s

Cuota de interés del periodo s

Termino constitutivo o imposición efectuada al principio del periodo s

Definimos el capital pendiente de constituir como $\mathfrak{M}_s^- = C_n - C_s^-$

Dando valores para a_s podemos definir las siguientes relaciones.

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} A_k{}^{-}$$

$$C_s{}^{-} = \sum_{k=1}^{s} A_k{}^{-}$$

$$\mathfrak{M}_s^{-} = \sum_{k=s+1}^{n} A_k{}^{-}$$

$$A_1{}^{-} = C_1{}^{-} = a_0 * (1+i)$$

Con estas expresiones , $(a_s,, I_s{}^{-}, A_s{}^{-}, C_s{}^{-}, \mathfrak{M}_s^{-})$, podemos construir el cuadro de constitución que plantea un esquema de la operación en el tiempo.

Partiendo de este esquema general, podemos planteamos dos casos particulares con réditos constantes.

Términos constitutivos constantes

Se verifica que $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = a$

Utilizando los mismos razonamientos antes expuestos podemos desarrollar el cuadro constitutivo.

$$C_n = a * \ddot{s}_{n\rceil i}$$

Método retrospectivo:

$$C_s{}^{-} = a * \ddot{s}_{s\rceil i}$$

Método prospectivo:

$$C_s{}^{-} = C_n * (1+i)^{-(n-s)} - a * \ddot{a}_{n-s\rceil i}$$

Método recurrente:

$$C_s{}^{-} = (C_{s-1} + a)(1+i)$$

$$A_s{}^{-} = (C_{s-1} + a) * i + a$$

$$A_{s+1}{}^{-} = A_1 * (1+i)^s = a * (1+i)^{s+1}$$

Esta expresión permite conocer las cuotas de constitución una vez conocido $A_1{}^{-}$o a. Las cuotas crecen con razón geométrica (1+i).

$$C_n = A_1^- * S_{n\rceil i}$$

$$C_s^- = A_1^- * S_{s\rceil i} = C_n * \frac{S_{s\rceil i}}{S_{n\rceil i}}$$

Cuotas de constitución constantes

$$A_1^- = A_2^- = \cdots = A_n^- = A^-$$

$$C_n = n * A^-$$

Al ser A constante e I creciente, a_s es decreciente.

Y desarrollando los mismos razonamientos ya expuestos:

$$C_s^- = C_n * \frac{s}{n}$$

$$\mathfrak{M}_s^- = C_n * \frac{n-s}{n}$$

$$a_s = a_{s-1} - \frac{A^- * i}{1+i}$$

$$a_s \; decrece \; aritmeticante \; con \; una \; razon \; \frac{A^- * i}{1+i}$$

$$a_0 = \frac{A^-}{1+i}$$

Operación de constitución de términos constitutivos variables pospagables.

En este caso la última imposición coincide con la retirada del capital constituido.

El saldo financiero de la operación se halla por la derecha y se denomina C_s.

$$C_n = \sum_{s=0}^{n-1} a_s * (1+i)^{n-s}$$

Por el método retrospectivo:

$$C_s = \sum_{r=1}^{s} a_r * (1+i)^{s-r}$$

Por el método prospectivo:

$$C_s = C_n * (1+i)^{-(n-s)} - \sum_{r=s+1}^{n} a_r * (1+i)^{-(r-s)}$$

Por el método recurrente:

$$A_s = I_s + a_s$$

definimos las siguientes relaciones.

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

$$C_s = \sum_{k=1}^{s} A_k$$

$$\mathfrak{M}_s = \sum_{k=s+1}^{n} A_k$$

$$C_0 = 0$$

$$a_1 = A_1 = C_1$$

Términos constitutivos constantes

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = a$$

$$C_n = a * S_{n\rceil i}$$

$$C_s = a * S_{s\rceil i}\,(retrospectivo)$$

$$C_s = C_n * (1+i)^{-(n-s)} - a * S_{n\rceil i}(prospectivo)$$

$$C_s = C_{s-1} * (1+i) + a\ (recurrente)$$

$$A_{s+1} = A_s(1+i) = A_1 * (1+i)^s$$

Las cuotas crecen en progresión geométrica de razón (1+i).

$$A_1 = a = \frac{C_n}{S_{n\rceil i}}$$

$$C_n = A_1 * S_{n\rceil i}$$

$$C_s = A_1 * S_{s\urcorner i} = \frac{C_n * S_{s\urcorner i}}{S_{n\urcorner i}}$$

$$\mathfrak{M}_s = C_n - C_s = C_n * \left(1 - \frac{S_{s\urcorner i}}{S_{n\urcorner i}}\right) = C_n * \frac{a_{n-s\urcorner i}}{a_{n\urcorner i}}$$

Caso de cuotas de constitución constantes

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$$

$$C_n = n * A$$

$$C_s = s * A$$

$$\mathfrak{M}_s = (n - s) * A$$

Al subir la cuota de interés y ser la cuota de constitución constante, los términos constitutivos decrecen en progresión aritmética $A * i$.

Restamos

$$\begin{array}{rl} & C_{s+1} = C_s * (1 + i) + a_{s+1} \\ - & C_s = C_s * (1 + i) + a_{s+1} \\ \hline & A = A * (1 + i) + a_{s+1} - a_s \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$A - A = A * i + a_{s+1} - a_s$$

$$\downarrow$$

$$a_{s+1} = a_s - A * i$$

$$Siendo\ A = a_1$$

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 4. Operaciones financieras compuestas: Operaciones de amortización. Estudio estático y dinámico. Diversas interpretaciones del proceso de la amortización. Equivalencia de las mismas. Cuadro de amortización.

Edición Noviembre 2025

(Véase Introducción a las operaciones financieras y operaciones financieras compuestas en temas anteriores).

Operación de amortización

En este tema, el tipo de operaciones compuestas que se estudiarán serán las de amortización.

Son operaciones de saldo financiero siempre positivo hasta el final de la renta

Estas son las que se componen de una única prestación, entregada al principio de la operación y una contraprestación múltiple.

Los capitales que componen la contraprestación contienen los capitales que satisfacen el capital entregado como prestación más los intereses que va generando la operación.

Estos capitales se denominan términos amortizativos, (a_i, t_i), y conforman la renta financiera que es equivalente a la prestación, valoradas en el origen de la operación.

La equivalencia financiera la planteamos de un modo general que se trata de amortizar el capital (C_0, t_0) con términos amortizativos variables (a_i, t_i),, valorando la operación con réditos de cada periodo variables i_n:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$$

El saldo financiero de la operación en las operaciones de amortización se denomina saldo vivo o capital pendiente de amortizar.

Hallaremos los saldos por la derecha, es decir, un instante después del vencimiento de cada termino amortizativo.

EL capital vivo en t_s lo escribimos como C_s y aplicando el método prospectivo:

$$C_S = \sum_{r=s+1}^{n} a_s * \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

Al aplicar el método recurrente, suponiendo que ya se obtuvo C_{S-1}:

$$C_S = C_{S-1} \times (1 + i_s) - a_s$$

Despejando:

$$a_s = C_{S-1} * i_s + (C_{S-1} - C_S) = I_s + A_s$$

Así, cada termino amortizativo es dedicado a pagar:

$$interes\ del\ capital\ vivo\ al\ principio\ del\ periodo$$

$$I_s = C_{S-1} * i_s = cuota\ de\ interes\ del\ periodo\ s$$

$$disminuir\ la\ deuda\ pendiente$$

$$A_s = (C_{S-1} - C_S) = cuota\ de\ amortizacion\ del\ periodo\ s$$

El capital amortizado en los s primeros periodos se escribe M_s y es la diferencia entre el capital prestado C_0 y el capital vivo C_s

$$M_s = C_0 - C_s$$

De este modo y bajo las premisas anteriores, teniendo en cuenta que $C_n = 0$ en t_n, se obtiene que el capital prestado es la suma aritmética de las cuotas de amortización:

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Y que el capital amortizado en los s primeros periodos es la suma de las s primeras cuotas de amortización:

$$M_s = \sum_{k=1}^{s} A_k$$

El capital vivo, después de transcurridos s periodos, es igual a la suma de las n-s ultimas cuotas de amortización:

$$C_s = \sum_{k=s+1}^{n} A_k$$

Podemos decir que el capital prestado C_0 es la suma financiera de los términos amortizativos a_s y la suma aritmética de las cuotas de amortización A_s.

Normalmente $C_0 \geq C_1 \geq \cdots \geq C_n \implies A_s \geq 0\ \forall s$ y se dice que existe Regularidad en la amortización.

Diversas interpretaciones

La operación de amortización admite diversas interpretaciones según sea la finalidad que se supone deben cumplir los términos amortizativos (a_s, t_s)

Todas son equivalentes, ya que conducen a la misma reserva matemática.

Existen muchas interpretaciones, pero aquí expondremos las más significativas.

Amortización como suma de operaciones simples simultaneas

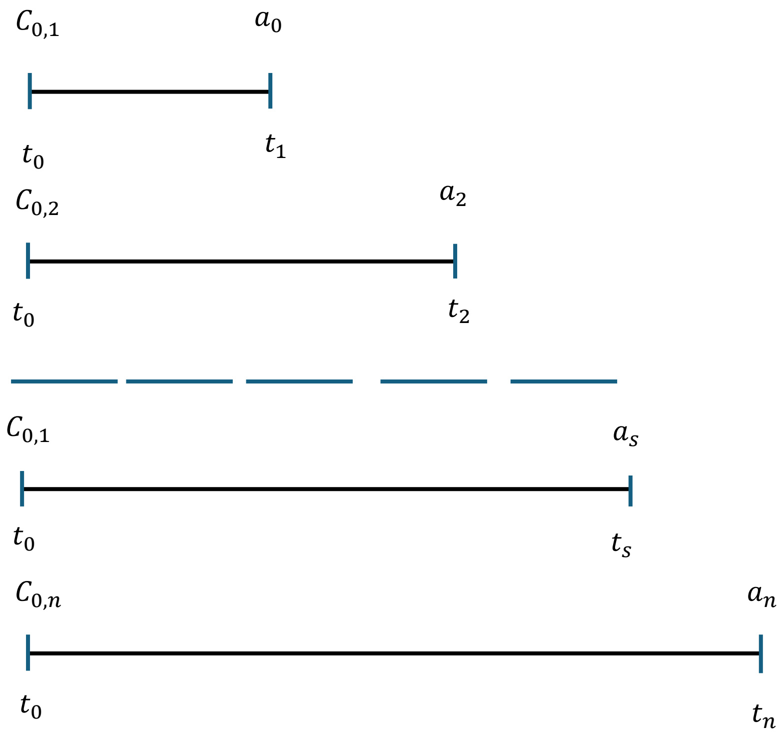
Consideramos la operación como una suma de n operaciones simples de origen

común t_0.

Cada prestación $\left(C_{0,s}, t_0\right)$ es equivalente a la contraprestación (a_s, t_s).

Consecuencia de esto, a partir de la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1} = C_0 = \sum_{s=1}^{n} C_{0,s}$$



En el momento t_n , una vez que se ha satisfecho el termino (a_s, t_s) , la cuantía del capital vivo es la suma de las reservas particulares de las n-s operaciones no extinguidas.

$$C_S = \sum_{r=s+1}^{n} a_s * \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

Equivalente a la expresión que utilizamos en el método prospectivo.

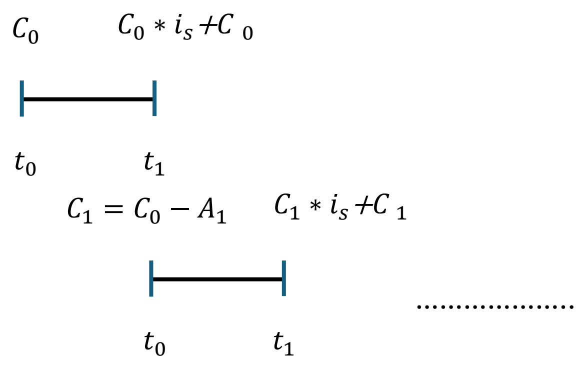
Amortización como suma de amortizaciones sucesivas

Basada en el método recurrente que relaciona el capital vivo en dos vencimientos sucesivos.

Podemos decir que es equivalente a la descomposición del término amortizativo:

$$a_s = C_{S-1} * i_s + A_s$$

Se hace la suposición de que en cada periodo está definida una operación simple de prestación C_{S-1} y contraprestación $C_{S-1} * (1 + i_s)$ pero llegado el vencimiento d ela contraprestación, en vez de satisfacerla, se prorroga la operación para el periodo siguiente por una cuantía C_S , previo pago de los intereses $C_{S-1} \times i_s$ y de la diferencia entre las prestaciones $C_{S-1} - C_S$, es decir la cuota de amortización del periodo s. Estas dos contraprestaciones son equivalentes a a_S.



Así, la relación entre la cuantía del capital prestado en dos operaciones consecutivas es:

$$C_s = C_{S-1} * (1 + i_s) - a_s$$

Su aplicación consecutiva de 1 a s o de 1 a n nos conduce a las equivalencias estudiadas para la amortización.

Amortización por constitución del montante

La equivalencia financiera en t_n

$$C_0 * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) = \sum_{s=1}^{n-1} a_s * \prod_{h=s+1}^{n} (1 + i_h) + a_n$$

Se puede interpretar como que los términos (a_s, t_s) constituyen en t_n el capital de cuantia $C_n^{'}$ que es el capital C_0 capitalizado en t_n. Equivalente a considerar la operación como un préstamo simple mas una operación de prestación múltiple (los (a_s, t_s)) y una contraprestación única, es decir una constitución de $(C_n^{'}, t_n)$.

El prestamista es acreedor del valor del capital prestado y deudor del capital ya constituido.

El prestatario es deudor del capital recibido y acreedor del capital ya constituido.

Amortización con fondos de amortización

Suponemos que una parte de a_s se dedica al pago de intereses del capital inicial y el resto, F_s se dedica a constituir el capital inicial en t_n.

$$a_r = C_0 * i_r + F_r$$

Sustituyendo en la expresión del capital vivo por el método retrospectivo se puede demostrar que, para todo valor de s, la reserva o capital vivo

$$C_s = C_0 - \sum_{r=1}^{s} F_r * \prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

Para s=n, $C_n = 0$,de modo que

$$C_0 = \sum_{r=1}^{s} F_r * \prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

Los fondos F_s constituyen el capital (C_0, t_n)

Amortización mixta

Descomponemos los términos amortizativos a_s en una parte D_s destinada a disminuir la deuda y el resto F_s a constituir un capital que iguale el importe restante de la deuda en t_n.

Sustituyendo $a_r = D_r + F_r$ en la ecuación de la reserva matemática por el método prospectivo en t_s obtenemos:

$$C_s = C_0 * \prod_{h=1}^{n}(1 + i_h) - \sum_{r=1}^{s}(D_r + F_r) * \prod_{h=1}^{s}(1 + i_h) = C_s^{'} - C_s^{''}$$

Siendo

$$C_s^{'} = C_0 * \prod_{h=1}^{n}(1 + i_h) - \sum_{r=1}^{s} D_r * \prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

$$C_s^{''} = \sum_{r=1}^{s} F_r * \prod_{h=1}^{s}(1 + i_h)$$

En s=n,

$C_n = 0 \rightarrow C_n^{'} = C_n^{''}$

Demostrando que los D aplicados directamente a la amortización de C_0 alcanzan para amortizar una capital $C_0 - C_n^{'}$, siendo necesario la aportación de un ultimo capital en t_n i gual a la cuantía del capital constituido con F_r .

Suma de amortizaciones americanas

podemos decir que es la agrupación de n operaciones de amortización de sistema americano, cada una de prestación (A_s, t_0) y duración hasta t_s , para s= 1,2,...,n .

Se origina así una operación con una prestación

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} A_s$$

Y una contraprestación

$$(a_1, t_1), (a_2, t_2), \dots, (a_n, t_n)$$

$$siendo\ a_s = i_s * \sum_{r=s}^{n} A_r + A_s$$

La cuantía de la deuda en t_s coincide con el capital inicial.

La suma de la reserva matemática en t_s de todas las amortizaciones de sistema americano que aun no se han extinguido es $A_{s+1}+A_{s+2} + \cdots + A_n = C_s$, es decir la cuantia del capital vivo de la operación total.

Cuadro de amortización

Refleja ordenadamente la evolución de la operación y es un buen resumen que permite conocer la situación de la operación en cada momento.

Periodo	Términos amortizativos	Cuota de intereses	Cuota de amortización	Capital amortizado	Capital vivo
0					C_0
1	a_1	I_1	A_1	M_1	C_1
...	...	...	...	...	...
s	a_s	I_s	A_s	M_s	C_s
...	...	...	...	...	...
n	a_n	I_n	A_n	$M_n = 0$	$C_n = 0$

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 5. Rédito medio correspondiente a una operación financiera. Tanto medio. Operaciones financieras con características o condiciones comerciales complementarias. Rédito medio efectivo. Rédito medio del acreedor y rédito medio del deudor. Aplicación en operaciones financieras. Operación elemental, operación de constitución, operación de amortización.

Edición Noviembre 2025

MAGNITUDES DERIVADAS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

La cuantía y el vencimiento de los capitales financieros, que componen un espacio financiero y participan en las operaciones financieras, son magnitudes llamadas primarias y fundamentales.

Pueden ser medidas directamente y es posible elegir sus unidades de medida.

Las magnitudes que aparecen como resultado de las operaciones realizadas con las magnitudes fundamentales son las magnitudes derivadas y sus unidades de medida dependerán de las unidades en las que se midieron las fundamentales.

Factor financiero

El concepto de factor financiero surge al aplicar la definición de equivalencia financiera. Va asociado a un intervalo temporal $(t_1; t_2)$ y es el numero por el que hay que multiplicar una cuantía en un extremo para obtener la cuantía equivalente en el otro extremo.

$$(C_1; t1) \sim (C_2; t_2) \Rightarrow C_1 \times F(t_1; p) = C_2 \times F(t_2; p)$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\mathrm{F}(t_1; \mathrm{p})}{\mathrm{F}(t_2; \mathrm{p})} = f(t_1; t_2; p)$$

$$C_2 = C_1 \times f(t_1; t_2; p)$$

Siendo $f(t_1; t_2; p)$ el factor financiero asociado al intervalo $(t_1; t_2)$

Dado el principio de subestimación de capitales futuros, cuando el factor financiero es mayor que 1, nos desplazamos a la derecha en la línea temporal y hacia la izquierda cuando es menor que 1.

Propiedades de los factores

- Son de dimensión cero respecto a C y T.
- Dependen de la situación de P
- Cumplen la propiedad multiplicativa; Ejemplo: $u(t_1; t_2) * u(t_2; t_3) = u(t_1; t_3)$

Réditos

Podemos definir el rédito como el complemento a la unidad en valor absoluto del correspondiente factor financiero.

Y es útil para calcular los incrementos (interés o descuento) que experimenta la cuantía de un capital al trasladar su vencimiento en el tiempo.

Tantos de capitalización y descuento

El tanto es el resultado de dividir el redito entre la amplitud del intervalo de tiempo

Así, lo podemos definir como el redito por unidad de tiempo o el redito promedio de ese intervalo.

Los Tantos miden el incremento por unidad de cuantía y por unidad de tiempo al pasar de un extremo a otro del intervalo $(t_1; t_2)$

Dado que el factor y el redito son de dimensión cero respecto a la cuantía, el tanto también lo será y es de dimensión -1 respecto al tiempo.

También se les suele llamar tipo de interés o de descuento.

Tantos en capitalización

El tanto de capitalización, también se denomina tipo de interés o tasa, se representa con ρ.

Dada la definición de tanto y redito obtenemos.

$$\rho\ (t_1; t_2) = \frac{i(t_1; t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1) \times (L(t_2; p)}$$

Para el tanto de contracapitalización se obtiene:

$$\rho'\ (t_1; t_2) = \frac{i'(t_1; t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{L(t1; p) - L(t2; p)}{(t2 - t1) \times L(t1; p)}$$

Tantos en descuento

Lo representamos con δ, y de manera análoga al tanto de capitalización obtenemos:

Tanto de descuento

$$\delta(t1; t2) = \frac{d(t1; t2)}{t2 - t1} = \frac{A(t1; p) - A(t2; p)}{(t2 - t1) \times A(t1; p)}$$

Tanto de contradescuento

$$\delta'\ (t1; t2) = \frac{d'(t1; t2)}{t2 - t1} = \frac{A(t1; p) - A(t2; p)}{(t2 - t1) \times A(t2; p)}$$

Rédito medio correspondiente a una operación financiera.

Cuando un sujeto económico decide realizar o participar en una operación financiera, suele disponer de más de una opción para elegir y será interesante para el sujeto poder juzgar cual será la más rentable o la menos gravosa.

Sin tener en cuenta ninguna otra posible característica anexa a la operación, más que en igual de condiciones entre las partes, cumplir con el principio de equilibrio financiero, usamos para comparar diversas operaciones, generalmente, el tanto efectivo o redito anual (i) utilizado en la ley financiera de capitalización compuesta, que iguala prestaciones y contraprestaciones en el origen o en el final de la operación financiera.

Utilizamos comúnmente la ley de capitalización compuesta, pero pueden usarse otras leyes financieras en la comparación entre operaciones según sea su naturaleza.

Así podemos considerar al tanto efectivo de la operación como el índice de coste o rentabilidad para cualquier operación financiera.

Cuando el tipo de interés o redito es constante, el cálculo del tanto efectivo anual no tiene complicación y satisface las ecuaciones de equilibrio de la ley financiera usada en la operación.

Si los réditos son variables para n periodos de duración de la operación financiera, a partir de la ecuación de equilibrio financiero podemos obtener el redito medio (i_m), que será constante y que aplicado en los n periodos de la operación, sustituyendo a $\{i_1,\ i_2\ , \dots , i_{m,}\}$, siga verificando la equivalencia financiera entre prestraicon y conrarestacion.

Una vez conocido el redito medio, cuando los periodos difieran del anual, debemos convertirlos en tanto efectivo o redito medio anual con la siguiente formula.

$$i = (1 + i_m)^r - 1$$

Siendo r = número de periodos por año e i el tanto efectivo anual.

Operaciones financieras con características o condiciones comerciales complementarias

Por otro lado, en las operaciones financieras es habitual que, además de las condiciones contractuales, aparezcan otras características o condiciones comerciales que van a incidir en el resultado de la operación financiera.

Estas características comerciales pueden ser tanto internas como externas a la operación financiera, exigiendo el desembolso de alguna cuantía adicional a cualquiera de las dos partes, alterando así el equilibrio original financiero de la operación pura (llamada así cuando no existen características comerciales) entre prestación y contraprestación y variando el tanto efectivo de la operación entre lo realmente entregado y percibido.

Dicho de otro modo, el tanto efectivo es aquel que establece el equilibro financiero entre lo realmente recibido y realmente desembolsado por cada parte.

Cuando una operación es pura, el tanto medio de la operación también es el tanto efectivo para ambas partes.

Clasificamos las características comerciales en dos grupos:

Bilaterales

Unilaterales

Bilaterales.

Repercuten sobre las dos partes contratantes de modo que se cumple:

Prestación real entregada por el prestamista = Prestación real recibida por el prestatario.

Contraprestación real recibida por el prestamista = Contraprestación real entregada por el prestatario.

Este tipo de características son entregadas por una parte y va a parar a la otra parte.

Como pueden ser las comisiones bancarias, que cobran estas entidades en las operaciones que participan o primas de emisión o amortización que entrega el emisor de un empréstito a los obligacionistas, por poner dos ejemplos.

Podemos distinguir, también, entre las que modifican las cuantías de los capitales de igual forma para ambas partes (Bonificaciones, recargos, lotes, primas,...) y las que modifican los vencimientos, anticipando o difiriendo algún capital o su fraccionamiento, siempre que no se hubiera tenido en cuenta en la equivalencia financiera.

Unilaterales.

Solo afectan a uno de los contratantes y a una tercera parte ajena a la operación.

En este caso no se verifica la igualdad anterior:

Prestación real entregada por el prestamista ≠ Prestación real recibida por el prestatario.

Contraprestación real recibida por el prestamista ≠ Contraprestación real entregada por el prestatario.

Características comerciales que suponen una salida de capitales al exterior de la operación:

Gastos iniciales: publicidad, escritura notarial, impuestos de contratación, etc.

Gastos periódicos: gastos de administración, impuestos sobre rendimientos, comisiones sobre capítulos percibidos, etc.

Dependiendo de si los gastos son del prestamista o del prestatario:

Prestamista. Mayor valor de prestación entregada o menor valor de contraprestación recibida.

Prestatario. Menor valor de prestación recibida o mayor valor de contraprestación entregada

Características comerciales que suponen una entrada de capitales del exterior de la operación:

Ingresos iniciales: Bonificaciones, primas de inversión, desgravaciones, ...

Ingresos finales: premios o bonificaciones por cancelación.

Ingresos periódicos: Derecho a primas, loterías bonificaciones sobre cantidades percibidas, ...

Dependiendo de si los gastos son del prestamista o del prestatario:

Prestamista. Menor valor de prestación entregada o mayor valor de contraprestación recibida.

Prestatario. Mayor valor de prestación recibida o menor valor de contraprestación entregada.

Rédito medio del acreedor y rédito medio del deudor.

Cuando la operación es pura, el tanto medio de la operación es también el tanto efectivo para ambas partes.

Pero en la práctica, este tanto efectivo es el que viene condicionado por las características comerciales y es el que va a dar respuesta al decisor sobre qué operación financiera es preferible.

Como ya se ha dicho, las características comerciales, al ser marginales a la operación pura, modifican, como hemos dicho, el valor de prestación y contraprestación y hacen que la equivalencia financiera que se cumple para la operación con la ley financiera pactada y al redito medio i_m (redito medio nominal o puro) deje de verificarse.

El redito constante i_a establece ahora la equivalencia financiera entre la prestacione real entregada por el prestamista y la contraprestación real recibida por él.

$$i_a = redito\ medio\ efectivoactivo\ o\ acreedor$$

De un modo análogo

$$i_p = redito\ medio\ efectivo\ pasivo\ o\ deudor$$

$$prestacion\ real\ entregada\ por\ el\ acreedor \underset{i_a}{\sim} prestacion\ real\ recibida\ por\ el\ deudor$$

$$prestacion\ real\ entregada\ por\ el\ acreedor \underset{i_p}{\sim} prestacion\ real\ recibida\ por\ el\ deudor$$

Cuando solo se tienen en cuenta las características comerciales bilaterales, entonces:

$$i_a = i_p = i_e$$

Siendo i_e = redito medio efectivo de la operación.

La diferencia entre $i_e - i_m$ mide la repercusión de las características comerciales bilaterales d ela operación.

En las características unilaterales $i_a - i_e$ y $i_p - i_e$ miden la repercusión para acreedor y deudor respectivamente.

En el caso de uniformidad de los intervalos que constituyen cada periodo de la operación financiera

$$\frac{i_a}{s} = \rho_a = tanto\ efectivo\ acreedor$$

$$\frac{i_p}{s} = \rho_p = tanto\ efectivo\ deudor$$

$$\frac{i_e}{s} = \rho_e = tanto\ efectivo\ acreedor$$

Aplicación en operaciones financieras

Operación elemental

Tenemos una operación elemental general en la que

$i_h = redito\ del\ intervalo\ y\ i_m = redito\ medio$

$C_0 = C_n * \prod_{h=1}^{n}(1+i_h)^{-1} = C_n * (1+i_m)^{-n}$

De modo que para n intervalos de amplitud uniforme $\frac{t_n - t_0}{n}$, i_m puede ser considerado el redito de capitalización compuesta para el periodo de amplitud s; y $\frac{i_m}{s}$ el tanto medio.

Se deduce que i_m es el factor constante de capitalización y es la media geométrica de los factores de capitalización de los distintos intervalos.

$$1 + i_m = \left[\prod_{h=1}^{n}(1 + i_h\right]^{\frac{1}{n}}$$

Suponemos las siguientes características comerciales.

Unilaterales para el prestamista:

$$G_0^a = Gastos\ iniciales\ en\ t_0$$

$$G_n^a = Gastos\ finales\ en\ t_n$$

$$T_n^a = Impuestos\ sobre\ rendimientos\ en\ t_n$$

Unilaterales para el deudor:

$$G_0^p = Gastos\ iniciales\ en\ t_0$$

$$G_n^p = Gastos\ finales\ en\ t_n$$

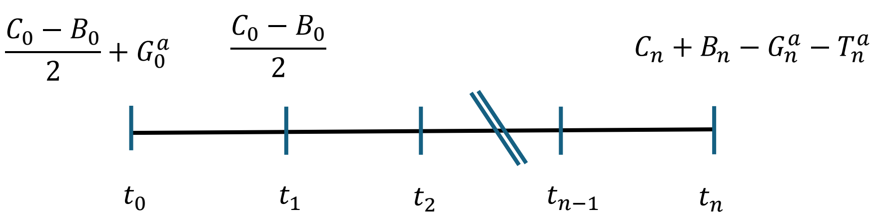
Bilaterales:

B_0= Bonificacion inicial para acreedor que disminuye la prestacion real entregada por el prestamista y recibida por el prestatario $(C_0 - B_0, t_0)$

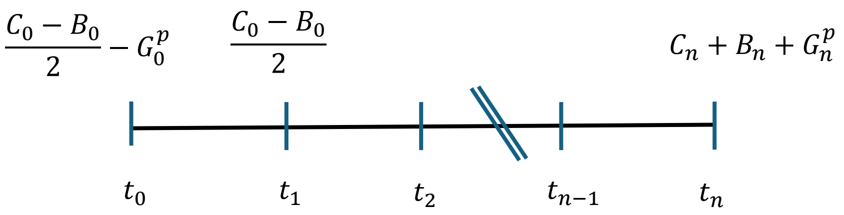
B_n= Bonificacion final para acreedor que aumenta la contraprestacion real entregada por el prestamista y recibida por el prestatario $(C_n + B_n, t_0)$

Fraccionamiento de la prestación real entregadas por prestamista y recibida por prestatario en $t_0\ y\ t_1$.

Representación para acreedor



Representación para deudor



Ecuación de equilibrio financiero del Acreedor en el origen:

$$\frac{C_0 - B_0}{2} + G_0^a + \left(\left(\frac{C_0 - B_0}{2}\right) * (1 + i_a)^{-1}\right) = (C_n + B_n - G_n^a - T_n^a) * (1 + i_a)^{-n}$$

Ecuación de equilibrio financiero del deudor en el origen:

$$\frac{C_0 - B_0}{2} - G_0^p + \left(\left(\frac{C_0 - B_0}{2}\right) * \left(1 + i_p\right)^{-1}\right) = \left(C_n + B_n + G_n^p\right) * \left(1 + i_p\right)^{-n}$$

operación de constitución

$$C_n = \sum_{r=0}^{n-1} a_r * \prod_{h=r+1}^{n} (1 + i_h) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r * (1 + i_m)^{n-r}$$

i_m *permite formar* $(C_n . t_n)$ igual que lo hacen los distintos i_h

Para $a_r > 0\ y\ i_h > 0$, existe una solución real única mayor que cero y que pertenece al intervalo unión de los intervalos de la operación.

para n intervalos de amplitud uniforme $\frac{t_n - t_0}{n}$, i_m puede ser considerado el redito de capitalización compuesta para el periodo de amplitud s, y $\frac{i_m}{s}$ el tanto medio.

Si aplicamos características comerciales, por ejemplo, en un caso muy sencillo:

Unilaterales para el sujeto que constituye el capital:

$$G_0^a = Gastos\ iniciales\ en\ t_0$$

$$G_n^a = Gastos\ finales\ en\ t_n$$

Solo cambiará en este caso la ecuación de equilibrio para el sujeto que constituye el capital y quedaría la ecuación de equilibrio financiera en el final.

$$C_n + G_n^a = G_n^a * \left(1 + i_p\right)^{-n} + \sum_{r=0}^{n-1} a_r * (1 + i_p)^{n-r}$$

Operación de amortización

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r * \prod_{h=1}^{n} (1 + i_h)^{-1} = \sum_{r=1}^{n} a_r * (1 + i_m)^{-r}$$

Estudiamos un caso con características comerciales

Unilaterales para el acreedor:

$$G_0^a = Gastos\ iniciales\ en\ t_0$$

$$G_n^a = Gastos\ finales\ en\ t_n$$

$$T_r^a = Impuestos\ periodicos\ \ sobre\ rendimientos$$

Unilaterales para el deudor:

$$G_0^p = Gastos\ iniciales\ en\ t_0$$

$$G_n^p = Gastos\ finales\ en\ t_n$$

$$G_r^p = Gastos\ periodicos\ de\ administracion$$

Bilaterales:

B_0= Bonificacion inicial para acreedor que disminuye la prestacion real entregada por el prestamista y recibida por el prestatario $(C_0 - B_0, t_0)$

P_r =Prima periódica que aumenta a_r a favor del prestamista

$$a_r' = a_r + P_r$$

Desde el punto de vista del acreedor:

$$C_0 - B_0 + G_0^a = \sum_{r=1}^{n} (a_r + P_r - T_r^a) * (1 + i_a)^{-r} - G_n^a * (1 + i_a)^{-n}$$

Desde el punto de vista del deudor:

$$C_0 - B_0 - G_0^p = \sum_{r=1}^{n} (a_r + P_r + G_r^p) * \left(1 + i_p\right)^{-r} + G_n^p * (1 + i_p)^{-n}$$

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 6. Operación de amortización. Valor del préstamo. Valor del usufructo. Valor de la nuda propiedad. Fórmula de Makeham. Aplicación a los principales casos particulares.

Edición Noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Operación de amortización

En este tema, el tipo de operaciones compuestas (ver operaciones financieras y operaciones compuestas en temas anteriores) que se estudiarán serán las de amortización.

Son operaciones de saldo financiero siempre positivo hasta el final de la renta

Estas son las que se componen de una única prestación, entregada al principio de la operación y una contraprestación múltiple.

Los capitales que componen la contraprestación contienen los capitales que satisfacen el capital entregado como prestación más los intereses que va generando la operación.

Estos capitales se denominan términos amortizativos, (a_i, t_i), y conforman la renta financiera que es equivalente a la prestación, valoradas en el origen de la operación.

La equivalencia financiera la planteamos de un modo general que se trata de amortizar el capital (C_0, t_0) con términos amortizativos variables (a_i, t_i),, valorando la operación con réditos de cada periodo variables i_n:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s \times \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$$

El saldo financiero de la operación en las operaciones de amortización se denomina saldo vivo o capital pendiente de amortizar.

Hallaremos los saldos por la derecha, es decir, un instante después del vencimiento de cada termino amortizativo.

EL capital vivo en t_s lo escribimos como C_s y aplicando el método prospectivo:

$$C_S = \sum_{r=s+1}^{n} a_s \times \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

Al aplicar el método recurrente, suponiendo que ya se obtuvo C_{S-1}:

$$C_S = C_{S-1} \times (1 + i_s) - a_s$$

Despejando:

$$a_s = C_{S-1} \times i_s + (C_{S-1} - C_S) = I_s + A_s$$

Así, cada termino amortizativo es dedicado a pagar:

$$interes\ del\ capital\ vivo\ al\ principio\ del\ periodo$$

$$I_s = C_{S-1} \times i_s = cuota\ de\ interes\ del\ periodo\ s$$

$$disminuir\ la\ deuda\ pendiente$$

$$A_s = (C_{S-1} - C_S) = cuota\ de\ amortizacion\ del\ periodo\ s$$

El capital amortizado en los s primeros periodos se escribe M_s y es la diferencia entre el capital prestado C_0 y el capital vivo C_s

$$M_s = C_0 - C_s$$

De este modo y bajo las premisas anteriores, teniendo en cuenta que $C_n = 0$ en t_n, se obtiene que el capital prestado es la suma aritmética de las cuotas de amortización:

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Y que el capital amortizado en los s primeros periodos es la suma de las s primeras cuotas de amortización:

$$M_s = \sum_{k=1}^{s} A_k$$

El capital vivo, después de transcurridos s periodos, es igual a la suma de las n-s ultimas cuotas de amortización:

$$C_s = \sum_{k=s+1}^{n} A_k$$

Podemos decir que el capital prestado C_0 es la suma financiera de los términos amortizativos a_s y la suma aritmética de las cuotas de amortización A_s.

Valor del préstamo

En una operación de amortización se pactan unas características y entre ellas un tipo de interés.

Los tipos de interés van cambiando a lo largo del tiempo.

Esto hace que en un momento dado se pueda obtener un préstamo a un determinado coste, con un determinado tanto de la operación, y al variar el mercado de capitales, un préstamo similar pueda resultar más caro o barato.

Esto afecta a los préstamos que aún están pendientes de amortizar.

Sea un préstamo concertado hace s periodos.

El Valor del préstamo en ese momento (al principio de s+1) mide el valor de los derechos futuros del préstamo vivo, calculado con los tipos de interés que rigen el mercado en el momento de la valoración para operaciones similares.

Si el mercado financiero fuera perfecto, el Valor del préstamo sería el precio que cualquier ahorrador pagaría por esos derechos futuros del préstamo.

Entendiendo que esos derechos son los términos amortizativos pendientes de entregar por el prestatario al acreedor y que consta de dos componentes:

- Cuotas de interés
- Cuotas de amortización.

Definimos así que las cuotas de interés futuras son el usufructo del préstamo vivo, y que valoradas en s y considerando o los tantos del mercado en ese momento, son el Valor del usufructo.

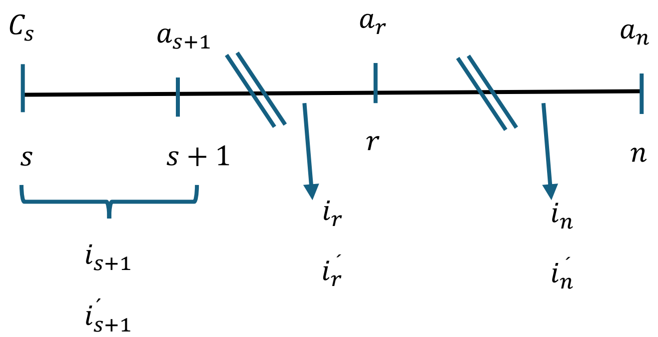
También podemos definir que las cuotas de amortización futuras son la nuda propiedad del préstamo vivo, y que valoradas en s y considerando los tantos del mercado en ese momento, son el Valor de la nuda propiedad.

PLANTEAMIENTO GENERAL

Se plantea una operación de amortización con términos y réditos variables.

El capital vivo al principio del periodo s+1 será:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r * \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$



$$\{i_{s+1}, \ldots, i_n\} = reditos\ concertados\ al\ momento\ de\ efectuar\ la\ operacion$$

$$\{i'_{s+1}, \ldots, i'_n\} = reditos\ concertados\ al\ momento\ de\ efectuar\ la\ operacion$$

$V_s = valor\ del\ prestamo$

Es decir, Valor actualizado de derechos futuros del préstamo a réditos de mercado.

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r * \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i'_h)^{-1}$$

Cada termino amortizativo lo descomponemos en intereses y amortización

$$a_r = C_{r-1} * i_r + A_r = I_r + A_r$$

Y podemos formar dos conjuntos de capitales:

Usufructo: $\{(I_{s+1}, s+1); (I_{s+2}, s+2); \ldots; (I_n, n)\}$

Nuda propiedad: $\{(A_{s+1}, s+1); (A_{s+2}, s+2); \ldots; (A, n)\}$

Sustituyendo estos términos en la ecuación del valor del préstamo:

$$V_s = \underbrace{\sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1} * i_r * \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i'_h)^{-1}} + \underbrace{\sum_{r=s+1}^{n} A_r * \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i'_h)^{-1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{U_s} = valor\ del\ usufructo\ al\ pricipio\ del\ periodo\ s + 1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{N_s} = valor\ de\ la\ nuda\ propiedad\ al\ principio\ del\ periodo\ s + 1}$$

$$\boxed{V_s = U_s + N_s}$$

Valor del préstamo con réditos constantes

Tenemos que

$$i_{s+1} = i_n = i$$

$$i'_{s+1} = i'_n = i'$$

Así, el capital vivo y el valor del préstamo al inicio del periodo s+1:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r * (1+i)^{-(r-s)}$$

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r * \left(1+i'\right)^{-(r-s)}$$

Sustituyendo a_r

$$a_r = C_{r-1} * i_r + A_r$$

$$U_s = \sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1} * i * \left(1+i'\right)^{-(r-s)}$$

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r * \left(1+i'\right)^{-(r-s)}$$

SI desarrollamos el sumatorio del valor de U_s :

$$\left[i * (C_s * \left(1+i'\right)^{-1} + C_{s+1} * \left(1+i'\right)^{-2} + \cdots + (C_{n-1} * \left(1+i'\right)^{-(n-s)}\right]$$

Y sustituyendo

$$C_s = A_{s+1} + A_{s+2} + \cdots A_n$$

Obtenemos la fórmula de Achard:

$$U_s = \frac{i}{i'} * (C_s - N_s)$$

Y sustituyendo en

$$V_s = U_s + N_s$$

Tenemos la fórmula de Makeham:

$$V_s = \left(\frac{i}{i'} * C_s - \frac{i}{i'} * N_s\right) + N_s = \frac{i}{i'} * C_s + \left(1 - \frac{i}{i'}\right) * N_s$$

$$\boxed{V_s = \frac{i}{i'} * C_s + \left(1 - \frac{i}{i'}\right) * N_s}$$

Indica que el valor del préstamo se puede expresar como la media ponderada entre el capital vivo (peso $\frac{i}{i'}$) y el valor de la nuda propiedad (peso $1 - \frac{i}{i'}$).

El único requisito para su aplicación es que los réditos sean constantes, si bien los términos amortizativos pueden ser variables.

Disponemos de un sistema de ecuaciones para obtener $V_s, U_s, N_s\ y\ C_s$

$$V_s = U_s + N_s$$

$$U_s = \frac{i}{i'} * (C_s - N_s)$$

$$V_s = \frac{i}{i'} * C_s + \left(1 - \frac{i}{i'}\right) * N_s$$

Conocidas dos magnitudes, podemos despejar las otras dos.

Aplicación de métodos particulares de Amortización

Método Frances

Se obtiene fácilmente $V_s\ y\ C_s$

Dado que los términos amortizativos son constantes

$$C_s = a * a_{n-s\rceil i}$$

$$V_s = a * a_{n-s\rceil i'}$$

$$U_s = V_s - N_s = \frac{i}{i'} * (a * a_{n-s\rceil i'} - N_s)$$

$$V_s = a * a_{\,n-s\rceil i'} = (\frac{i}{i'} * a * a_{\,n-s\rceil i'}) - (\frac{i}{i'} * N_s) + N_s$$

$$a * a_{\,n-s\rceil i'} - (\frac{i}{i'} * a * a_{\,n-s\rceil i'}) - (\frac{i}{i'} * N_s) + N_s$$

$$N_s = \frac{a * (a_{\,n-s\rceil i'} - \frac{i}{i'} * a_{\,n-s\rceil i'})}{1 - \frac{i}{i'}}$$

Y solo queda sustituir para el valor de U_s

También se puede obtener N_s sabiendo que en este tipo de amortización las cuotas de amortización crecen en progresión geométrica de razón (1+i)

$$A_{r+1} = A_r * (1 + i)$$

Asi, N_s es el valor actual de una renta creciente en progresión geométrica de razón$(1 + i)$ que se valora a un tanto i'.

$$N_s = A(A_{s+1}; 1 + i)_{\,n-s\rceil i'} = A_{s+1} * \frac{1 - \left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^{n-s}}{i' - i}$$

En el caso de que $i' = i$, esta ecuación es una indeterminación y se valora así:

$$N_s = A_{s+1} * \frac{n - s}{1 + i}$$

Método de cuotas de amortización constantes

Obtenemos $N_s \; y \; C_s$

$$C_s = (n - s) * A$$

$$N_s = A * a_{\,n-s\rceil i'}$$

$V \; y \; U_s$ lo obtenemos utilizando el sistema de ecuaciones.

También podemos obtener el valor del préstamo recordando que los términos amortizativos decrecen en progresión aritmética de razón $d = -A * i$

$$a_{r+1} = a_r \;\; \forall \, r = [s + 1, \dots, n]$$

$V_s =$ Valor actual de una renta financiera variable en progresión aritmética de razón $-A * i$

Y valorada a tanto i .

$$V_s = A(A_{s+1}; -A * i)_{\,n-s\rceil i'} =$$

$$= \left(\left(a_{s+1} - \frac{A * i}{i'}\right) - (A * i * (n - s))\right) * a_{\,n-s\rceil i'} + \frac{A * i * (n - s)}{i'}$$

Método Americano

$$C_s = C_0$$

$$N_s = C_0\left(1 + i^{´}\right)^{-(n-s)}$$

$$U_s = C_0 * i * a_{\,n-s\rceil i^{´}}$$

Método de términos variables en progresión geométrica

$$C_s = A(a_{s+1}; q)_{\,n-s\rceil i}$$

$$V_s = A(a_{s+1}; q)_{\,n-s\rceil i^{´}}$$

El resto se deduce del sistema de ecuaciones.

Método de términos variables en progresión Aritmética.

$$C_s = A(a_{s+1}; d)_{\,n-s\rceil i}$$

$$V_s = A(a_{s+1}; d)_{\,n-s\rceil i^{´}}$$

El resto se deduce del sistema de ecuaciones

Valor del préstamo con intereses fraccionados

En el caso de valorar la operación a tanto nomina constante j_m , el redito con el que se abonan intereses es

$$i_m = \frac{j_m}{m}$$

Y el tanto efectivo anual es

$$i = (1 + i_m)^m - 1$$

Igual que en la exposición de intereses sin fraccionar tenemos los réditos y tantos de mercado.

Los intereses de la operación se pagan a i_m y se actualizan a $i_m^{´}$

Los intereses dentro de cada periodo son iguales.

Se pagan m cuotas de intereses por periodo y se obtiene su valor al final de cada periodo

La cuota de amortización se paga una sola vez al final del periodo.

Actualizamos hasta s para obtener el valor.

$$V_s^{(m)} = \sum_{r=s+1}^{n} (C_{r-1} * i_m * S_{\,m\rceil i'_m} + A_r) * (1 + i')^{-(r-s)}$$

$$C_{r-1} * i_m * S_{\,m\rceil i'_m} = C_{r-1} * \; i_m * \frac{\left(1 + i'_m\right)^m - 1}{i'_m} =$$

$$= C_{r-1} * \; i_m * \frac{i'}{i'_m}$$

$$V_s^{(m)} = \sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1} * \; i_m * \frac{i'}{i'_m} * \left(1 + i'\right)^{-(r-s)} + \sum_{r=s+1}^{n} A_r * \left(1 + i'\right)^{-(r-s)} = U_s^{(m)} + N_s$$

También se cumple Achard y Makeham para tantos nominales

$$U_s^{(m)} = \frac{j_m}{j'_m} * (C_s - N_s)$$

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 7. Amortización con réditos anticipados. Método progresivo alemán. Amortización con fraccionamiento en el pago de intereses.

Edición Noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Amortización

En este tema, el tipo de operaciones compuestas (ver operaciones financieras y operaciones compuestas en temas anteriores) que se estudiarán serán las de amortización.

Son operaciones de saldo financiero siempre positivo hasta el final de la renta

Estas son las que se componen de una única prestación, entregada al principio de la operación y una contraprestación múltiple.

Los capitales que componen la contraprestación contienen los capitales que satisfacen el capital entregado como prestación más los intereses que va generando la operación.

Estos capitales se denominan términos amortizativos, (a_i, t_i), y conforman la renta financiera que es equivalente a la prestación, valoradas en el origen de la operación.

La equivalencia financiera la planteamos de un modo general que se trata de amortizar el capital (C_0, t_0) con términos amortizativos variables (a_i, t_i),, valorando la operación con réditos de cada periodo variables i_n:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s \times \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$$

El saldo financiero de la operación en las operaciones de amortización se denomina saldo vivo o capital pendiente de amortizar.

Hallaremos los saldos por la derecha, es decir, un instante después del vencimiento de cada termino amortizativo.

EL capital vivo en t_s lo escribimos como C_s y aplicando el método prospectivo:

$$C_S = \sum_{r=s+1}^{n} a_s \times \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

Al aplicar el método recurrente, suponiendo que ya se obtuvo C_{S-1}:

$$C_S = C_{S-1} \times (1 + i_s) - a_s$$

Despejando:

$$a_s = C_{S-1} \times i_s + (C_{S-1} - C_S) = I_s + A_s$$

Así, cada termino amortizativo es dedicado a pagar:

$$interes\ del\ capital\ vivo\ al\ principio\ del\ periodo$$

$$I_s = C_{S-1} \times i_s = cuota\ de\ interes\ del\ periodo\ s$$

$$disminuir\ la\ deuda\ pendiente$$

$$A_s = (C_{S-1} - C_S) = cuota\ de\ amortizacion\ del\ periodo\ s$$

El capital amortizado en los s primeros periodos se escribe M_s y es la diferencia entre el capital prestado C_0 y el capital vivo C_s

$$M_s = C_0 - C_s$$

De este modo y bajo las premisas anteriores, teniendo en cuenta que $C_n = 0$ en t_n, se obtiene que el capital prestado es la suma aritmética de las cuotas de amortización:

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Y que el capital amortizado en los s primeros periodos es la suma de las s primeras cuotas de amortización:

$$M_s = \sum_{k=1}^{s} A_k$$

El capital vivo, después de transcurridos s periodos, es igual a la suma de las n-s ultimas cuotas de amortización:

$$C_s = \sum_{k=s+1}^{n} A_k$$

Podemos decir que el capital prestado C_0 es la suma financiera de los términos amortizativos a_s y la suma aritmética de las cuotas de amortización A_s.

Amortización con réditos anticipados.

En las operaciones de amortización de préstamos con réditos o intereses anticipados, los intereses se pagan al principio de cada periodo.

Los tipos de interés que se aplican, se dice que son prepagables.

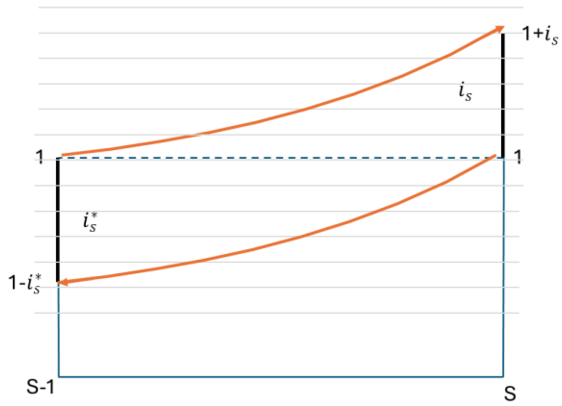
Para un periodo cualquiera (s-1 , s) , la relación entre los réditos de capitalización i_s y contracapitalizacion i_s^* lo establecemos a partir de la relación inversa entre los correspondientes factores.

$$u\,(s-1\,,s\,) = \frac{1}{u^*(\,s-1\,,\ \ s\,)} \Leftrightarrow 1 + i_s = \frac{1}{1 - i_s^*}$$

$$i_s = \frac{1}{1 - i_s^*} - 1 = \frac{1 - 1 + i_s^*}{1 - i_s^*} = \frac{i_s^*}{1 - i_s^*}$$

$$i_s = \frac{i_s^*}{1 - i_s^*}$$

$$i_s^* = \frac{i_s}{1 - i_s}$$

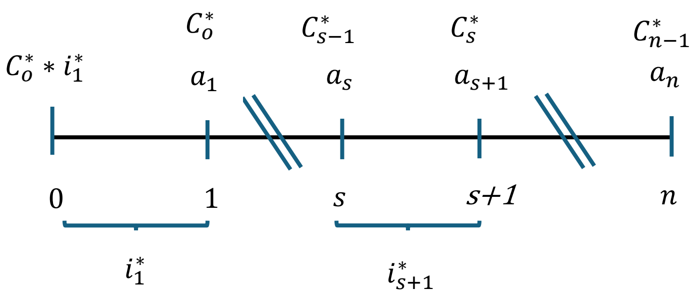


En este grafico podemos cer como si se presta una unidad monetaria y se cobra interes por anticipado, se recibe $1 - i_s^*$ como prestacion y se devuelve al final del periodo de la operación una unidad monetaria como contraprestacion.

PLANTEAMIENTO GENERAL

De modo general planteamos un prestamo que se amortiza con terminos y reditos variables.

Graficamente lopodemos representar asi:



C_0^* = Capital nominal prestado (el capital que figura en el contrato)

C_0 = Capital neto que recibe el prestatario

$$C_0 = C_0^* * (1 - i_1^*)$$

La ecuación financiera establece en el momento inicial

$$C_o^* = C_o^* * i_1^* + \sum_{s=1}^{n} a_s * \prod_{h=1}^{s} 1 - i_h^*$$

también podemos establecer la ecuación en el momento 1

$$C_o^* = a_1 + \sum_{s=2}^{n} a_s * \prod_{h=2}^{s} 1 - i_h^*$$

Los capitales nominales vivos, C_s^*, se obtienen por la izquierda y van referidos al final del periodo (s+1).

C_{n-1}^* esta referido al final de la operación por la izquierda y $C_n^* = 0$.

Por el método prospectivo:

$$C_s^* = a_{s+1} + \sum_{r=s+2}^{n} a_r * \prod_{h=s+2}^{r} (1 - i_h^*)$$

Por el método recurrente:

$$C_s^* = (C_{s-1}^* - a_s) * (1 - i_{s+1}^*)^{-1} \Rightarrow C_s * (1 - i_{s+1}^*)^{-1} = (C_{s-1}^* - a_s)$$

En la expresión anterior se interpreta que al capital vivo favorable al prestamista se le resta lo que entrega el prestatario y se capitaliza hasta s.

$$a_s = C_s^* * i_{s+1}^* + C_{s-1}^* - C_s^* = I_{s+1}^* + A_s^*$$

Cada termino amortizativo se compone de los intereses del periodo siguiente y la cuota de amortización nominal, que mide la disminución de la deuda pendiente durante el periodo considerado.

El ultimo termino se dedica en exclusiva a amortizar porque los intereses se

abonan en n-1

$$a_n = A_n^* = C_{n-1}^*$$

También se cumple

$$C_0^* = \sum_{k=1}^{n} A_k^*$$

$$C_s^* = \sum_{k=s+1}^{n} A_k^* = C_{s-1}^* - A_s^*$$

$$\mathfrak{M}_s^* = \sum_{k=1}^{s} A_k^* = C_0^* - C_s^* = \mathfrak{M}_{s-1}^* + A_s^*$$

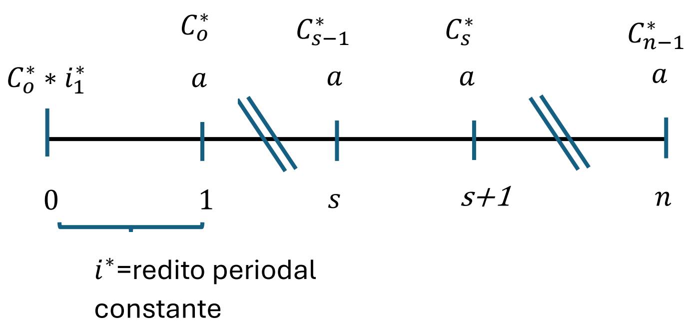
Existe la posibilidad de resolver estas operaciones de amortización utilizando los réditos pospagables equivalentes y las cuotas de amortización netas, aunque estas magnitudes no son las que amortizan el préstamo sino las nominales.

Es necesario para esto obtener las relaciones existentes entre las magnitudes netas y las nominales.

De todos modos, lo más práctico y lógico es resolverlo como se ha descrito con los réditos y cuotas nominales.

Método progresivo alemán

Se caracteriza porque los réditos son prepagables y constantes. Los términos amortizativos también son constantes.



La ecuación de equilibrio financiero en el origen de este tipo de operaciones establece que:

$$C_o^* * (1 - i_1^*) = a * \left((1 - i_1^*) + (1 - i_1^*)^2 + \cdots + (1 - i_1^*)^n\right)$$

Sacando $1 - i_1^*$ como factor común.

$$C_o^* = a * \frac{1 - (1 - i_1^*)^n}{i^*}$$

Podemos aplicar el método prospectivo para calcular el capital vivo en s:

$$C_s^* = a * \frac{1 - (1 - i_1^*)^{n-s}}{i^*}$$

O quizás el método recurrente:

$$C_s^* = (C_{s-1}^* - a) * (1 - i_1^*)^{-1}$$

$$a = \underbrace{(C_o^* * i_1^*)}_{I_{s+1}^*} + \underbrace{(C_{s-1}^* - C_s^*)}_{A_s^*}$$

Si restamos los capitales vivos de dos periodos consecutivos:

$$C_s^* - C_{s-1}^* = (C_{s-1}^* - C_s^*) * (1 - i_1^*)^{-1}$$

$$A_{s-1}^* = A_s^* * (1 - i_1^*)^{-1}$$

Si desarrollamos podemos llegar a la afirmación $A_n^* = a$.

Por este método recurrente, una vez calculada A_s^* podemos calcular fácilmente:

$$C_s^* = \sum_{k=s+1}^{n} A_k^* = C_{s-1}^* - A_s^*$$

$$\mathfrak{M}_s^* = \sum_{k=1}^{s} A_k^* = C_0^* - C_s^* = \mathfrak{M}_{s-1}^* + A_s^*$$

También podemos estudiar el préstamo a través de cantidades netas y réditos ordinarios.

$$i = \frac{i^*}{1 - i^*}$$

$$C_0 = a * a_{n\rceil i}$$

$$C_0^* = a * \ddot{a}_{n\rceil i}$$

$$C_s^* = a * \ddot{a}_{n-s\rceil i}$$

$$A_s^* = A_{s+1}$$

$$A_n^* = a$$

PRESTAMOS CON PAGO FRACCIONADO DE INTERESES

En este tipo de operaciones de amortización, los intereses se pagan con una frecuencia mayor que la amortización.

Los intereses en el contrato suelen ser nominales en vez de efectivos si estos se pagan con una frecuencia m al final de cada subperiodo.

Llamamos $j_{s,m}$ al tanto nominal de frecuencia m que se apica en el periodo s.

Y $i_{s,m}$ al redito subperiodal con el que se pagan intereses en el periodo s.

La igualdad respecto a su tanto equivalente será:

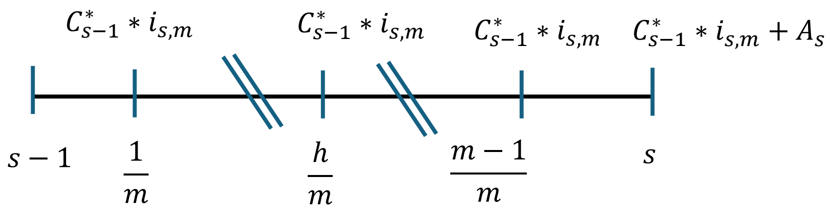
$$1 + i_s = (1 + i_{s,m})^m$$

La cuota de interés de cada subperiodo será:

$$I_{s,h} = C_{s-1} * i_{s,m} \ \ , s = periodo\ , h = subperiodo, \forall h = 1, \dots, m$$

Los términos amortizativos de cada periodo son:

$$a_{s,h} = \begin{cases} i_{s,h} \rightarrow \ \forall h = 1, \dots, m-1 \\ i_{s,h} + A_s \rightarrow \ h = m \end{cases}$$



Se valoran las cuotas de interés de cada subperiodo al final del periodo.

$$C_{s-1}^* * i_{s,m} * s_{\overline{m}|\, i_{s,m}} = C_{s-1}^* * i_{s,m} * \frac{\left(1 + i_{s,m}\right)^m - 1}{i_{s,m}} = C_{s-1}^* * i_s$$

Se pueden sustituir los m pagos de intereses de cada periodo por uno solo equivalente al final utilizando el tanto efectivo equivalente.

La ecuación de equivalencia financiera de la operación y las ecuaciones de los capitales vivos pueden obtenerse tanto con i_s como con $i_{s,m}$

Únicamente se modifica la dinámica general de la amortización al final de los periodos, ya que C_s y $\mathfrak{M}_s$ no se fraccionan.

$$C_s = \sum_{k=s+1}^{n} A_k = C_{s-1} - A_s$$

$$\mathfrak{M}_s = \sum_{k=1}^{s} A_k = \mathfrak{M}_{s-1} + A_s = C_0 - C_s$$

El cuadro de amortización consta de $n * m$ filas mas la inicial $s = 0$

Las filas al final de cada periodo completo incluyen intereses y cuotas de amortización y las demás solamente intereses.

En el caso particular en el que $j_m \ y \ i_m$ son constantes podemos afirmar:

$$i_{1,m} = \cdots = i_{u,m} = i_m = \frac{j_m}{m}$$

$$i = (1 + i_m)^m - 1$$

$$C_{s-1} * i_m * s_{\,m\rceil i_m} = C_{s-1} * i$$

Método de amortización francés con intereses fraccionados

En este método a es constante.

Se descompone a en m cuotas de interés y una de amortización.

$$a = C_{s-1} * i_m * s_{\,m\rceil i_m} + A_s = C_{s-1} * i + A_s$$

A_s se obtiene operando con el tanto efectivo equivalente al tanto nominal j_m de la operación.

$$A_{s+1} = A_s * (1 + i) = A_1 * (1 + i)^s$$

$$A_1 = \frac{C_0}{s_{\,n\rceil i}}$$

$$C_s = C_{s-1} - A_s$$

$$\mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_{s-1} + A_s$$

$$I_{s,h} = C_{s-1} * i_m$$

$$a_{s,h} = \begin{cases} C_{s-1} * i_m \rightarrow \ \forall h = 1, \dots, m-1 \\ C_{s-1} * i_m + \ A_1 * (1 + i)^s \rightarrow \ h = m \end{cases}$$

Método de cuotas de amortización constantes

$$A = \frac{C_0}{n}$$

$$C_s = (n - s) * A$$

$$\mathfrak{M}_s = s * A$$

$$I_{s,h} = C_{s-1} * i_m$$

$$a_{s,h} = \begin{cases} C_{s-1} * i_m \rightarrow \ \forall h = 1, \dots, m-1 \\ C_{s-1} * i_m + \ A \rightarrow \ h = m \end{cases}$$

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 8. Amortización con términos variables en progresión aritmética. Estudio de la regularidad. Amortización con términos variables en progresión geométrica.

Edición Noviembre 2025

Operación de amortización

En este tema, el tipo de operaciones compuestas (ver operaciones financieras y operaciones compuestas en temas anteriores) que se estudiarán serán las de amortización.

Son operaciones de saldo financiero siempre positivo hasta el final de la renta

Estas son las que se componen de una única prestación, entregada al principio de la operación y una contraprestación múltiple.

Los capitales que componen la contraprestación contienen los capitales que satisfacen el capital entregado como prestación más los intereses que va generando la operación.

Estos capitales se denominan términos amortizativos, (a_i, t_i), y conforman la renta financiera que es equivalente a la prestación, valoradas en el origen de la operación.

La equivalencia financiera la planteamos de un modo general que se trata de amortizar el capital (C_0, t_0) con términos amortizativos variables (a_i, t_i), valorando la operación con réditos de cada periodo variables i_n:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s \times \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$$

El saldo financiero de la operación en las operaciones de amortización se denomina saldo vivo o capital pendiente de amortizar.

Hallaremos los saldos por la derecha, es decir, un instante después del vencimiento de cada termino amortizativo.

EL capital vivo en t_s lo escribimos como C_s y aplicando el método prospectivo:

$$C_S = \sum_{r=s+1}^{n} a_s \times \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

Al aplicar el método recurrente, suponiendo que ya se obtuvo C_{S-1}:

$$C_S = C_{S-1} \times (1 + i_s) - a_s$$

Despejando:

$$a_s = C_{S-1} \times i_s + (C_{S-1} - C_S) = I_s + A_s$$

Así, cada termino amortizativo es dedicado a pagar:

El $interes\ del\ capital\ vivo\ al\ principio\ del\ periodo$

$$I_s = C_{S-1} \times i_s = cuota\ de\ interes\ del\ periodo\ s$$

Y $disminuir\ la\ deuda\ pendiente$

$$A_s = (C_{S-1} - C_S) = cuota\ de\ amortizacion\ del\ periodo\ s$$

El capital amortizado en los s primeros periodos se escribe M_s y es la diferencia entre el capital prestado C_0 y el capital vivo C_s

$$M_s = C_0 - C_s$$

De este modo y bajo las premisas anteriores, teniendo en cuenta que $C_n = 0$ en t_n, se obtiene que el capital prestado es la suma aritmética de las cuotas de amortización:

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Y que el capital amortizado en los s primeros periodos es la suma de las s primeras cuotas de amortización:

$$M_s = \sum_{k=1}^{s} A_k$$

El capital vivo, después de transcurridos s periodos, es igual a la suma de las n-s ultimas cuotas de amortización:

$$C_s = \sum_{k=s+1}^{n} A_k$$

Podemos decir que el capital prestado C_0 es la suma financiera de los términos amortizativos a_s y la suma aritmética de las cuotas de amortización A_s.

Normalmente ocurre que las cuotas de amortización son positivas, si bien puede también haber alguna que sea nula:

$$C_0 \geq C_1 \geq \cdots C_s \geq \cdots \geq C_n \Leftrightarrow A_s \geq 0 \; \forall s$$

y se dice que existe Regularidad en la amortización.

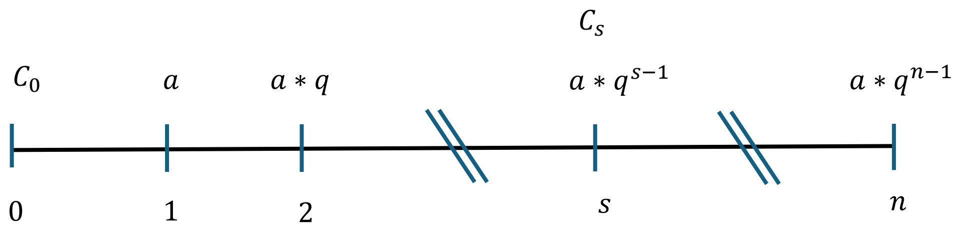
En el planteamiento general expuesto se asume que los tantos de valoración y los términos amortizativos puedan ser variables.

En la práctica, se suelen concertar operaciones en la que algunas magnitudes son constantes o varían con alguna ley conocida.

En este tema vamos a desarrollar dos casos notables, en los que los tantos de cada periodo son constantes y los términos amortizativos son variables, en un caso varían según una razón geométrica y en el otro según una razón aritmética.

Términos amortizativos variables en progresión geométrica

En este caso particular de operación de amortización, los términos amortizativos varían en progresión geométrica de razón q y los réditos periodales son constantes.



Hay que tener en cuenta que el q debe ser mayor que cero.

Si es mayor que 1, los términos amortizativos crecerán en progresión geométrica y si es menor de 1 los términos amortizativos decrecerán en progresión geométrica. Siendo q>1 el caso más normal.

La ecuación de equivalencia financiera en el origen, teniendo en cuenta que la contraprestación es una renta financiera variable en progresión geométrica:

$$C_0 = A(a,q)_{n\rceil i} = a * \frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q}$$

Conocido a, se puede demostrar que existen n-1 soluciones posibles para q pero solo habrá una solución real y positiva.

En cuanto a la regularidad de la operación:

Para $0 < q < 1$ los términos a_s decrecen y necesariamente existirá regularidad amortizativa, pues si en algún caso se verificase $a_s < C_{s-1}$*i, ocurriría igual en los siguientes términos por ser inferiores y entonces no se produciría la amortización.

Para *q=1,* es idéntico al método francés y sabemos que existe regularidad porque

$$A_s = \frac{C_0}{S_{n\rceil i}} * (1+i)^{s-1} > 0$$

Para *q>1,* los términos son de cuantía a_s creciente y es suficiente la condición

$$a \geq C_0 * i$$

Para que exista regularidad en la amortización.

En el caso particular de q=1+i, la regularidad depende del valor de i.

$$a = \frac{C_0 * (1+i)}{n} \geq C_0 * i \rightarrow i \leq \frac{1}{n-1}$$

Podemos obtener el capital vivo por cualquiera de los tres métodos.

Por el método prospectivo:

$$C_s = A(a * q^s, q)_{n-s\rceil i} = a * q^s * \frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^{n-s}}{1+i-q}$$

Por el método retrospectivo:

$$C_s = C_0 * (1+i)^s - a * \frac{(1+i)^s - q^s}{1+i-q}$$

Por el método recurrente, suponiendo que C_{s-1} ya es conocido:

$$C_s = C_{s-1} * (1+i) - a * q^{s-1}$$

$$\underbrace{a * q^{s-1}}_{\boxed{a_s}} = \underbrace{C_{s-1} * i}_{\boxed{I_s}} + \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{\boxed{A_s}}$$

Reiteramos la ecuación y restamos:

$$\begin{array}{rl} & C_s = C_{s-1} * (1+i) - a * q^{s-1} \\ - & C_{s+1} = C_s * (1+i) - a * q^s \\ \hline \end{array}$$

$$C_s - C_{s+1} = (C_{s-1} - C_s) * (1+i) + a * q^{s-1} * (q-1)$$

$$A_{s+1} = A_s * (1+i) + a * q^{s-1} * (q-1)$$

Esta expresión de recurrencia permite calcular las cuotas de amortización cuando conocemos la primera cuota

Cada cuota depende del importe de la cuota anterior y de la diferencia entre los términos amortizativos consecutivos.

La primera cuota, en s=1, la podemos obtener partiendo de la expresión ya mencionada

$$a * q^{s-1} = C_{s-1} * i + (C_{s-1} - C_s)$$

$$a * q^0 = C_0 * i + (C_0 - C_1)$$

$$a = C_0 * i + (A_1)$$

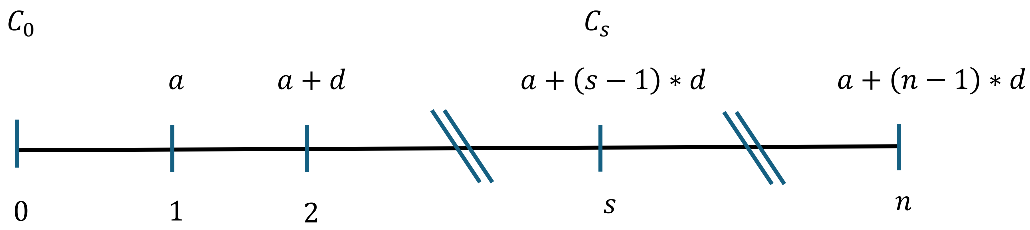
$$A_1 = a - C_0 * i$$

En cuanto al capital amortizado lo obtenemos haciendo la diferencia entre el capital prestado y el capital vivo, método prospectivo o como suma de las cuotas de amortización hasta el periodo s, método retrospectivo.

TERMINOS AMORTIZATIVOS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA.

En este caso particular de operación de amortización, los términos amortizativos varían en progresión aritmética.

Es posible representar este tipo de operaciones gráficamente del siguiente modo:



Hay que mencionar que *d* puede tomar cualquier valor siempre que el ultimo termino amortizativo sea positivo.

$$a + (n - 1) * d > 0$$

Consideramos para el estudio de estas operaciones como constante al tanto de valoración.

La ecuación de equivalencia financiera la podemos escribir teniendo en cuenta que las contraprestaciones una renta variable en progresión aritmética.

El valor actual de esta renta debe igualarse al capital prestado C_0.

$$C_0 = A(a, d)_{n\urcorner i} = \left(\left[a + \frac{d}{i} + (n * d)\right] * a_{n\urcorner i}\right) - \frac{n * d}{i}$$

Habitualmente, la incógnita de la operación suele ser el primer termino a, aunque también puede ser la razón d.

Dado un capital prestado existen infinitas soluciones de combinaciones de a y d que pueden satisfacer la ecuación de equivalencia financiera. Las partes contratantes elegirán la que mejor se adapte a sus necesidades y posibilidades financieras.

Si bien, deben estudiarse las condiciones que han de cumplir estos pares (a,d) para que la amortización se produzca con regularidad.

La condición de a será

$$a \geq C_0 * i$$

Y por lo tanto

$$d \leq \frac{C_0 * i * (1+i)^{-n}}{a_{n\rceil i} - n * (1+i)^{-n}} = \frac{C_0 * i}{S_{n\rceil i} - n}$$

Par conocer el capital vivo de la operación en un periodo s por el método prospectivo:

$$C_s = A(a + (s * d), d)_{n-s\rceil i} = \\ = \left(\left[(a + (s * d) + \frac{d}{i} + ((n-s) * d)\right] * a_{n-s\rceil i}\right) - \frac{(n-s) * d}{i}$$

Por el método retrospectivo:

$$C_s = C_0 * (1+i)^s - S(a,d)_{s\rceil i}$$

Aplicando el método recurrente, supuestamente conocido C_{s-1}:

$$C_s = C_{s-1} * (1+i) - \big(a + (s * d)\big)$$

Despejamos el termino amortizativo y tenemos:

$$a + \big((s-1) * d\big) = C_{s-1} * i + (C_{s-1} - C_s) = I_s + A_s$$

Para hallar las cuotas de amortización reiteramos el método recurrente como ya hemos hecho en otras ocasiones y restamos dos capitales vivos consecutivos.

$$C_{s+1} = C_s * (1 + i) - \left(a + (s * d)\right)$$

$$C_s - C_{s+1} = (C_{s-1} - C_s) * (1 + i) + d$$

$$\Downarrow$$

$$A_{s+1} = A_s * (1 + i) + d = A_1 * (1 + i)^s + (d * S_{s\rceil i})$$

Esta expresión permite obtener las cuotas de amortización cuando se conoce A_1.

$$a = C_0 * i + A_1$$

$$A_1 = a - C_0 * i$$

Para el capital amortizado restamos el capital prestado y el capital vivo

$$\mathfrak{M}_s = C_0 - C_s$$

O bien podemos sumar las s primeras cuotas de amortización

$$\mathfrak{M}_s = \sum_{k=1}^{s} {A_k}_{\,1}$$

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 9. Empréstitos. Definición y clasificación. El empréstito desde el punto de vista del emisor. Empréstitos normales: con pago de cupones vencido y cupón cero en sus tipos I, II y III.

Edición Noviembre 2025

Empréstitos. Definición y clasificación.

Los empréstitos son operaciones de amortización, en las que la figura del prestamista es asumida por múltiples sujetos, dividiendo el importe total del préstamo en un elevado número de partes, todas de la misma cuantía.

Su aparición y desarrollo se efectúa durante el siglo XIX, época en la que surgen algunas necesidades de financiación, como las compañías de ferrocarriles o siderúrgicas entre otras.

Estas grandes cuantías presentan el problema de encontrar algún prestamista con la solvencia suficiente.

Además, resulta útil repartir el riesgo y no depender de un único sujeto.

Canalizaba también el deseo de muchos ahorradores y pequeños prestamistas que desean participar en una operación de este tipo.

Cada una del as partes en las que se divide la cuantía del préstamo toma la forma jurídica de título-valor.

Estos títulos toman el nombre de obligación y representa una parte alícuota de un préstamo contra la sociedad emisora de los títulos.

El emisor de los títulos es el prestatario y los suscriptores, obligacionistas, son los prestamistas.

El emisor actúa frente al conjunto de las obligaciones como si fuera un único prestamista.

El estudio de la operación se hace globalmente y en cada periodo se atiende a los intereses y la amortización de los títulos que correspondan en cada periodo.

El método clásico de elección de los títulos que se amortizan en cada periodo es el sorteo.

En la amortización por sorteo, es conocido en el plan de amortización, el número de títulos que se amortizan en cada periodo.

Todos tienen, a priori, la misma esperanza de duración.

Para describir el plan de amortización utilizamos:

C= valor nominal

$$M_s = numero\ de\ obligaciones\ que\ se\ amortizan\ en\ el\ periodo\ s$$

$$N_s = numero\ de\ obligaciones\ en\ circulacion\ despues\ de\ s\ periodos$$

$$N_0 = N = número\ de\ titulos\ emitidos.$$

$$M_s = numero\ de\ obligaciones\ que\ se\ amortizan\ en\ el\ periodo\ s$$

$$M_s = N_{s-1} - N_s$$

$$N = \sum_{s=1}^{n} M_s$$

El número total de obligaciones amortizadas en los s primeros periodos es:

$$\mathfrak{M}_s = \sum_{k=1}^{s} M_k = N - N_s$$

Los clasificamos según:

- Emisor:
  - ♣ Deuda pública. EL estado acude al mercado para financiar parte de sus presupuestos.
  - ♣ Empresas privadas.
- Forma de pago de intereses(cupones):
  - ♣ Pago periódico.
    - ▪ Cupón vencido. Se abonan con carácter pospagable. Es el más frecuente.
    - ▪ Cupón anticipado. Se abonan con carácter prepagable.
  - ♣ Cupón cero. Se abonan todos los intereses en el momento de amortizar el título.
- Modalidad de amortización:
  - ♣ Única. Se amortiza todo el empréstito en una fecha.
  - ♣ Varias fechas:
    - ▪ Por sorteo. Entre los títulos que quedan por amortizar.
    - ▪ Sucesiva. Se amortiza cada título por reducción del nominal en cada periodo.
  - ♣ Por compra en bolsa.
  - ♣ Sin compromiso de amortización. Solo de pagar los intereses. Se amortiza según conveniencia del emisor.
- Características comerciales:
  - ♣ Normales o puros. Sin características comerciales.
  - ♣ Con características comerciales. Cabe distinguir entre los empréstitos normalizables y los que no son normalizables.

- Valor de emisión de los títulos (precio que hay que pagar por adquirir las obligaciones):

  - ♣ Emisión a la par. Coinciden valor de misión y valor nominal.
  - ♣ Emisión bajo la par. Se ofrecen con prima de emisión = valor nominal – valor de emisión.
  - ♣ Emisión sobre la par. Inverso que el caso anterior. No suele ofrecerse porque no es atractivo.

- Valor de reembolso de los títulos (precio que hay que pagar por adquirir las obligaciones):

  - ♣ Reembolso Nominal o a la par.
  - ♣ Emisión con prima de amortización. Se abona al amortizar al título y pueden ser constantes o variables según fecha de amortización.
  - ♣ Reembolso con lote. Se abona por sorteo y solamente a un subconjunto de los títulos.

- Valoración financiera:

  - ♣ Tipo I. términos amortizativos y réditos de cada periodo constantes.
  - ♣ Tipo II. términos amortizativos variables y réditos de cada periodo constantes.
  - ♣ Tipo III. términos amortizativos y réditos de cada periodo variables.

EL EMPRÉSTITO DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL EMISOR

CLASES DE EMPRÉSTITOS NORMALES CON PAGO DE CUPONES VENCIDOS

La estructura de los términos amortizativos de un empréstito de este tipo es:

$$a_s = C * i_s * N_{s-1} + C * M_s$$

Cada título es un préstamo americano y el empréstito es la suma de estas operaciones de amortización.

Tipo I

Ya descritos en la clasificación.

El termino amortizativo, o anualidad, del año s :

$$a_s = C * i * N_{s-1} + C * M_s$$

Obtenemos la anualidad según la equivalencia financiera:

$$C * N = a * a_{n\rceil i} \Rightarrow a = \frac{C * N}{a_{n\rceil i}}$$

Al restar la estructura de dos anualidades consecutivas podemos despejar el número de títulos que se amortizan en cada periodo:

$$M_{s+1} = M_s * (1+i) = M_1 * (1+i)^s$$

Despejamos M_1 de la anualidad del primer año o bien de la definición de N:

$$M_1 = \frac{a - C * i * N}{C} = \frac{N}{S_{n\rceil i}}$$

Títulos vivos después de cada sorteo se puede obtener fácilmente por el método recurrente:

$$N_s = N_{s-1} * (1+i) - \frac{a}{C}$$

Para obtener el número total de títulos amortizados en los s primeros periodos:

$$\mathfrak{M}_s = M_1 * a_{n\rceil i}$$

Esta modalidad de empréstito es análoga a los prestamos amortizados por el método francés.

9.3.2 Tipo II

Ya descritos en la clasificación.

El termino amortizativo, o anualidad, del año s :

$$a_s = C * i * N_{s-1} + C * M_s$$

La equivalencia financiera:

$$C * N = \sum_{s=1}^{n} a_s * (1+i)^{-s}$$

Al restar la estructura de dos anualidades consecutivas podemos despejar el número de títulos que se amortizan en cada periodo:

$$M_{s+1} = M_s * (1+i) + \frac{a_{s+1} - a_s}{C}$$

El número de títulos que se amortizan en un periodo dependen del os que se amortizaron en el periodo anterior y de la diferencia de las anualidades correspondientes.

Para conocer los titulos vivos podemos usar el metodo recurrente:

$$N_s = N_{s-1} * (1 + i) - \frac{a_s}{C}$$

Un caso particular que está muy extendido en la práctica es el que amortiza el mismo número de títulos en cada periodo

$$M = \frac{N}{n}$$

$$N_s = (n - s) * M$$

$$\mathfrak{M}_s = s * M$$

$$a_{s+1} = a_s - C * I * M$$

$$a_1 = C * I * M + C * M$$

Este caso particular es análogo al caso de amortización con cuotas de amortización constantes.

9.3.3 Tipo III

Esta modalidad no se da en la práctica por su complejidad, quizá pueda usarse en determinados tramos de la duración del empréstito.

Su equivalencia financiera viene dada por:

$$C * N = \sum_{s=1}^{n} a_s * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$$

Y podemos establecer el plan según:

$$C * N_s = C * N_{s-1} * (1 + i_s) - a_s$$

9.4 Empréstitos normales de cupón cero

Los títulos no perciben ninguna cuantía hasta que se amortizan y entonces reciben el valor nominal y los intereses hasta la fecha.

9.4.1 Tipo I

El termino amortizativo, o anualidad, del año s:

$$a = C * M_s * (1 + i)^s$$

La equivalencia finaciera:

$$C * N = a \times a_{\overline{n}|i} \Rightarrow a = \frac{C \times N}{a_{\overline{n}|i}}$$

Idéntica al de cupones pospagables, ya que al emisor no le influye en que se invierta el pago de los intereses, si a pagar cupones o a pagar el interés de todo el periodo a los que se amortizan.

Al restar la estructura de dos anualidades consecutivas podemos despejar el número de títulos que se amortizan en cada periodo:

$$M_{s+1} = M_s * (1 + i)^{-1} = M_1 * (1 + i)^{-s}$$

La cantidad de cupones que se amortizan en cada sorteo es decreciente en progresión geométrica a razón $(1 + i)^{-1}$

$$M_1 = \frac{N}{C * (1 + i)}$$

Despejamos M_1de la anualidad del primer año:

$$M_1 = \frac{N}{C * (1 + i)}$$

Títulos vivos después de cada sorteo se puede obtener por el método recurrente:

$$N_s = N_{s-1} - \frac{a}{C * (1 + i)^s}$$

Y se puede obtener el número total de títulos amortizados en los s primeros periodos:

$$\mathfrak{M}_s = M_1 * \ddot{a}_{\overline{s}|i}$$

9.4.2 Tipo II

Ya descritos en la clasificación.

El termino amortizativo, o anualidad, del año s :

$$a_s = C * M_s * (1 + i)^s$$

La equivalencia financiera:

$$C * N = \sum_{s=1}^{n} a_s * (1 + i)^{-s}$$

Al restar la estructura de dos anualidades consecutivas podemos despejar el número de títulos que se amortizan en cada periodo:

$$M_{s+1} = M_s * (1+i)^{-1} + \frac{a_{s+1}}{a_s}$$

El número de títulos que se amortizan en un periodo, decrecientes igual que en el tipo I, dependen ahora también de la relación entre las anualidades de ese periodo y el anterior.

$$M_1 = \frac{a_1}{C * (1+i)}$$

Para conocer los titulos vivos:

$$N_s = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{a_r}{C} * (1+i)^{-r}$$

Análogamente al caso de los cupones pospagables, un caso particular que está muy extendido en la práctica es el que amortiza el mismo número de títulos en cada periodo

$$M = \frac{N}{n}$$

$$N_s = \frac{(n-s)}{n} * N$$

$$\mathfrak{M}_s = \frac{s}{n} * N$$

$$a_{s+1} = a_s * (1+i)$$

Los términos amortizativos crecen en progresión geométrica (1+i)

9.4.3 Tipo III

Su estudio detallado no tiene gran interés por su complejidad y poca aplicación práctica.

Su anualidad se define por:

$$a_s = C * M_s * \prod_{h=1}^{s} (1+i_h)$$

9.5 Cuadros de amortización

Son análogos a los de los préstamos, pero con algunas columnas que reflejan el plan de amortización de los títulos.

Dado que no suelen darse números enteros en la cantidad de títulos a amortizar según los cálculos, hay que ajustarlos para que sean enteros.

Los métodos más adecuados son el de redondeo (se suman partes enteras y la diferencia sin emitir se alcanza redondeando hacia arriba los números empezando por el decimal más alto hasta alcanzar el total de títulos a amortizar) y el de los residuos capitalizado (los decimales son el residuo y se capitalizan al periodo siguiente y se suman a a_{s+1} , así hasta el final del empréstito).

De forma general podemos decir que tienen esta estructura:

Año(periodo)	Amortización de títulos			Amortización del empréstito			
	Parcial	Acumulado	Vivos	Interés	Amortización	Anualidad	Pendiente
0			N				$C * N$
1	M_1	$\mathfrak{M}_1$	N_1	$C * N * i_1$	$C * M_1$	$(I + A)_1$	$C * N_1$
2	M_2	$\mathfrak{M}_2$	N_2	$C * N_1 * i_2$	$C * M_2$	$(I + A)_2$	$C * N_2$
…	…	…	…	…	…	…	…
n	M_n	$\mathfrak{M}_n$	0	$C * N_{n-1} * i_n$	$C * M_n$	$(I + A)_n$	0

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 10. Empréstitos con características comerciales: Características y normalización de empréstitos con pago de cupones vencido en sus tipos I, II y III

Edición Noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Véase tema 9 para definición e introducción a los empréstitos y tema 5 para las operaciones financieras con características o condiciones comerciales complementarias

Empréstitos con características comerciales

Es normal que en estas operaciones financieras aparezcan condiciones complementarias a la operación.

Suelen ser ofrecidas por el emisor y normalmente hacen más atractiva la participación de los potenciales suscriptores.

Estas características comerciales alteran las cuantías entregadas realmente por el emisor y afectan al tanto efectivo de coste y la rentabilidad para los suscriptores.

Estas características comerciales pueden ser:

Unilaterales: Las entrega un aparte, normalmente el emisor, y las recibe una tercera persona.

Bilaterales: las entrega una parte y lo recibe la otra.

Características unilaterales

Estudiamos distintos ejemplos:

Gastos iniciales:

$\boldsymbol{G_0^e}$. Se producen al iniciar la operación y los paga el emisor, afectando a su tanto efectivo.

Algunos ejemplos son:

- Gastos de escritura de la emisión y de inscripción en el Registro Mercantil. Los reciben los correspondientes federatarios públicos.
- Gastos de imprenta de los títulos en el caso de que sean físicos.
- Gastos de publicidad del empréstito para atraer a los suscriptores.
- Comisión bancaria para las entidades que colocan la emisión entre sus inversores. Este gasto suele corresponde a un tanto por ciento del nominal del empréstito, variable según este asegurad a o no la colocación de la emisión.
- Gastos notariales y de Registro de la Propiedad cuando la emisión es efectuada con garantía hipotecaria.

Como ya se ha comentado, estos gastos afectan al tanto efectivo del emisor, pero no a la estructura de la anualidad ni a la dinámica de la amortización.

Gastos finales:

$\boldsymbol{G_n^e}$. Se producen al terminar la operación y los paga el emisor, afectando a su tanto efectivo.

Suelen corresponder a los gastos de levantamiento de garantías que se hayan establecido.

Gastos de administración:

Son producidos cuando el emisor delega a las entidades bancarias el pago de los intereses y la amortización de los títulos y se formalizan en forma de comisiones proporcionales a la cuantía que se gestiona.

Pueden ser comisiones diferentes si se trata de pagar cupones o pagar los reembolsos.

$\boldsymbol{g_1} = comision\ en\ tanto\ por\ uno\ sobre\ el\ iporte\ de\ los\ cupones\ pagados.$

$\boldsymbol{g_2} = comision\ en\ tanto\ por\ uno\ sobre\ el\ importe\ de\ los\ valores\ de\ reembolso.$

Cuando la comisión es la misma para los dos tipos de pagos se anota con **g**.

Esta característica si influye en la estructura de la anualidad y en el tanto efectivo del emisor.

Impuestos

Se pueden producir en el momento de la emisión deben incluirse en los gastos iniciales o al final de la operación y deben incluirse como gastos finales, según lo descrito anteriormente ay a cargo del emisor.

En cuanto a los intereses que reciben los obligacionistas, deben incluirse en el I.R.P.F. o en el Impuesto de Sociedades, previa retención a cuenta.

Características bilaterales

Son ofrecidas habitualmente por el emisor a los obligacionistas para hacer más atractiva la operación para los suscriptores potenciales.

Prima de emisión:

$\boldsymbol{P_e}$; Existe cuando se emiten los títulos a un precio $\boldsymbol{V}$ inferior al nominal $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{P_e = C - V}$$

Influye en el tanto efectivo del emisor y del obligacionista. No influye en la estructura de la anualidad porque el pago de cupones se efectúa con el valor nominal o por el valor de reembolso previo.

Prima de amortización:

Existe cuando se ofrece un valor de reembolso mayor que el nominal.

Esta prima puede ser constante y se anota como $\boldsymbol{P}$ o variable cuando su valor es diferente para cada sorteo y se anota como $\boldsymbol{P_s}$.

$$\boldsymbol{P = C' - C}$$

$$\boldsymbol{P_s = C_s - C}$$

Si se modifica la estructura de la anualidad e influye en los tantos efectivos del emisor y de los obligacionistas.

Lote:

Es un premio que se reparte entre una parte de las obligaciones.

Si es constante independientemente del sorteo se anota como L y si varia de un sorteo a otro se anota como L_s.

Los títulos que son premiados con el lote son elegidos por azar y a diferencia de la prima de amortización que no puede ser muy elevada porque afecta a todos los obligacionistas, estos lotes suelen un múltiplo del nominal del título.

Al igual que la prima de amortización, se modifica la estructura de la anualidad e influye en los tantos efectivos del emisor y de los obligacionistas premiados con el lote.

Amortización seca o ex-cupón

Existe cuando los títulos no reciben el cupón correspondiente al momento de la amortización.

No se cobra el interés del último periodo. Funciona como una prima de amortización negativa y hace menos atractiva la emisión, pero es una cantidad que no suele afectar significativamente al total de los intereses percibidos y no es percibida como una pérdida importante.

Si afecta a la estructura de la anualidad y a los tantos efectivos de ambas partes.

NORMALIZACIÓN DE LOS EMPRÉSTITOS

Ya se ha comentado que algunas de las características comerciales afectan a la anualidad y al plan de amortización de los títulos.

Esto modifica la ecuación de equivalencia financiera.

Para poder resolver el empréstito debemos recurrir a un recurso que llamamos Normalización.

La Normalización la podemos definir como la transformación del empréstito con características comerciales en otro cuya anualidad siga la estructura de los empréstitos normales.

Esto se consigue realizando un cambio de variables en la que se modifica tanto la anualidad como el tanto.

Una vez hecho el cambio de variables se resuelve el empréstito normalizado.

Posteriormente se deshace el cambio de variables y se obtienen la anualidad y el plan de amortización del empréstito con características comerciales que se está estudiando.

Pueden existir empréstitos con características comerciales tan complejas que no son normalizables, pero no son utilizados en la práctica real.

Estos son los pasos que seguir para normalizar un empréstito en la práctica:

Se plantea la estructura de la anualidad:

Ej. $a_s = ((C * i * N_{s-1}) + (C_s * M_s) * (1+g)$

Se realizan las transformaciones necesarias para que en la segunda parte de la igualdad queden solo intereses y amortización:

En este caso es posible gracias a multiplicar por C, dividir por C_s y por $(1+g)$.

$$\frac{a_s}{(1+g)} * \frac{C}{C_s} = C * i * \frac{C}{C_s} * N_{s-1} + C * M_s$$

Se resuelve como un empréstito normal considerando

$$a_s' = \frac{a_s}{(1+g)} * \frac{C}{C_s}$$

$$i_s' = i * \frac{C}{C_s}$$

Obteniendo de este modo la estructura de la anualidad

$$a_s' = C * i_s' * N_{s-1} + C * M_s$$

Ecuación correspondiente a un empréstito normal de tipo III.

Una vez resuelto el empréstito normalizado se deshace el cambio de variable y se despeja a_s.

Aunque el plan de amortización si que podemos obtenerlo en este caso del empréstito normalizado porque no se han modificado ni M_s ni N_s.

NORMALIZACIÓN DE EMPRÉSTITOS CON PAGO DE CUPONES VENCIDO. TIPOS I, II Y III

Una vez conocido el procedimiento generalizado de normalización de empréstitos, vamos a estudiar alguno ejemplos utilizando empréstitos que pagan los cupones vencidos.

TIPO I

Prima de amortización constante

Valor de reembolso comercial:

$$C' = C + P$$

Anualidad comercial constante del año s:

$$a = C * i * N_{s-1} + C^{´} * M_s$$

Si aplicásemos la expresión que permite obtener la anualidad de los empréstitos normales tipo I solo se podrían pagar los intereses a los títulos vivos y reembolsar por el nominal a los títulos amortizados, pero no podremos pagar la prima de amortización.

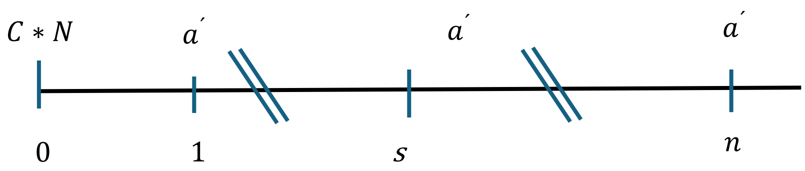
Para normalizar, multiplicamos la expresión de la anualidad por $\frac{C}{C^{´}}$

$$a * \frac{C}{C^{´}} = C * i * \frac{C}{C^{´}} * N_{s-1} + C^{´} * \frac{C}{C_s} * M_s$$

$$a^{´} = a * \frac{C}{C^{´}}$$

$$i^{´} = i * \frac{C}{C^{´}}$$

$$a^{´} = C * i^{´} * N_{s-1} + C * M_s$$



$$a^{´} = \frac{C * N}{a_{n\rceil i}}$$

Hallamos el plan de amortización resolviendo el empréstito normalizado según el método descrito para empréstitos del tipo I.

$$M_{s+1} = M_s * (1 + i^{´}) = M_1 * (1 + i^{´})^s$$

Para hallar M_1 tenemos varias opciones segunen que exopresion lo despejemos:

$$M_1 = \frac{a^{´} - C * i^{´} * N}{C} = \frac{a - C * i * N}{C^{´}} = \frac{N}{S_{n\rceil i^{´}}}$$

Para N_s tenemos también varias expresiones:

$$N_s = N * \frac{a_{n-s\rceil i^{´}}}{a_{n\rceil i^{´}}}$$

$$C * N_s = a^{´} * a_{n-s\rceil i^{´}} \Leftrightarrow C^{´} * N_s = a * a_{n-s\rceil i^{´}}$$

Para el total de títulos amortizados los s primeros periodos:

$$\mathfrak{M}_s = N - N_s = N * \frac{S_{s\rceil i^{´}}}{S_{n\rceil i^{´}}}$$

La anualidad normalizada $a^{´}$ es correspondiente a un empréstito ficticio.

Es preciso obtener a para resolver el empréstito que es objeto de vuestro estudio.

$$a = \frac{C' * N}{a_{\overline{n|}i'}}$$

Gastos de administración

Tenemos

$\boldsymbol{g_1} = comision\ en\ tanto\ por\ uno\ sobre\ el\ iporte\ de\ los\ cupones\ pagados.$

$\boldsymbol{g_2} = comision\ en\ tanto\ por\ uno\ sobre\ el\ importe\ de\ los\ valores\ de\ reembolso.$

La estructura de la anualidad del año s:

$$a = C * i * N_{s-1} * (1 + g_1) + C * M_s * (1 + g_2)$$

Normalizamos dividiendo entre $(1 + g_2)$

$$\frac{a}{(1 + g_2)} = C * i * \frac{(1 + g_1)}{(1 + g_2)} * N_{s-1} + C * M_s$$

$$a' = \frac{a}{(1 + g_2)}$$

$$i' = i * \frac{(1 + g_1)}{(1 + g_2)}$$

La anualidad y la estructura de la anualidad se resuelve por el mismo procedimiento que el anterior caso y deshaciendo para conocer a , nos queda.

$$a = \frac{C * N}{a_{\overline{n|}i'}}$$

Teniendo en cuenta el valor de i' en este caso.

Amortización seca, lote y gastos de administración

Los gastos de administración son g por uno sobre las cuantías que se pagan.

Solo cobran cupón $N_{s-1} - M_s$ títulos porque no se cobra el último cupón.

La estructura de la anualidad queda así:

$$a = [C * i * (N_{s-1} - M_s) + C * M_s + L] * (1 + g)$$

$$a = [C * i * N_{s-1} + C * M_s(1 - i) + L] * (1 + g)$$

Normalizamos dividiendo entre (1+g), pasamos L al primer miembro de la igualdad y dividimos por (1-i).

$$\left(\frac{a}{(1+g)}-L\right)*\frac{1}{(1-i)}=C*\frac{1}{(1-i)}*N_{s-1}+C*M_s$$

Se resuelve como un empréstito normal del tipo I como ya hemos visto en los dos casos anteriores.

Resultando

$$i^{'}=\frac{1}{(1-i)}$$

$$a=(1+g)*\left[\frac{(1-i)*C*N}{a_{\overline{n}|i^{'}}}+L\right]$$

TIPO II

Si en los casos anteriores se hubiera utilizado una anualidad comercial variable, el empréstito normalizado que hubiéramos tenido que resolver como paso previo a conocer la anualidad comercial hubieran sido de tipo II.

Anualidad variable y prima de amortización constante.

La estructura de la anualidad es:

$$a_s=C*i*N_{s-1}+C^{'}*M_s \quad con\ s=1,2,\ldots,n$$

Al ser $C^{'}=C+P$, normalizamos multiplicando por $\frac{C}{C^{'}}$

$$a_s*\frac{C}{C^{'}}=C*i*\frac{C}{C^{'}}*N_{s-1}+C*M_s$$

Esta estructura corresponde con la anualidad de un empréstito tipo II.

Se resuelve el plan de amortización y la anualidad con el procedimiento ya descrito en el tema 9.

Después, como siempre, se deshace el cambio para obtener a_s.

Anualidad y tanto constante y lote variable.

Si bien la anualidad comercial es constante, la anualidad normalizada es variable, al serlo el lote y es por ello por lo que se resuelve como un empréstito tipo II.

La estructura del año s es:

$$a=C*i*N_{s-1}+C*M_s+L_s$$

$L_s$es el lote que se paga a los títulos que se amortizan en el periodo s.

Normalizar es muy sencillo y solo debemos pasar el lote al primer miembro de la igualdad.

La ecuación de equivalencia financiera es, por tanto:

$$C * N = \sum_{s=1}^{n} a_s^{'} * (1+i)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} (a - L_s) * (1+i)^{-s} = a * \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} - \sum_{s=1}^{n} L_s * (1+i)^{-s}$$

Despejamos a:

$$a = \frac{C * N * \sum_{s=1}^{n} L_s * (1+i)^{-s}}{a_{n\rceil i}}$$

Obtenemos el plan a partir de las ecuaciones de los empréstitos normales de tipo II.

Si restamos la anualidad de os años consecutivos y despejamos los títulos que se amortizan cada sorteo, tenemos su relación de recurrencia:

$$M_{s+1} = M_s * (1+i) + \frac{L_s - L_{s+1}}{C}$$

Hallamos previamente M_1 a partir de la estructura de la anualidad:

$$M_1 = \frac{a - C * i * N - L_1}{C}$$

TIPO III

Si en los casos anteriores utilizados en el tipo I se hubiera utilizado una anualidad comercial variable y un tanto variable, el empréstito normalizado que hubiéramos tenido que resolver como paso previo a conocer la anualidad comercial hubieran sido de tipo III.

Anualidades y tantos variables y prima de amortización constante

En este caso, la estructura de la anualidad es como sigue:

$$a_s = C * i_s * N_{s-1} + C^{'} * M_s$$

Normalizamos, como en los otros casos análogos, multiplicando por $\frac{C}{C^{'}}$

$$a_s * \frac{C}{C^{'}} = C * i_s * \frac{C}{C^{'}} * N_{s-1} + C^{'} * M_s$$

Al ser a_s y $i_s$variables, $a_s^{'}$ y $i_s^{'}$ también lo serán y se resuelve como un empréstito normal de tipo III.

Anualidad y tanto constantes y prima de amortización variable

Al ser C_s variable dado que P_s lo es, tanto $a_s^{'}$ como $i_s^{'}$ también lo serán.

La estructura de la anualidad:

$$a = C * I * N_{s-1} + C_s * M_s$$

Normalizamos multiplicando por $\frac{C}{C_s}$

$$a * \frac{C}{C_s} = C * i * \frac{C}{C_s} * N_{s-1} + C * M_s$$

$$a_s^{'} = a * \frac{C}{C_s}$$

$$i_s^{'} = i * \frac{C}{C_s}$$

El empréstito se resuelve como un empréstito normal de tipo III.

La ecuación de equivalencia financiera establece que:

$$C * N = \sum_{s=1}^{n} a_s^{'} * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h^{'})^{-1} = \sum_{s=1}^{n} a * \frac{C}{C_s} * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h^{'})^{-1}$$

$$a = \frac{N}{\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{C_s} * \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h^{'})^{-1}}$$

Así obtenemos la anualidad comercial constante a partir del empréstito normalizado.

Bibliografía

GIL PELÁEZ, Lorenzo. *Matemática de las operaciones financieras*. 3ª ed. Madrid: UNED, 1983. ISBN 84-362-1612-1.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4675-9.

DE PABLO LÓPEZ, Andrés. Matemática de las operaciones financieras II: préstamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2005. ISBN 978-84-362-4058-0.

AGUIRRE, H.M.V. *Matemáticas financieras*. 5ª ed. México: Cengage Learning Editores SA de CV, 2012. ISBN 9786074818215.

APRAIZ LARRAGÁN, A. *Fundamentos de matemática financiera*. 2ª ed. Bilbao: Editorial Desclée de Brouwer, 2003. ISBN 9788433021236.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. *Introducción a las matemáticas financieras*. 2ª ed. Madrid: Pirámide, 2008. ISBN 9788436821765.

MINER ARANZÁBAL, J. *Matemática financiera*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, 2004. ISBN 8448198298.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 11. Valoración de activos financieros de renta fija a corto, medio y largo plazo. Rentabilidad para los obligacionistas.

Edición Julio 2025

1. Introducción

Un activo financiero representa un derecho de propiedad frente a una corriente futura de renta. Se caracteriza por:

- Rentabilidad, medida por el tanto de rendimiento que resulta de comparar el coste con la corriente de ingresos que proporciona el activo;
- Liquidez: Es la facilidad que tiene el activo para ser convertido en dinero sin que se incurra en pérdidas significativas;
- Riesgo: Posibilidad de obtener unos ingresos menores a los esperados o incluso de incurrir en pérdidas. Tiene una relación inversa con la rentabilidad.

2. Valoración de activos de renta fija

Los activos de renta fija son valores emitidos por empresas privadas o instituciones públicas representativos de los préstamos que los emisores reciben. Distinguimos:

- Activos del Mercado de Dinero o del Mercado Monetario (c/p), e
- Instrumentos de renta fija o del Mercado de Capitales (m/p, l/p).

Confieren a su titular derechos económicos: percepción de intereses pactados y devolución de todo o parte del capital a una fecha dada.

Para el emisor suele supone una fuente de financiación más barata que la bancaria, en la medida en que se evita la intermediación y se reparte el riesgo.

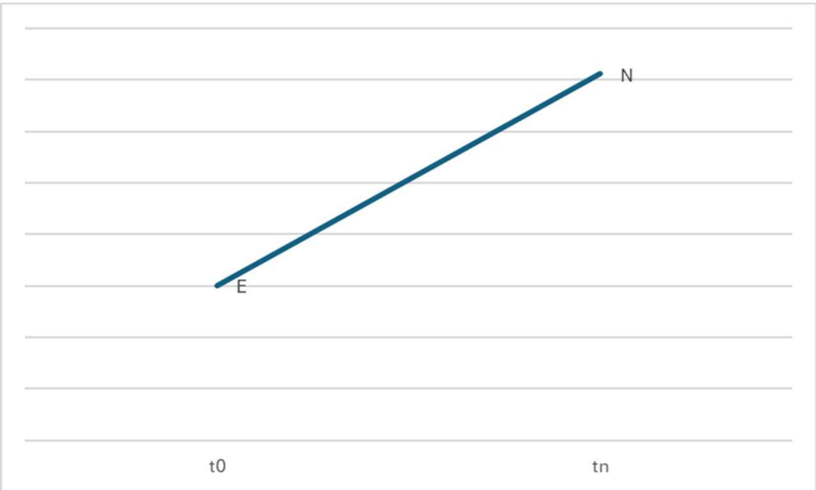
Elementos:

- Precio de emisión: El efectivo de la suscripción;
- Valor nominal: También llamado valor a la par o principal, es la cuantía que el titular de un bono percibirá al vencimiento. Este valor no es el precio del bono, ya que:
    - Si el precio supera el valor nominal, hablamos de una emisión con prima;
    - Si el precio queda por debajo del valor nominal, hablamos de una emisión a descuento.
- Cupón: Cuantía periódica que recibirá el propietario del bono en concepto de interés. Se calcula como un porcentaje (fijo o variable) del valor nominal. El cupón puede pagarse:
    - Periódicamente;
    - Acumulado al principal en el vencimiento (cupón cero);
    - Implícitamente: el rendimiento se genera por la diferencia entre el precio de adquisición y el de amortización.

- Cupón corrido: Parte del cupón devengado y no cobrado a una fecha concreta entre el pago de dos cupones correlativos;
- Vencimiento: Fecha futura a la que será pagado el principal al inversor. A mayor vencimiento, mayor riesgo y, por tanto, se espera una mayor fluctuación en su precio;
- Emisor: Entidad pública o privada que pide prestado dinero emitiendo un bono y pagando un interés. La estabilidad del emisor es la principal garantía de devolución del nominal. El sistema de rating de los emisores y de las emisiones permite determinar el riesgo de crédito del emisor. A menor rating, mayor riesgo y, por tanto, mayor interés se debe ofrecer.

3. Activos financieros de renta fija a corto plazo

- Prestación: Efectivo
- Contraprestación: Nominal
- Rendimientos: Implícitos
- Valoración: Estos títulos se emiten al descuento (o al tirón), aunque se usa, generalmente, capitalización simple.
- Emisión: Se emiten en el Mercado Monetario, con plazos de hasta 18 meses. Tienen una alta liquidez y un riesgo bajo.
- Las características comerciales suelen ser unilaterales, y las más frecuentes son:
    - Gastos de publicidad, administración, emisión, comisiones de aseguramiento, de colocación… afectan al emisor;
    - Comisiones de suscripción, mantenimiento y amortización: afectan al inversor.



Los principales activos de renta fija a corto plazo son las Letras del Tesoro y los Pagarés de Empresa.

Letras del Tesoro

- Son emitidas por el Estado (constituyen Deuda Pública) y son la forma más simple de endeudamiento del Estado.
- Se emiten mediante subasta.
- Se emiten al descuento o al tirón sobre el valor nominal que recibirá el inversor al vencimiento.
- Su ganancia, implícita, es la diferencia entre el nominal y el efectivo (precio pagado inicialmente).
- Los movimientos se registran en anotaciones en cuenta.
- Suelen emitirse a 3, 6 o 12 meses, en cuyo caso se valoran como $N = E(1 + i\frac{n}{360})$
- En el caso de que se emitan a 18 meses, se valoran como $N = E(1 + i)^{\frac{n}{360}}$

El rendimiento que aparece en la cotización de las Letras del Tesoro se llama tasa de descuento bancaria:

$$TDB = 100\frac{N - Precio\ Medio}{N}x\frac{360}{n}$$

Pero el verdadero rendimiento que obtiene el inversor no es esta TDB, sino la TAE (Tasa Anual Equivalente) que calcula el rendimiento anual obtenido a lo largo de la vida del título:

$$TAE = 100\frac{N - E}{E}x\frac{360}{n} = 100\frac{N - Precio\ medio}{Precio\ medio}x\frac{360}{n}$$

Si bien esta fórmula es la que emplea la Dirección General del Tesoro para calcular la TAE de sus emisiones, esta TAE no ofrece un rendimiento muy exacto porque:

- Usa capitalización simple y no compuesta;
- No considera las comisiones de compra y reembolso; y
- Usa el año comercial en lugar del natural.

En caso de que la emisión supere los 376 días, se calculará de la siguiente manera:

$$TAE = \left(\frac{N}{E}\right)^{\frac{365}{d}} - 1 = \left(\frac{N}{Precio\ medio}\right)^{\frac{365}{d}} - 1$$

Estas expresiones se usan en el caso de que las Letras se vendan en el mercado secundario antes de su vencimiento, sin más que sustituir el Efectivo (E) o Precio medio por el Precio de Compra y el Nominal (N) por el Precio de Venta.

REPOS

Merece especial mención el pacto de recompra o Repurchase Agreement (REPO), consistente en la venta de un activo financiero con pacto de recompra a precio y fecha determinados. Su principal ventaja es que, al conocerse el precio de recompra, se conoce exactamente la rentabilidad de la operación:

$$TAE = 100 \frac{Precio\ venta - Precio\ recompra}{Precio\ recompra} x \frac{360}{n}$$

Pagarés de empresa

- Título emitido al descuento que incorpora una obligación de pago al vencimiento por parte del emisor, que normalmente es una empresa industrial, comercial o financiera.
- Vencimiento: Normalmente inferior a dos años.
- Se emiten en el mercado primario por subastas competitivas o negociación directa, ya sea en serio (registrados en la CNMV) o a medida (no registrados).
- El objetivo perseguido por el emisor es la liquidez, reduciendo el coste de financiación a través de la captación de recursos a corto plazo de los ahorradores.
- Las emisiones de pagarés de empresa se sitúan, en teoría, entre el tipo de interés de las Letras del Tesoro y el Euribor.
- El tipo a tres meses suele incorporar una prima de entre 30 y 70 puntos básicos (100pb = 1%) sobre el rendimiento de las letras y en las emisiones a un año la prima es de unos 70pb.

4. Valoración de activos de renta fija a medio plazo: Bonos

Los tipos más frecuentes de bonos son:

- Bonos bancarios:
  - Bonos de caja
  - Bonos de tesorería
- Títulos hipotecarios:
  - Cédulas
  - Bonos hipotecarios
  - Participaciones
  - Bonos de titulización
- Bonos del Estado

Todos tienen dos características comunes: una gran liquidez y un vencimiento a medio plazo (2, 3 o 5 años).

Bonos bancarios

- 3 a 5 años
- Emitidos por entidades depositarias
- Cupón cero o variable. A veces convertible.

Títulos hipotecarios

- Cédulas:
  - Títulos garantizados por todos los créditos hipotecarios concedidos por la empresa emisora.
  - Plazo de entre 1 y 3 años.
  - Negociables en mercados monetarios, por su liquidez.
  - Se garantiza capital e intereses por las hipotecas inscritas por el emisor a favor de este.
- Bonos: la diferencia con las cédulas viene porque la garantía es por un crédito o grupo de créditos hipotecarios específicos.
- Participaciones:
  - Títulos nominativos mediante los que la entidad emisora puede hacer participar a terceros de un crédito o parte de este.
  - Transmiten el riesgo a terceros, aunque el emisor sigue estando legitimado para ejecutar las hipotecas.
  - Los créditos hipotecarios de características similares (vencimiento y rendimiento) se agrupan en paquetes del que se reparten las participaciones.
- Bonos de titulización hipotecaria: Se agrupa un gran número de activos (en este caso, de nuevo, préstamos hipotecarios) en una sociedad instrumental constituida al efecto que emite valores garantizados por estos activos.

Bonos del Estado

- 3 a 5 años
- El nominal suele estar en 1000€
- El cupón es, generalmente, anual
- Emisión mediante subasta mensual competitiva (se dan diferentes precios y existe una prima de emisión según se pague uno u otro precio)
- Mercado secundario: Central de anotaciones del Banco de España
- Amortización a la par

Tipos de emisiones:

- Emisión a la par, en que el precio del bono coincide con el nominal; esto implica entonces que el rendimiento del bono corresponde a los tipos de mercado.

- Emisión bajo la par: Son bonos con descuento, emitidos a un precio inferior al nominal, lo que implica que el rendimiento del bono es inferior al del mercado.
- Emisión sobre la par: con una prima de emisión (el precio del bono supera el nominal).

La valoración del bono en origen, cuando el cupón es periódico y constante:

$P = C * a_{\overline{n}r} + \frac{N}{(1+r)^n}$, siendo r la rentabilidad requerida; se trata, por tanto, de un dato subjetivo.

Si las frecuencias de los cupones fueran distintas del año:

$$P = \frac{C}{m} * \mathrm{a}_{\overline{n*m}|r/m} + \frac{N}{(1+\frac{r}{m})^{n*m}}$$

Así, teniendo P y N, podremos calcular el r no subjetivo de la inversión, y se comparará con los tipos de interés de mercado para calificar la inversión de buena o no.

La valoración de un bono cupón cero:

$$P = \frac{N}{(1+r)^n}$$

Cuando se compra un bono se debe tener en cuenta la convención más apropiada para contar el número de días de interés devengado en la operación. Las convenciones más utilizadas son:

- 30/360: renta fija privada; se considera que cada mes tiene 30 días.
- Actual/360: Letras del Tesoro y otros instrumentos del Mercado Monetario.
- Actual/365: Operaciones de bancos con sus clientes.
- Actual/Actual: Activos de interés explícito y bonos cupón cero.

El cupón corrido, como comentábamos anteriormente, es la parte proporcional de los intereses devengados desde la fecha de pago del último cupón hasta la fecha en la que se produce la valoración o venta.

Los precios de los bonos que cotizan y que se publican no son, en realidad, los precios que los inversores pagan por el bono, puesto que no incluyen el cupón corrido, es decir, son precios ex - cupón o clean prices. Cuando se incluye el cupón en el precio de venta, hablamos de dirty price. El cupón corrido se calcula de la siguiente manera:

$$CC = C\,\frac{n^{\underline{o}}\ días\ entre\ el\ pago\ del\ último\ cupón\ y\ la\ venta}{Días\ de\ pago\ entre\ dos\ cupones\ consecutivos}$$

¿Y cómo podemos medir el rendimiento de un bono? Vamos a tener distintos cálculos:

- Rentabilidad hasta vencimiento o yield to maturity:
    - Es lo que conocemos como la TIR
    - No será aplicable a cuones variables o indeterminados a priori, ni será útil si la inversión no se mantiene hasta vencimiento, porque podemos encontrarnos con

problemas a la hora de reinvertir los cupones a la misma tasa de rendimiento del bono.

- Despejaremos r de $P = C * a_{\bar{n}|r} + \frac{N}{(1+r)^n}$ si el cupón es constante
- Despejaremos r de $P = C_1(1+r)^{-1} + \cdots + C_{n-1}(1+r)^{-(n-1)} + (C_n + N)(1+r)^{-n}$ si el cupón no es constante
- En caso de cupón cero: $r = \left(\frac{N}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$

- Rentabilidad actual o current yield:
  - Rentabilidad que el cupón proporciona al inversor
  - Simplifica los cálculos de la TIR, asimilando el activo a una renta perpetua
  - Relativamente realista si el vencimiento es a muy largo plazo y el precio cercano a la par
  - No incluye ganancias ni pérdidas en el caso de que el activo se emita con descuento o prima
  - $r_{actual} = \frac{Cupón}{P} 100$
  - Reglas:
    - En bonos con prima: cupón > ractual > TIR (r)
    - En bonos con descuento: cupón < ractual < TIR (r)
- Rentabilidad real ajustada (adjusted current yield):
  - Incluye las ganancias o pérdidas que el inversor obtendría así el activo es emitido con descuento o con prima
  - $r_{aa} = r_{actual} + \frac{100-P}{n}$, siendo n el plazo hasta el vencimiento.
- Rentabilidad con cupones variables (floating rate note):
  - Cada cupón se fija en la fecha del pago anterior, en relación a un índice.
  - Suelen tener opciones de amortización anticipada (callables) a favor del emisor.
  - Existen diversas clases: capped (con tipos máximos), floored (con tipos mínimos), convertibles (en bonos a l/p con tipo fijo) y perpetuos (sin fecha de vencimiento expresa y con reserva por parte del emisor del derecho a establecerla).

5. Valoración de activos de renta fija a largo plazo

Obligaciones del Estado

- 10, 15, 30 años

- Cupón anual (generalmente, aunque también hay semestral)
- Emisión mediante subasta mensual
- Existe un mercado secundario y de repos
- La valoración es igual que en los bonos a m/p

Obligaciones empresariales

- Características no fijadas
- Suelen emitirse sobre la par, a la par o bajo la par
- Para su definición, atenderemos a:
    - Plazo hasta el vencimiento
    - Tipo del cupón
    - Calendario de amortización
    - Forma de emisión
    - Fiscalidad
    - Liquidez en mercado secundario
    - Calidad de la empresa emisora
- El rendimiento en estas inversiones es mayor que la deuda pública, dado el mayor riesgo de insolvencia y la mayor falta de liquidez.

La valoración a largo plazo es igual que a medio plazo, solo que trabajamos con plazos más largos.

6. Rentabilidad para los obligacionistas

Tanto efectivo medio para el conjunto de obligacionistas

Sea V el valor de cada obligación, y N el número de obligaciones. V*N será el desembolso del total de los obligacionistas. Entonces:

$$VN = \sum_{k=1}^{n} a_s^0 (1 + i_0)^{-k}$$

Siendo:

- i_0 el tipo efectivo
- a_s^0 el término amortizativo que reciben los obligacionistas

Como podemos ver, este tanto efectivo no tienen en cuenta las características comerciales.

Tanto de rentabilidad de un título

Despejaremos i_s de:

$$V = C * a_{\bar{s}|i_s} + \frac{C_s}{(1 + i_s)^s}$$

Esta rentabilidad corresponde a los títulos que se amortizan en el sorteo s.

La rentabilidad es decreciente con la vida del título y, por tanto, los que se amortizan más alejadamente tienen un tratamiento desfavorable.

Si se desea corregir este efecto y eliminar la aleatoriedad que presenta la rentabilidad, habrá que actuar sobre los valores de reembolso para asegurar una misma rentabilidad i_0 a todos los títulos independientemente del sorteo en el que resulten amortizados. El empréstito de Lenzi o a tanto de rendimiento constante cumple esta condición. Existen análisis que se pueden desarrollar para tratar de reducir la incertidumbre en cuanto a la rentabilidad de un título, como la vida media, la vida mediana y la vida financiera.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 12. El riesgo en los valores de renta fija. Riesgo de variación de los tipos de interés. Estructura temporal de los tipos de interés. Rentabilidad interna de un título. Duración y convexidad de un título.

Edición Julio 2025

1. Introducción

La inversión en títulos de renta fija no está exenta de riesgo. El ingreso que se recibe, por cupones y por el valor de reembolso (conocidos de antemano), no implica que la rentabilidad final sea fija.

La inversión en renta fija se ve afectada por varios tipos de riesgo entre los que se pueden citar:

- Riesgo de variación de los tipos de interés: Es el de mayor incidencia en la rentabilidad final. Es tanto mayor cuanto mayor sea la volatilidad de los títulos;
- Riesgo de amortización anticipada, si se contemplan cláusulas de este tipo en el contrato de emisión;
- Riesgo de insolvencia: Riesgo de que el emisor no pague los cupones y/o el valor de reembolso. Un indicador del riesgo de insolvencia son las calificaciones crediticias.
- Riesgo de inflación, a consecuencia de la depreciación monetaria.
- Riesgo de tipo de cambio, en caso de que la emisión sea en moneda extranjera.
- Riesgo de liquidez, si los títulos tienen poca frecuencia de cotización en mercados secundarios.
- Riesgo impositivo, por posibles cambios en el sistema fiscal.

Además, el tipo de interés varía en función del plazo de vencimiento aun entre títulos de iguales características. A la función que recoge estos diversos tipos de interés se le conoce como estructura temporal de los tipos de interés (ETTI).

2. Riesgo de variación de los tipos de interés.

Se produce por el desconocimiento que se tiene respecto al comportamiento futuro de los tipos de interés. Se desglosa en:

- Riesgo de reinversión: los cupones se han de reinvertir al tipo de interés vigente en cada momento del tiempo; el riesgo se materializa si los tipos de interés bajan.
- Riesgo de precio o de mercado: Si el inversor ha de vender el título antes de la fecha de amortización, si el tipo de interés ha subido, el precio habrá bajado, lo que afecta a la rentabilidad final de la inversión.

Por tanto, la variación de los tipos de interés produce dos efectos de signo contrario:

- Si aumentan los tipos de interés se pueden reinvertir los cupones a una mayor rentabilidad, pero el precio del título cae; y
- Si bajan los tipos de interés, aumenta el precio del título pero los cupones se reinvierten a una rentabilidad inferior.

Sí existen, sin embargo, tres circunstancias en que la renta fija sí será fija porque podemos hacer desaparecer este riesgo de tipo de interés:

- En bonos cupón cero mantenidos hasta vencimiento;

- En bonos con cupón periódico mantenidos hasta vencimiento y en que conseguimos reinvertir los cupones a la TIR; y
- En inversiones en bonos con una duración igual a nuestro horizonte de inversión.

Así, necesitamos adentrarnos en el análisis de la ETTI.

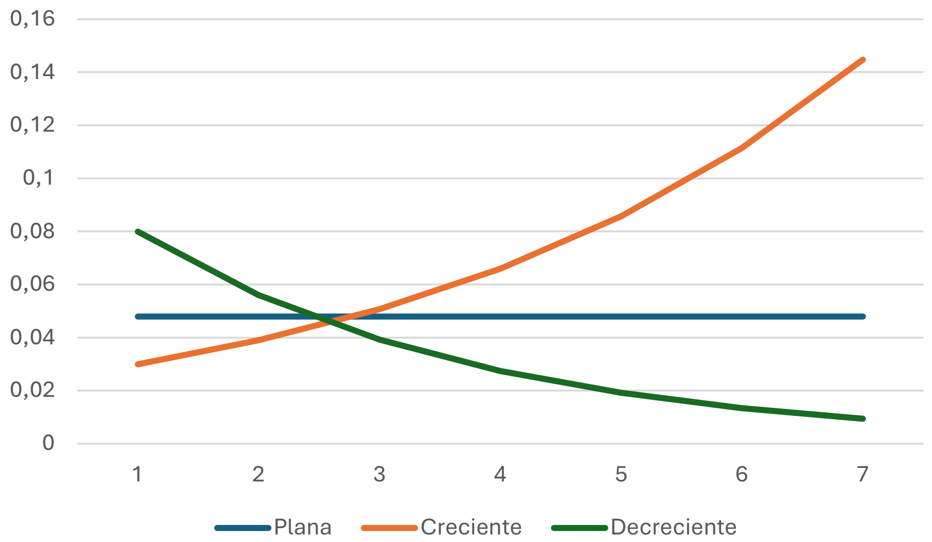
3. Estructura Temporal de los Tipos de Interés (ETTI)

La ETTI es la función que relaciona los tipos de interés al contado con los plazos hasta el vencimiento de los títulos de la misma o similar calidad crediticia, y misma divisa.

La Curva Cupón Cero (CCC) es la línea que representa esta función. Esta es estimada, ya que no existen en el mercado títulos cupón cero con la variedad de emisiones y volúmenes de contratación suficientes como para obtenerla. Los títulos considerados deben ser homogéneos y cubrir el horizonte temporal; la estimación se hace a partir de las emisiones de títulos con pago de cupones periódicos.

La ETTI puede presentar formas diversas:

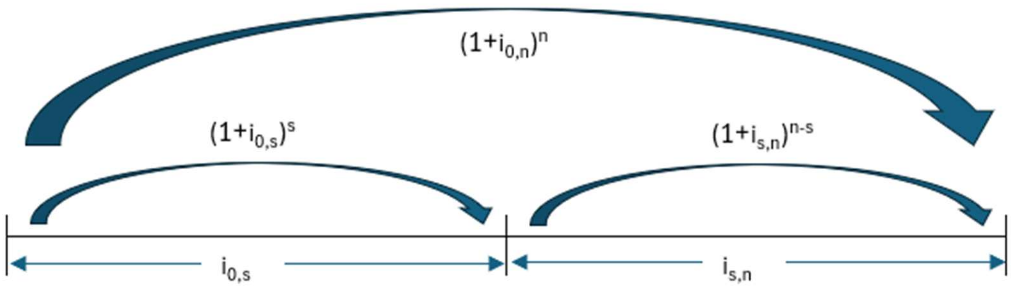
- ETTI plana: los tipos de interés al contado o spot ($i_{0,n}$) para todos los plazos son iguales
- ETTI creciente: los tipos crecen con el plazo
- ETTI decreciente: los tipos decrecen en el tiempo.



Relación entre tipos spot o al contado y forward o a plazo ($i_{s,n}$):

$$(1 + i_{0,n})^n = (1 + i_{0,s})^s (1 + i_{s,n})^{n-s}$$

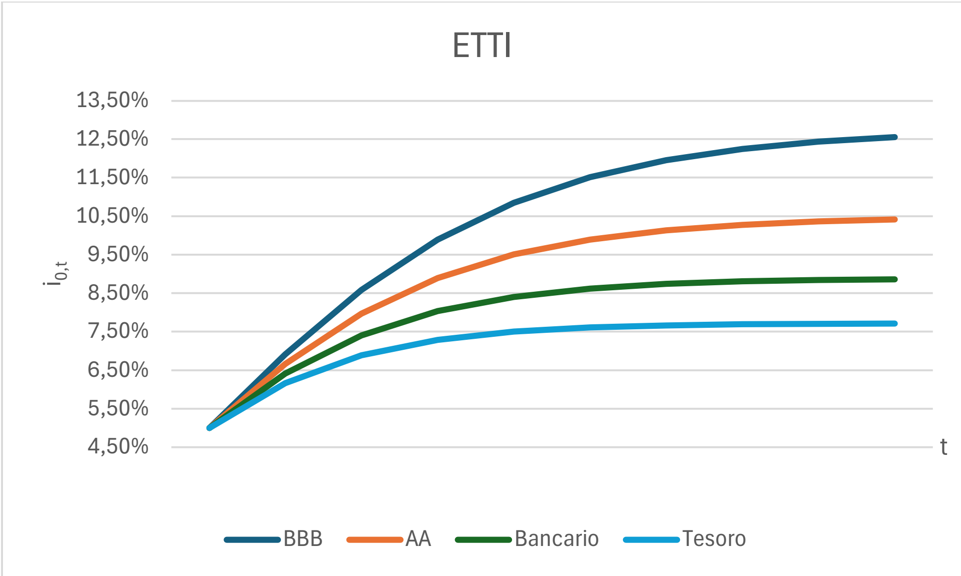
De donde despejaremos $i_{s,n}$.



En caso de trabajar con capitalización simple:

$$1 + i_{0,n}\frac{n}{365} = \left(1 + i_{0,s}\frac{s}{365}\right)\left(1 + i_{s,n}\frac{n-s}{365}\right)$$

La ETTI estará tanto más desplazada hacia arriba (es decir, los tipos cupón cero o rentabilidades exigidas a los diferentes plazos serán tanto mayores) cuanto mayor riesgo o peor calidad crediticia de los bonos denominados en una moneda:



La teoría nos dice que la ETTI es:

- Continua: el mercado la puede estimar en cualquier momento para todos los plazos temporales.
- Única: el mercado exige rentabilidades iguales a activos del mismo emisor al mismo plazo.

4. Rentabilidad interna de un título (TIR)

Las emisiones cupón cero son escasas en el mercado, siendo lo más frecuente el pago periódico de cupones.

A partir de la ETTI, se puede determinar el precio que debe tener un título que paga cupones de forma periódica:

$$P_0 = I_1(1+i_{0,1})^{-1} + I_2(1+i_{0,2})^{-2} + \cdots + (I_n + C_n)(1+i_{0,n})^{-n}$$
$$= \sum_{s=1}^{n} I_s(1+i_{0,s})^{-s} + C_n(1+i_{0,n})^{-n}$$

Siendo:

- I_s: cuantía del cupón
- C_n: rembolso del título

Conocidos los importes de todos los cupones y del reembolso se puede obtener el tanto de rentabilidad interna (TIR) que produce:

$$P_0 = \sum_{s=1}^{n} I_s(1+r)^{-s} + C_n(1+r)^{-n}$$

De donde despejaremos r (que será nuestra TIR).

En el caso particular de cupones constantes:

$$P_0 = I a_{\bar{n}|r} + C_n(1+r)^{-n}$$

Así, r es el tanto que iguala financieramente el precio por el título y los ingresos que se van a obtener en concepto de cupones y valor de reembolso. Por ello, es también el tanto que el mercado asigna en cada momento a esa clase de títulos.

Podemos hablar, también de la curva de rentabilidad interna (yield curve). Para construirla, se hallarán las TIR de emisiones homogéneas en cuanto al riesgo, pero no en cuanto al plazo. No debe confundirse con la ETTI, que recoge los tipos de interés al contado, ya que la yield curve recoge un promedio de los tipos de interés al contado. Ambas curvas coinciden si la ETTI es plana, pero:

- Si la ETTI es creciente, esta queda por encima de la TIR;
- Si la ETTI es decreciente, queda por debajo de la TIR.

En la práctica, la yield curve puede usarse para estimar la ETTI si se dispone de títulos homogéneos con vencimientos anuales consecutivos.

Una cuestión que veremos cuando nos adentremos en el estudio de la duración y convexidad de un título y que es muy relevante es que cuando analizamos la variación de los precios de los títulos en función de variaciones de la TIR, estamos asumiendo que tenemos una ETTI plana y que hablamos de desplazamientos paralelos de esa curva.

5. Duración y convexidad de un título

La duración financiera de Macaulay (D) se define como la media ponderada de los años de vida que le quedan a un título, empleando como pesos de ponderación los valores actuales de cada cuantía pendiente de percibir por cupones o valores de reembolso, divididos por el precio del título:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} kC_k(1+i)^{-k}}{P} = \sum_{k=1}^{n} kw_k$$

Con $P = \sum_{k=1}^{n} C_k(1+i)^{-k}$, siendo i la tasa interna de rentabilidad o TIR de la operación.

Así, como promedio, D es el centro de gravedad: generalmente, si los cupones son constantes, dado que el último pago corresponde a un cupón con reembolso, el peso pivotará hacia los últimos períodos. Si la amortización es con términos constantes (como, por ejemplo, en el método francés), la D suele estar más cerca del origen que del final de la vida de las obligaciones.

La duración D mide variaciones relativas del previo del bono ante variaciones relativas en la TIR, es decir, es una medida sintética del riesgo de tipo de interés de un bono: a mayor duración, mayor riesgo.

Para analizar la forma en que varía el previo en función del tipo de interés, analizaremos las derivadas primera y segunda:

$$f(i) = P = \sum_{k=1}^{n} C_k(1+i)^{-k}$$

$$f'^{(i)} = \frac{\partial P}{\partial i} = \sum_{k=1}^{n} -kC_k(1+i)^{-k-1}, < 0$$

$$f''^{(i)} = \frac{\partial^2 P}{\partial i^2} = \sum_{k=1}^{n} -k(-k-1)C_k(1+i)^{-k-2}, > 0$$

Vemos, pues, que midiendo f'(i) la sensibilidad del precio ante variaciones del tipo de interés, esta relación es inversa (por el signo negativo); por otro lado, siendo f''(i) positiva, implica convexidad de la función (respecto al origen).

Introduciendo f'(i) en la fórmula de la duración:

$$D = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n} kC_k(1+i)^{-k} = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial i}(1+i) = -\frac{\partial P}{P}\frac{1+i}{\partial i}$$

Si analizamos la sensibilidad por unidad monetaria, obtenemos la duración modificada, que mide variaciones relativas en el precio ante variaciones absolutas (en puntos porcentuales) en la TIR:

$$S = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial i} = \frac{\partial P}{P}\frac{1}{\partial i} = -\frac{D}{1+i} = -D_{MOD}$$

La sensibilidad no tiene sentido financiero de duración, pero puede obtenerse fácilmente a partir de ella, midiendo de forma directa la variación relativa del precio del título ante variaciones de tipos de interés:

Si expresamos $S = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial i}$ en incrementos finitos:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_{MOD}\Delta i$$

Por tanto:

$$\Delta P = -D_{MOD}\Delta i P$$

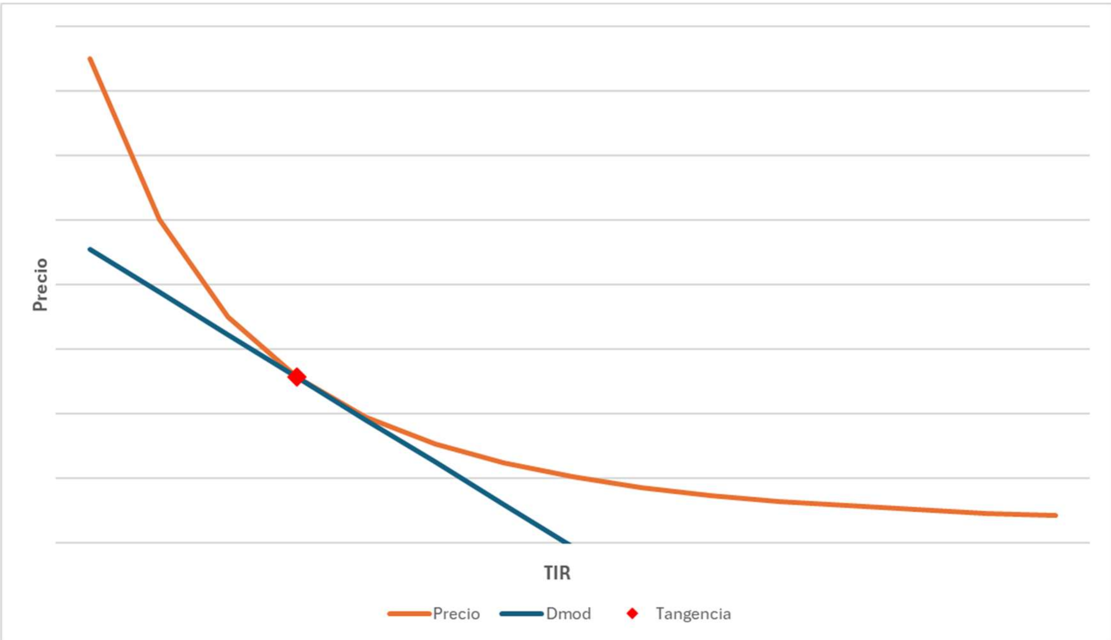
Sumando P en ambos miembros de la ecuación:

$$P' = P + \Delta P = P - D_{MOD}\Delta i P = P(1 - D_{MOD}\Delta i)$$

Permitiendo esta última ecuación estimar la variación relativa del precio de un título ante una variación absoluta del tipo de interés.

Podemos obtener la duración en euros multiplicando la D_{MOD} por el Precio P, y nos indicará lo que aumenta o cae el precio del bono (en euros) si la TIR sube o baja 100 puntos básicos (p.b.):

$$D_{€} = -PD_{MOD}0{,}01$$



Lo que hacemos es sustituir la curva por la recta que representa; el error cometido, que vendría representado por la distancia entre la recta (azul) y la curva (naranja), se llama convexidad. Esta convexidad manifiesta que la duración solo se puede tomar como medida de variación del precio ante variaciones en la TIR para variaciones pequeñas de TIR, ya que, cuando las variaciones de i son grandes, la desviación del precio real (curva) respecto del estimado (recta) es grande no sirviendo esta última de aproximación. En estos casos, debemos tener en cuenta la convexidad de la función, que puede entenderse como la variación en P que no viene explicada por la duración.

Para explicar la convexidad, desarrollamos la función P' = P(i+Δi) por el desarrollo de Taylor hasta su tercer término:

$$P(i+\Delta i) = P(i) + \frac{\partial P}{\partial i}\Delta i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}\Delta i^2$$

$$P(i+\Delta i) - P(i) = \frac{\partial P}{\partial i}\Delta i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}\Delta i^2$$

$$\frac{P(i+\Delta i) - P(i)}{P} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial i}\Delta i + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}\Delta i^2$$

$$\frac{\Delta P(i)}{P} = -D_{MOD}\Delta i + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}\Delta i^2$$

De donde la convexidad:

$$Cx = \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial i^2} = \frac{1}{2P}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)C_k(1+i)^{-k-2}$$

Conclusiones:

- La estimación del precio del título en función de la duración modificada implica la aceptación de que la ETTI es plana (poco realista) y que las variaciones se producen mediante desplazamientos paralelos a la curva cupón-cero para todos los tipos spot, ya que estos son sustituidos por la TIR del título. Si esto no se cumple, la D va a cambiar en función del proceso estocástico que defina el cambio en los tipos.
- La D vale como aproximación en caso de variaciones pequeñas, pero en variaciones mayores se debe emplear la convexidad.

En caso de querer calcular duración y convexidad de una cartera, se calcularán como media ponderada de las duraciones y convexidades de cada uno de los títulos, siendo el peso de ponderación el volumen de cada título respecto del volumen total de la cartera.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 13. Teoría de Carteras: Optimización media-varianza de Harry Markowitz. Carteras eficientes y línea eficiente. Las carteras de renta fija: Concepto y tipos de carteras. Rentabilidad y duración de una cartera.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Llamamos cartera de valores a una determinada combinación de valores mobiliarios adquiridos por una persona física o jurídica, pasando así a formar parte de su patrimonio. Los objetivos de una adquisición pueden ser:

- Obtención de un número elevado de acciones para obtener el control de una empresa;
- Invertir ahorro ocioso;
- Sustraer ahorros de los efectos de la erosión monetaria, invirtiendo para ello en valores de renta variable cuya rentabilidad guarde estrecha relación positiva con el índice general de precios (IPC);
- Colocar excedentes de ahorro de forma duradera para disfrutar de una renta complementaria a la del trabajo;
- Otros motivos, como el coleccionismo o el juego.

No obstante, el objetivo principal siempre va a ser el de combinar los activos de modo que se obtenga liquidez, rentabilidad y seguridad o bajo riesgo, siendo estos tres conceptos incompatibles entre sí.

A diferencia de la inversión productiva, la inversión financiera es:

- Fraccionable, representada en títulos-valores (ya sea de deuda o de capital social);
- Liquidable, pudiéndose conocer el valor real de los activos casi en tiempo real y, además, pudiéndose liquidar fácilmente gracias a los mercados de valores;
- Diversificable: al ser fraccionable, los inversores pueden materializar sus recursos en distintos tipos de activos financieros. Esto puede reducir el riesgo asociado a una cierta rentabilidad;
- Flexible en el tiempo: Se puede realizar en cualquier momento (gracias a su liquidabilidad), no existiendo normalmente compromiso de mantenimiento temporal de la inversión.

La teoría de carteras nos ha provisto de un gran número de técnicas que ayudan a realizar una gestión de carteras lo más profesional y óptima posible.

Un concepto fundamental dentro de la teoría de carteras es el de mercado eficiente. Ya en los años 50 se encontró que no había pauta de comportamiento predecible en los precios de las acciones, puesto que los precios evolucionan aleatoriamente, no pudiéndose predecir en el corto plazo. Esto puede ser un indicador del buen funcionamiento del mercado: un mercado eficiente es aquel en el que las acciones siempre están en equilibrio y además es imposible para un inversor batir al mercado reiteradamente.

Entendemos por mercado informativamente eficiente como aquel mercado que es eficiente procesando la información: Eugene Tena, a principios de los 70, definió los tres tipos de eficiencia que se reproducen universalmente:

- Un mercado es eficiente de forma débil si los precios históricos recogen toda la información contenida en las transacciones anteriores;

- Un mercado es eficiente semifuerte si toda la información sobre la empresa disponible públicamente ya está reflejada en el precio;
- La hipótesis de eficiencia fuerte sostiene que los precios incorporan no solo la información pública disponible, sino también la privada poseía por gestores de la empresa (insiders), conocida como información privilegiada.

El hecho de que se cumpla la eficiencia de mercado indica que la mayoría de las acciones no están sobrevaloradas ni infravaloradas, pero no quiere decir que no puedan subir o bajar cuando se publica nueva información desconocida para los inversores, ni que la información privilegiada esté incluida en el precio.

2. Modelos de cartera

Cartera eficiente

La teoría moderna de cartera se debe a Harry Markowitz que, en marzo de 1952, publicó un artículo en que estableció los principios básicos de la selección de títulos para la formación de carteras de valores (recibió el Novel en 1990).

Las hipótesis de su teoría son sencillas:

- Los inversores son racionales y adversos al riesgo → dada una elección entre dos activos con iguales rentabilidades, seleccionarán el activo de menor nivel de riesgo. Así, esperan una relación positiva entre rentabilidad y riesgo.
- La elección de la cartera óptima para cada inversor se realiza con base en la media, varianza y covarianza de los rendimientos de los activos.
- Además, interviene la función de utilidad de cada inversor para elegir la cartera óptima. El inversor desea maximizar la utilidad esperada de la riqueza final. Las funciones de utilidad son cuadráticas.
- Los mercados son perfectos, en el sentido de que:
  - No hay costes de transacción;
  - No hay impuestos;
  - El inversor no puede mover el precio con sus actos (es precio-aceptante); y
  - Los títulos son infinitamente divisibles.
- No hay endeudamiento, de modo que las proporciones invertidas en los distintos activos son siempre positivas o cero.

Activos individuales

Si llamamos P_t al precio de un activo financiero i en una fecha t, y suponemos que ese activo no paga dividendos, entonces su rentabilidad neta vendrá dada por:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

En caso de que sí hubiera dividendos:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + Div}{P_{t-1}}$$

La rentabilidad bruta se calcula como $1+R_t$.

La rentabilidad media esperada de un activo i es la media aritmética de las k observaciones de la rentabilidad, si son igualmente probables:

$$E(R_i) = \bar{R} = \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i}{k}$$

Para calcular el riesgo de un activo hay distintas medidas; nombramos a continuación algunas de ellas:

- La desviación típica de la rentabilidad esperada (o su cuadrado, la varianza).
- Rango de rentabilidades: Es la diferencia entre la mayor y la menor rentabilidad. Un rango mayor de rendimientos esperados implica mayor incertidumbre.
- Semivarianza: algunos inversores piensan que, al invertir, nos deben preocupar solo los resultados por debajo de la media esperada. Algunas extensiones calculan la semivarianza solo con los resultados por debajo de cero o por debajo de algún objetivo, como la inflación o el tipo de interés libre de riesgo.

En Teoría de Carteras usamos la desviación típica de los rendimientos porque:

- Es una medida intuitiva;
- Es una medida correcta y universalmente reconocida como medida de riesgo;
- Se usa en la mayoría de los modelos teóricos de valoración de activos.

La calculamos como:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{[R_i - E(R_i)]^2}{k}}$$

Siendo k las observaciones de las rentabilidades que tenemos del activo, y suponiendo que todas las observaciones tienen la misma probabilidad.

En caso de que no tuvieran la misma probabilidad:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} [R_i - E(R_i)]^2 * p_i}$$

Donde p_i es la probabilidad de un posible rendimiento R_i.

Al igual que ocurre con la rentabilidad, las medidas de riesgo deben ir asociadas a un período de tiempo. La varianza es proporcional al tiempo y la desviación típica es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo. Esto significa que, si tenemos una desviación típica semanal, para anualizarla tendremos que multiplicar por la raíz cuadrada del número de semanas que tiene un año.

Carteras

La tasa de rentabilidad esperada de una cartera es la media ponderada de las rentabilidades esperadas de los activos que componen la cartera. La ponderación es la proporción de cada activo en le valor total de la cartera. Para una cartera con n activos:

$$E(R_C) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \cdots + w_n E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$

Siendo w_i el peso del activo i en la cartera, y $E(R_i)$ la rentabilidad esperada del activo i.

Para calcular el riesgo de una cartera, que vamos a medir con la desviación típica de los rendimientos de la cartera, previamente necesitamos conocer la covarianza entre los activos. Dados dos activos i y j, la covarianza de sus rentabilidades se define como:

$$Cov_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\} p(R_i R_j)$$

Donde $p(R_iR_j)$ es la probabilidad de los rendimientos esperados R_i y R_j.

Cuando los rendimientos son igualmente probables, el cálculo de la covarianza queda:

$$Cov_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\}}{k}$$

La covarianza es una medida del grado en el que dos variables cambian juntas en relación a su media y a lo largo del tiempo. En carteras nos interesa la covarianza de las rentabilidades, no la covarianza de los precios u otras variables.

El coeficiente de correlación de los rendimientos tiene la siguiente relación con la varianza:

$$\rho_{ij} = \frac{cov_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Este coeficiente de correlación varía entre -1 (correlación negativa perfecta: los rendimientos de los activos se comportan exactamente de forma inversa, cuando uno sube, el otro baja) y +1 (correlación positiva perfecta: los rendimientos de los activos se comportan exactamente de la misma manera, los dos suben o bajan a la vez y en la misma intensidad). Un coeficiente de correlación igual a cero significa que no hay relación entre los activos, son independientes.

Ahora ya podemos calcular la desviación típica de una cartera compuesta por dos activos:

$$\sigma_c = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 Cov_{1,2}}$$

Si la cartera tuviera tres activos:

$$\sigma_c = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2Cov_{1,2} + 2w_1w_3Cov_{1,3} + 2w_2w_3Cov_{2,3}}$$

Siendo la fórmula genérica:

$$\sigma_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2w_iw_jCov_{i,j}}\ \forall i \neq j$$

Un problema importante de esta teoría es que el número de estimaciones que hay que realizar y manejar aumenta vertiginosamente a medida que incluimos activos en la cartera, ya que tenemos que estimar $\frac{n^2-n}{2}$ covarianzas y n varianzas para n títulos. Por ejemplo, si tenemos 10 activos en la cartera, tendríamos 55 estimaciones; pero si tuviéramos 50, las estimaciones ascenderían a 1275. Puede convertirse en algo tan irreal al considerar los modernos mercados de valores, ya que hay decenas de miles de activos financieros en los que es posible invertir.

Diversificación según Markowitz

Señalamos la particular forma de diversificación que supone Markowitz. La diversificación según Markowitz supone combinar activos con una correlación inferior a la unidad, para reducir los riesgos de las carteras sin sacrificar el rendimiento. En general, cuanto menores sean las correlaciones (o las covarianzas) de los activos, menos arriesgada será la cartera que los incluye. Esto es verdadero con independencia del riesgo que muestre cada activo de forma aislada.

Veamos un ejemplo en que combinamos dos activos que tienen el mismo riesgo y la misma rentabilidad esperada: a medida que disminuye la correlación, baja el riesgo de la cartera sin sacrificar rentabilidad. Cuando la correlación es -1, la desviación de la cartera nos queda cero. Así, es posible eliminar totalmente el riesgo de la cartera.

Veamos un caso en el que los activos de la cartera tienen distinto riesgo y rendimiento. Con correlaciones bajas, cero o negativas es posible obtener carteras que tienen menor riesgo que cada activo por separado. Cuando la correlación es -1, es posible encontrar las ponderaciones de los activos que nos darán una cartera de riesgo cero:

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, y\ w_2 = 1 - w_1$$

Cuando la correlación es distinta de -1, los pesos que nos darán el menor riesgo son:

$$w_1 = \frac{\sigma_2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}\ y\ w_2 = 1 - w_1$$

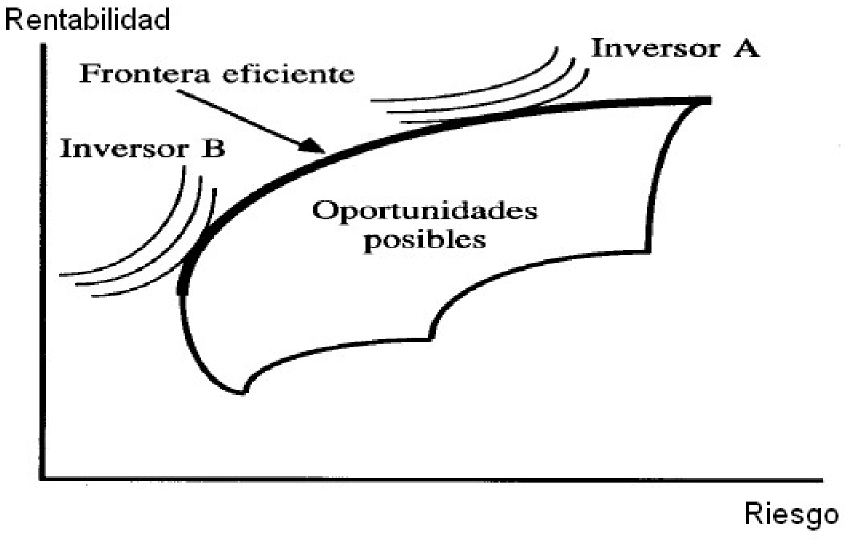
El modelo

El primer paso de este modelo es la identificación del conjunto de carteras eficientes. Por cartera eficiente entendemos aquellas que tienen un rendimiento esperado mayor que cualquier otra cartera con su mismo nivel de riesgo. El conjunto de carteras eficientes constituye la frontera eficiente de oportunidades de inversión.

La frontera de mínima varianza representa aquellas carteras con el mínimo riesgo para cada nivel de rentabilidad. Solo la parte superior de la frontera de mínima varianza es la frontera eficiente. La frontera eficiente empieza en la cartera con menor desviación típica global.

Luego, elegiremos la cartera óptima de la frontera, en función de nuestra función de utilidad y nuestra aversión al riesgo. Las curvas de utilidad del inversor especifican el intercambio entre riesgo y rendimiento que el inversor está dispuesto a asumir. Dada la frontera eficiente, estas curvas de utilidad determinan qué cartera en concreto de la frontera es la mejor para un inversor determinado.

La cartera óptima es la cartera de la frontera que representa el máximo nivel de utilidad para el inversor. Está en el punto de tangencia de la frontera eficiente y la curva con el máximo nivel de utilidad posible:



[1]

La principal desventaja de este modelo es la inestabilidad de las fronteras eficientes, puesto que todas las variables del modelo (rentabilidades, varianzas, covarianzas) cambian con el tiempo, cambiando así rápidamente las fronteras eficientes. Esto limita su uso como herramienta de inversión. También es difícil determinar qué se toma como rentabilidad esperada para un activo dado: ¿tomamos su rentabilidad pasada? ¿de qué período? ¿tomamos una estimación de su rentabilidad futura? En tal caso, ¿cuál?

[1] Fuente: Enciclopediafinanciera.com

En carteras de más de dos activos, la búsqueda de la frontera eficiente se escribiría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{Minimizar: } \sigma_c^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j w_i w_j \\ \text{Sujeto a: } E(R_C) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) \text{ y a } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \ (\forall w_i \geq 0) \end{cases}$$

O bien:

$$\begin{cases} \text{Maximizar: } E(R_C) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) \\ \text{Sujeto a: } \sigma_c^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j w_i w_j \ \leq \ \widehat{\sigma^2} \text{ y a } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \ (\forall w_i \geq 0) \end{cases}$$

Cuando incluimos el activo libre de riesgo en las carteras, R_f, y suponemos que el inversor puede prestar y tomar prestado cualquier cantidad de dinero a este tipo de interés R_f, estamos hablando del modelo de Tobin (1958).

Modelo de Tobin

Hipótesis básicas:

- Un activo libre de riesgo es aquel que tiene riesgo cero () porque su rentabilidad esperada es totalmente cierta: $\sigma_{rf} = 0$
- La rentabilidad ganada por ese activo, R_{rf}, se denomina rentabilidad libre de riesgo y debería igualar a la rentabilidad esperada a largo plazo de la economía con un ajuste por liquidez en el corto plazo.
- La covarianza del activo libre de riesgo con cualquier activo arriesgado (o cartera de activos arriesgados) es igual a cero: $cov_{i,rf}=0$; $\rho_{rf}=0$.

Cuando combinamos el activo libre de riesgo con un activo arriesgado, la cartear resultante tendrá la siguiente rentabilidad: $E(R_c) = w_iE(R_i) + (1 - w_i)R_{rf}$, siendo wi la proporción de la cartera invertida en el activo con riesgo i.

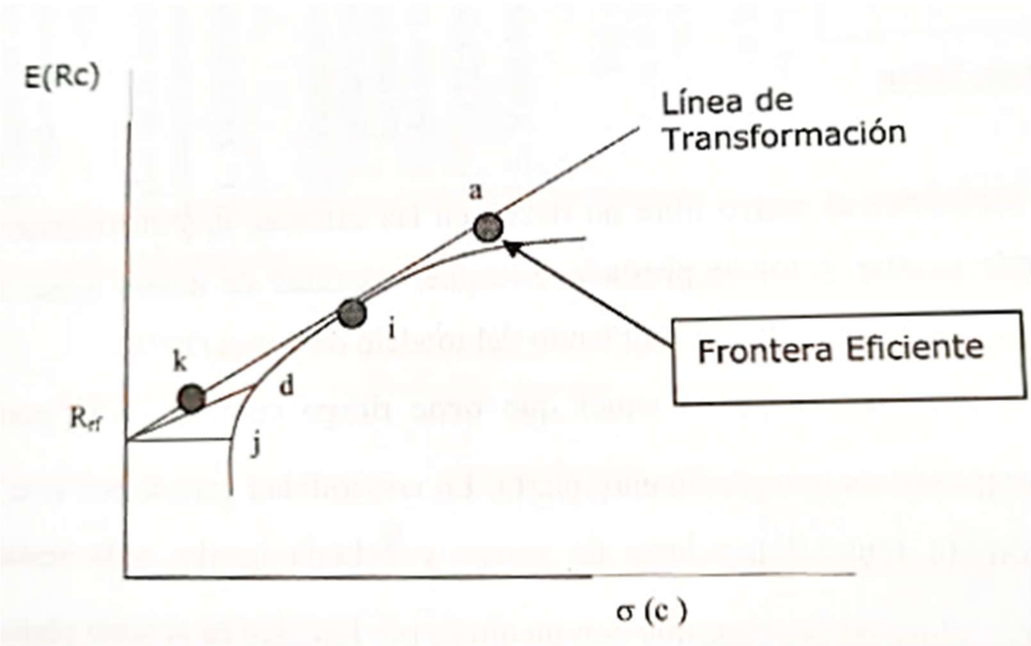
El riesgo de la cartera es una proporción del riesgo del activo arriesgado (o cartera arriesgada):

$$\sigma_p = \sqrt{w_i^2\sigma_i^2 + (1 - w_i)^2\sigma_{rf}^2 + 2w_i(1 - w_i)Cov_{i,rf}} = \sqrt{w_i^2\sigma_i^2} = w_i\sigma_i$$

Como tanto la rentabilidad como el riesgo de esta cartera son combinaciones lineales, el gráfico que representa el riesgo y rendimiento de la cartera es una línea recta que une los dos activos. Esta línea recta se denomina Línea de Transformación:

$$E(R_c) = R_{rf} + \frac{E(R_i) - R_{rf}}{\sigma_i}\sigma_c$$

Se puede alcanzar cualquier punto de la Línea de Transformación invirtiendo una parte de la cartera en el activo arriesgado, w_i, y el resto $(1 - w_i)$ en el activo sin riesgo. Esta línea de posibilidades de invertir domina todas las posibilidades de la frontera eficiente.



Aunque el inversor puede combinar ahora cualquiera de las carteras de la frontera eficiente con el activo libre de riesgo, solo una de las carteras de la frontera eficiente consigue el máximo rendimiento para cualquier nivel de riesgo. Esta cartera (denominémosla i) viene determinada por la tangente que, pasando por Rf, toca la frontera eficiente de Markowitz.

Invirtiendo en las proporciones adecuadas en Rf e i, cada inversor conseguirá su nivel de riesgo elegido. En otras palabras, la consecuencia principal de este análisis es sorprendente: todos los inversores poseerán una cartera i independientemente de sus preferencias riesgo-rendimiento y conseguirán el nivel deseado de riesgo prestando o endeudándose al tipo de interés libre de riesgo, Rf.

Otros

Existen otros modelos que toman como referencia la cartera de mercado, basándose en expectativas homogéneas de los inversores, de forma que la cartera tangente pasa a ser la de mercado, que se caracteriza porque:

- Incluye todos los activos arriesgados
- Es totalmente diversificable
- En ella desaparece el riesgo específico y único de cada activo.

Estos modelos son:

- Línea del mercado de capitales: en la anterior línea de transformación, cambiamos nuestra cartera de la frontera eficiente por la cartera de mercado.
- CAPM (Capital Asset Pricing Model): Si el inversor solo debe preocuparse por el riesgo sistemático (no diversificable), la medida relevante del riesgo de cualquier activo se basa en su covarianza con la cartera de mercado: $Cov(R_i,R_M)$. La representación gráfica del CAPM nos da la Línea del Mercado de Títulos.

3. Las carteras de renta fija: concepto y tipos de cartera

Los activos de renta fija son valores emitidos por empresas privadas o instituciones públicas representativos de los préstamos que los emisores reciben. Distinguimos:

- Activos del Mercado de Dinero o del Mercado Monetario (c/p), e
- Instrumentos de renta fija o del Mercado de Capitales (m/p, l/p).

Confieren a su titular derechos económicos: percepción de intereses pactados y devolución de todo o parte del capital a una fecha dada.

Para el emisor suele supone una fuente de financiación más barata que la bancaria, en la medida en que se evita la intermediación y se reparte el riesgo.

Denominamos cartera al conjunto de títulos que tiene un inversor en un momento dado. Los suscriptores de obligaciones son inversores que operan en el mercado buscando la mejor colocación de sus capitales entre la amplia gama de opciones y títulos que dicho mercado ofrece.

En un empréstito, los aspectos más relevantes a considerar son:

- La rentabilidad de los activos;
- El riesgo de no recuperar parte o todo lo invertido (insolvencia);
- El valor de los títulos cuando varían los tipos de mercado;
- En épocas de inflación, la previsión frente a la depreciación monetaria.

Así, al formar una cartera, se ha de tener en cuenta el riesgo de insolvencia que, como máximo, se está dispuesto a aceptar.

Las carteras de renta fija se pueden clasificar:

- Según su perfil de riesgo:
  - Conservadora: compuesta por Deuda Pública y empresas con alta calificación crediticia (rating)
  - Arriesgada: incorpora valores con mayor riesgo de impago pero mayor rentabilidad (incluyendo bonos basura)
- Según el objetivo perseguido:
  - De renta: el objetivo es la retribución periódica de los inversores
  - De capitalización: el objetivo es alcanzar un montante determinado al final del horizonte temporal que incluya, por ejemplo, una determinada rentabilidad sin previsión de pagos en dicho horizonte.

4. Rentabilidad y duración de una cartera

La rentabilidad de un título se mide por su TIR. Conocido el precio del título y las cuantías de los cupones y capital de reembolso, la TIR se despejará de:

$$P_0 = \sum_{k=1}^{n} I_k\,(1 + TIR)^{-k} + C_n(1 + TIR)^{-n}$$

Siendo la TIR el tanto que iguala el precio pagado por el título con los ingresos que se perciben por los supones y el valor de reembolso.

La TIR en una cartera es la media ponderada de las TIR de los activos que la componen, si bien no deja de ser una aproximación porque no tiene en cuenta las correlaciones entre los diversos títulos.

La duración es un concepto clave en la gestión de las carteras de activos de renta fija porque:

- Es una medida de plazo efectivo hasta el vencimiento de la cartera;
- Es una herramienta fundamental para la inmunización de carteras de los riesgos de tipos de interés;
- Es una medida de la sensibilidad de una cartera de activos de renta fija a fluctuaciones de los tipos de interés.

Cuando el tipo de interés cambia, la variación relativa del precio del bono es proporcional a su duración, y está relacionada con la variación absoluta de la rentabilidad al vencimiento:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D\,\frac{\Delta(1 + r)}{1 + r} = -D_{mod}\Delta r$$

Siendo:

- $D_{mod} = D(1 + r)^{-1}$
- $D = \sum_{t=1}^{T} \frac{\frac{CF_t}{(1+r)^t}}{P}$
- r= rentabilidad hasta el vencimiento

Las propiedades de la duración:

- A mayor plazo hasta el vencimiento, mayor duración (pero en menor medida que el plazo, ya que los flujos más alejados aportan menos duración);
- La duración de un bono solo coincide con su plazo de amortización en dos casos: cuando se trata de un bono cupón cero o cuando solo queda un vencimiento pendiente;
- La duración de un bono nunca podrá sobrepasar el valor asintótico, que es la duración de un bono perpetuo, calculada como: $D = \frac{1+r}{r}$;
- A mayor cupón nominal, menor duración;
- A mayor frecuencia de cupones, menor duración;
- A mayor tasa de rendimiento r, menor duración (y viceversa).

En las carteras de renta fija, cada bono tiene su propia duración resultante de los flujos futuros y sus respectivos vencimientos a consecuencia de la tenencia del título. Hay dos modos de calcular la duración para la cartera:

- Se calcula un flujo total en que se suman todos los importes (cupones, vencimientos) en sus respectivos vencimientos, para obtener una duración común. Muy laborioso.
- Calculamos la media ponderada de las duraciones de cada clase de títulos, utilizando como pesos de ponderación la proporción que representa el valor de esos títulos respecto al valor total de la cartera: $D_c = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{V_c} D_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k D_k$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 14. Factores determinantes del valor de la opción. Modelo de Black-Scholes. La paridad put-call. Instrumentos de cobertura a plazo: Forwards y futuros.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Un derivado es aquel producto cuyo valor se deriva de otro activo, denominado activo subyacente. Los subyacentes más comunes en los mercados financieros son las materias primas (commodities) y los activos financieros (divisas, acciones, tipos de interés, índices bursátiles...), si bien la variedad de derivados en el mercado se va ampliando día a día y cada vez está más extendida la negociación de derivados sobre el clima o la energía, por ejemplo.

La negociación de los productos derivados implica una contratación a plazo, cuyas condiciones detalladas (objeto, fechas, precio, etcétera) se fijan en el momento actual para una operación que tendrá lugar en un momento futuro. Esta negociación se lleva a cabo tanto en mercados organizados como en mercados no organizados.

Un mercado organizado se podría definir como aquel lugar en el que se negocian productos estandarizados en un lugar fijo y bajo una normativa preestablecida; mientras que los mercados no organizados permiten realizar operaciones personalizadas en cualquier lugar sin necesidad de someterse a una reglamentación estricta. En España un ejemplo de mercado organizado es el MEFF.

Los derivados son instrumentos financieros interesantes para cualquier inversor y constituyen una herramienta importante en manos de la dirección financiera de las compañías. En los mercados participan inversores diversos cuyos motivos para invertir en derivados son muy variados; algunos objetivos para la inversión en derivados son:

- Cobertura: las estrategias de cobertura con derivados tienen como principal objetivo proteger al inversor del riesgo que se deriva de una posición en un activo financiero, como consecuencia de las fluctuaciones en los precios de este;
- Especulación: se consiguen ganancias rápidas, en base a las expectativas sobre la tendencia del mercado. A pesar de las connotaciones negativas, la especulación proporciona beneficios al mercado financiero: potencia la liquidez del mercado, ayuda a nivelar los precios de los activos, y a veces sirve como contrapartida a los participantes en busca de cobertura;
- Arbitraje: participantes que compran un activo en un mercado y simultáneamente lo venden en otro, consiguiendo beneficio en su operación.

2. Las opciones financieras

Concepto

Una opción financiera es un contrato que proporciona al comprador (poseedor, titular o holder) el derecho a comprar o vender un activo en una fecha futura (o durante un período de tiempo) a un precio determinado. Por su parte, el vendedor o emisor de la opción tiene la obligación de vender o comprar dicho activo en las condiciones del contrato si el comprador así lo exige.

Adquirir el derecho a comprar o vender un activo tiene un coste: la prima (P). La prima de una opción es el precio de esta, pudiendo ser negociada entre comprador y vendedor en el mercado secundario. Es un dinero a fondo perdido.

Las opciones pueden ser:

- CALL: Opción de compra. Proporciona al poseedor el derecho a comprar un activo determinado en unas determinadas condiciones.
- PUT: Opción de venta. Proporciona a su poseedor el derecho a vender el activo objeto de contrato en unas condiciones determinadas.

En lo referente a la fecha de vencimiento de la opción (fecha de expiración o fecha de ejercicio), hay que diferenciar entre opciones:

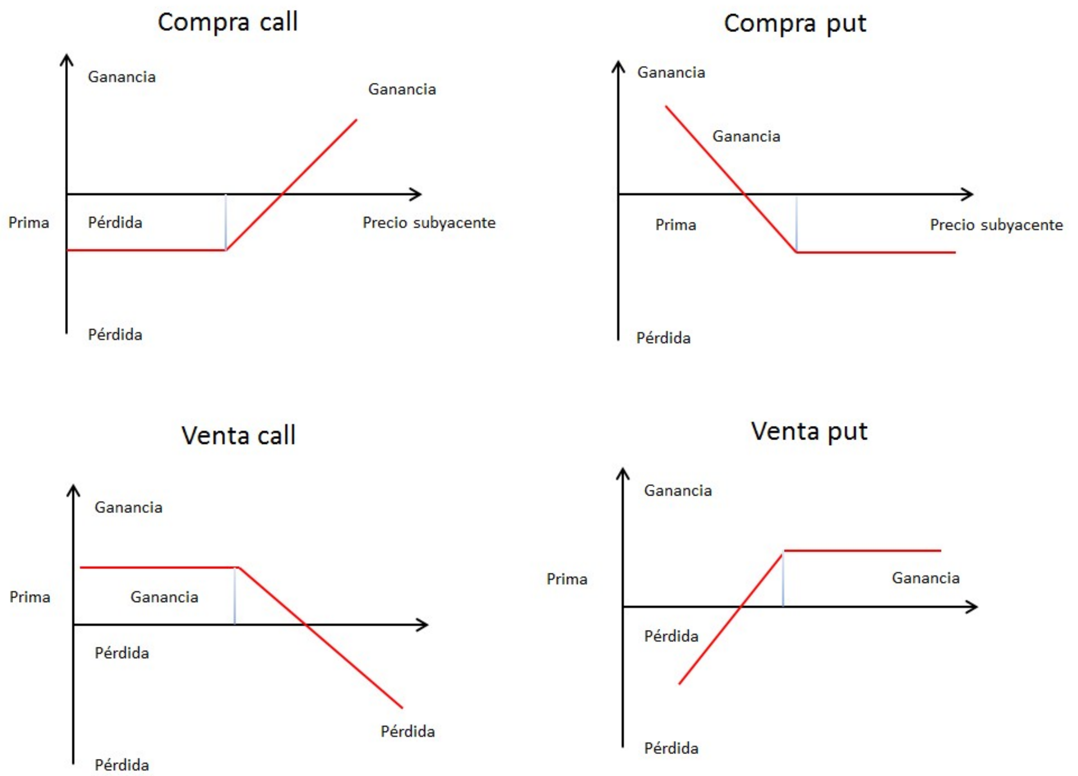
- Americanas: se puede ejercer la opción en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento;
- Europeas: solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento, aunque sí son susceptibles de negociación en el mercado secundario durante toda su vida;

En cuanto a los riesgos que asume cada una de las partes:

- El comprador de una opción asume un riesgo limitado: la prima pagada;
- El vendedor asume un mayor riesgo a cambio de una ganancia que, como máximo, igualará el importe de la prima.

Las posiciones básicas en una opción financiera son:

- Comprar una call: se adopta una posición larga en call. Proporciona el derecho a comprar en una fecha futura el activo subyacente a cambio del pago de una prima. Se empieza a ganar cuando el precio de mercado del activo subyacente supera el precio acordado más la prima.
- Vender una call: se toma posición corta en call. Aporta unos ingresos seguros (prima) y la obligación de vender si el comprador ejerce su derecho.
- Comprar una put: se adopta posición larga en put. Proporciona el derecho a vender en una fecha futura del activo subyacente a cambio del pago de una prima. Se empieza a ganar cuando el precio de mercado es igual al precio acordado menos la prima. Con esto me cubro el riesgo de una bajada de precio.
- Vender una put. Se toma posición corta en put. El vendedor cobra una prima y está obligado a comprar el activo subyacente si así lo quiere el poseedor.



[1]

Una posición compradora o vendedora en opciones podría cerrarse antes de la fecha de vencimiento realizando la opción contraria sobre un activo de las mismas características si estuviese disponible en el mercado. Por ejemplo, una posición larga en call podría neutralizarse con una posición corta en call sobre sobre el mismo subyacente y con las mismas características.

Normalmente se suelen combinar estas cuatro posiciones básicas, buscando situaciones intermedias (Straddles), con la única condición de que se hagan sobre el mismo subyacente.

Factores determinantes del valor de la opción

La prima es el valor de mercado de una opción, su precio. Aunque está determinada por la oferta y la demanda, hay varios factores que ayudan a determinarla. La prima de una opción se descompone en:

- Valor intrínseco (VI): valor que tendría la opción si se ejercitara en un momento concreto. Es la diferencia entre el valor del activo subyacente (P_s) y el precio de ejercicio (P_e) de la opción. Como representa el beneficio que obtendría el poseedor, y este no ejercitará si recibe pérdidas, va a tomar valores siempre positivos:
    - para una call: $VI = P_s - P_e \geq 0$
    - para una put: $VI = P_e - P_s \geq 0$

[1] Fuente: https://inbestia.com/analisis/introduccion-a-las-opciones-financieras

Dependiendo de cuál sea el VI de una opción en un momento dado, nos encontramos con opciones:

- ITM (In the money), con VI > 0; es una opción que proporcionaría beneficios al poseedor si ejerciera inmediatamente.
- ATM (At the money), con VI = 0 → $P_s = P_e$
- OTM (Out of the money): su ejercicio inmediato provocaría pérdidas. Estas opciones no se ejercen.

- Valor temporal (VT): Valor que el mercado otorga a la posibilidad de una fluctuación favorable en el precio del activo subyacente. Es el importe en que la prima excede al valor intrínseco de la opción. Por esta razón, en el mercado hay opciones ATM u OTM en un momento concreto y, sin embargo, su prima es positiva. Esa prima estaría reflejando el valor temporal de la opción, porque su valor intrínseco es nulo. El valor temporal de una opción disminuye con el paso del tiempo, llegando a ser nulo en la fecha de vencimiento (porque cuanto más cerca se esté del vencimiento menos posibilidades habrá de cambio en el precio del subyacente).

El precio de las opciones, al igual que sucede con otros productos, se fija en el mercado a través de la oferta y la demanda. No obstante, tanto compradores como vendedores estiman previamente cuál es el valor al que estarían dispuestos a comprar o vender dichas opciones. Hay un conjunto de variables que influyen claramente en la formación de dicho valor, entre las que se encuentran: el precio y la volatilidad del propio activo subyacente o el tiempo que falta para la fecha de vencimiento de la opción. Así, los **factores determinantes del precio de una opción** son:

- El precio del activo subyacente hoy (Ps): con relación positiva (a mayor precio, mayor prima) en la call y negativa (a mayor precio, menor prima) en la put;
- El precio de ejercicio (Pe): con relación negativa en la call y positiva en la put;
- El tiempo a vencimiento: con relación positiva en ambos casos;
- La volatilidad del subyacente: relación positiva en ambos casos;
- Tipo de interés libre de riesgo (Rf): con relación positiva en la call y negativa en la put;
- Dividendos: Si se reparten, baja la prima de la call y sube la de la put;

Modelo de Black-Scholes

Este modelo considera una acción que no paga dividendos y asume que el rendimiento sobre la acción en un periodo corto se distribuye normalmente. Entonces, el supuesto de este modelo implica que el precio de la acción en cualquier fecha futura tiene una distribución logarítmico-normal.

Este modelo se desarrolla en un contexto de capitalización continua.

La ecuación que representa este modelo de Black & Scholes es la siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Esta fórmula presenta algunas limitaciones en su formulación original, ya que sirve únicamente para opciones europeas, en el supuesto de no reparto de dividendos y en condiciones de no arbitraje.

La solución a la ecuación anterior permite obtener el importe teórico de una call (c) y una put (p):

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Y tales que se verifica la paridad put-call, lo que significa que podemos calcular la prima put en función de la call, y viceversa. La existencia de esta paridad garantiza que no pueda producirse arbitraje.

A partir de la ecuación de Black-Scholes, se obtienen numerosas derivadas respecto a las distintas variables explicativas de la prima, las cuales se denominan "griegas". Estas griegas son la manera que tenemos de medir la sensibilidad de la prima a los diversos factores que hemos visto que la determinan. Esto nos permite descubrir que el precio del subyacente es el factor más influyente.

Cada una de las griegas mide una dimensión distinta del riesgo de una opción, con lo que el objetivo es gestionar estos coeficientes para minimizar los riesgos.

Las más significativas son:

- Delta (Δ): Es la variación del valor de la prima ante variaciones en el precio del subyacente.
- Gamma (Γ): Variación de Delta ante sucesivos cambios en el precio del subyacente.
- Vega o Kappa (K): Variación del valor de la prima ante cambios en la volatilidad.
- Theta (Θ): Variación del valor de la prima por el transcurso del tiempo.
- Rho (ρ): Variación en el valor de la prima por cambios en tipos de interés.

La paridad put-call

La Paridad Call-Put es un concepto básico para poder gestionar una cartera con opciones. La razón por la cual es tan importante es porque las opciones son productos asimétricos, tienen una parte limitada y otra ilimitada. Por tanto, la incorporación a la cartera de una de estas posiciones generará una nueva posición sintética que tenemos que comprender perfectamente.

Esta teoría establece una relación entre el precio de call y put del mismo precio de ejercicio con el precio de su activo subyacente, de forma que determina cómo con dos de estos tres componentes se replica el comportamiento del tercero.

Para la deducción de la fórmula vamos a construir dos carteras financieras, que denotaremos por A y B, bajo las siguientes hipótesis: las opciones call y put serán:

- de tipo europeo;
- sobre los mismos subyacentes (que no pagan dividendos);
- para un mismo vencimiento;
- no hay posibilidad de arbitraje, es decir, la paridad put-call se cumple siempre.

La cartera A ($t = t_0$):

- Posición larga en la Put (es decir, se paga la prima P en el instante t_0 por tener derecho a vender el subyacente en el instante T al precio de ejercicio K)
- Posición corta en la Call (es decir, se recibe del tenedor de la opción de compra la prima C en el instante t_0, a cambio de que el tenedor posea el derecho a comprar el subyacente en el instante T al precio de ejercicio K).

La cartera B ($t = t_0$):

- Posición corta en una acción (es decir, se venderá el subyacente en el instante T) que en el instante t_0 tiene el valor S_{t0}.
- Se invierte la cantidad en efectivo $Ke^{-r(T-t_0})$ que se resulta de actualizar al instante t_0 y al tipo de interés libre de riesgo $r > 0$, el precio de ejercicio de la Call (el cual se recibirá si el tenedor de la Call ejerce su derecho de compra del subyacente por la posición corta en la opción Call).

El valor de ambas carteras al incio ($t=t_0$) es:

$$Valor\ Cartera\ A\ (t = t_0) = P - C$$

$$Valor\ Cartera\ B\ (t = t_0) = Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}$$

Y a vencimiento (t=T):

$$Valor\ Cartera\ A\ (t = T) = K - S_T$$

$$Valor\ Cartera\ B\ (t = T) = K - S_T$$

Como los valores finales de ambas carteras son iguales, asumiendo ausencia de oportunidades de arbitraje, los valores iniciales de ambas carteras deben coincidir, y, por tanto:

$$P - C = Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}$$

3. Instrumentos de cobertura a plazo: Forwards y futuros

Definición

Los futuros son, junto con las opciones financieras, los derivados más conocidos y comúnmente utilizados.

En el Real Decreto 1814/1991, de 20 de diciembre, por el que se regulan los mercados oficiales de futuros y opciones, se estipula que los futuros financieros son los contratos a plazo que:

- tengan por objeto valores, préstamos o depósitos, índices u otros instrumentos de naturaleza financiera;
- tengan normalizados su importe nominal, objeto y fecha de vencimiento; y
- se negocien y transmitan en un mercado organizado cuya Sociedad Rectora los registre, compense y liquide, actuando como compradora ante el miembro vendedor y como vendedora ante el miembro comprador.

Por tanto, se trata de un contrato a plazo, es decir, de un acuerdo que obliga a las partes contratantes a comprar o vender un activo en una fecha futura a un precio fijado previamente en el contrato:

- El comprador de un futuro adquiere la obligación de pagar el precio pactado en la fecha convenida y recibir a cambio el activo objeto del contrato
- El vendedor tiene la obligación de entregar dicho activo en la misma fecha, cobrando el precio pactado.

La principal diferencia con las opciones es que, bajo una opción, solo el vendedor de la opción tiene obligación de satisfacer el contrato, puesto que el comprador tan solo adquiere el derecho; llegada la fecha de vencimiento, el poseedor decide si le conviene ejercitar la opción.

Al hablar de futuros financieros, se hace alusión a aquellos contratos cuyo objeto de transacción es un activo financiero, como por ejemplo acciones de una compañía, un índice bursátil o los tipos de interés. En esta primera parte de la definición, los futuros coinciden con los contratos forward, ya que en ambos casos se trata de operaciones a plazo que implican una obligación para las partes que intervienen comprador y vendedor.

En la segunda parte de la definición expuesta se encuentran los principales rasgos que diferencian un contrato de futuros de un forward. Los futuros son productos estandarizados, esta normalizados su objeto, importe nominal y fecha de vencimiento y se negocian en mercados organizados, con la participación de una Cámara de Compensación. Por su parte, los forwards son productos no estandarizados, es decir, pueden realizarse sobre cualquier activo en la cantidad deseada y con una fecha de vencimiento elegida por el comprador y el vendedor. Estos últimos se negocian en mercados OTC, puesto que son contratos privados entre las partes intervinientes.

La estandarización de los productos tiene aspectos positivos y negativos. Es cierto que implica una pérdida de flexibilidad, puesto que existen futuros solo sobre un número limitado de activos y para unas fechas de vencimiento concretas. Sin embargo, los futuros financieros permiten eliminar o minimizar el riesgo de impago inherente a los contratos forward, debido básicamente a dos razones que se desprenden de la existencia de la Cámara de compensación:

- Tanto los compradores como los vendedores de futuros deben depositar una cantidad de fondos para participar en el mercado en concepto de margen de garantía. Este depósito se realiza en la cuenta que cada participante tenga abierta en la institución financiera con la que opera. En cada mercado se fijan los niveles mínimos que comprador y vendedor deben mantener en el saldo de su cuenta. Estos depósitos sirven como garantía para evitar los posibles impagos.
- Los miembros del mercado liquidan diariamente las posiciones de sus clientes (compradores o vendedores) añadiendo las ganancias del día o reclamando el pago de las pérdidas de la jornada en función de cuál se sea la cotización de cierre del contrato de futuro. De esta forma, el riesgo de los futuros se reduce a las fluctuaciones de precio de un día, puesto que después de cada sesión se registran y liquidan las pérdidas o ganancias diarias.

Además, la existencia de un mercado organizado. Hace que no sea necesario mantener el contrato de futuros hasta la fecha de vencimiento, aunque haya compradores y vendedores de futuros cuyo objetivo sí que es la entrega del activo subyacente en la factura fijada. Con la negociación diaria de los mercados organizados, es posible cerrar una posición antes de la fecha de vencimiento, simplemente adoptando la posición contraria a la inicial en un contrato sobre el mismo subyacente y al mismo vencimiento.

Por supuesto, esta operativa no es factible con los contratos forward, ya que no existe un mercado secundario para este tipo de productos, por lo que es muy difícil deshacer una operación forward antes de la fecha de vencimiento. Por otra parte, al ser una contratación directa entre comprador y vendedor, es mayor el riesgo asumido por las partes contratantes, tanto por el posible incumplimiento del contrato, como porque la totalidad de las ganancias o pérdidas se realizan al vencimiento del contrato sin liquidaciones intermedias.

Posiciones básicas en futuros

Tanto los contratos de futuros como los forwards implican una serie de obligaciones entre las partes que intervienen, es decir, para el comprador y el vendedor. Obviamente, ambas partes esperan obtener un beneficio a cambio de las obligaciones asumidas. En general:

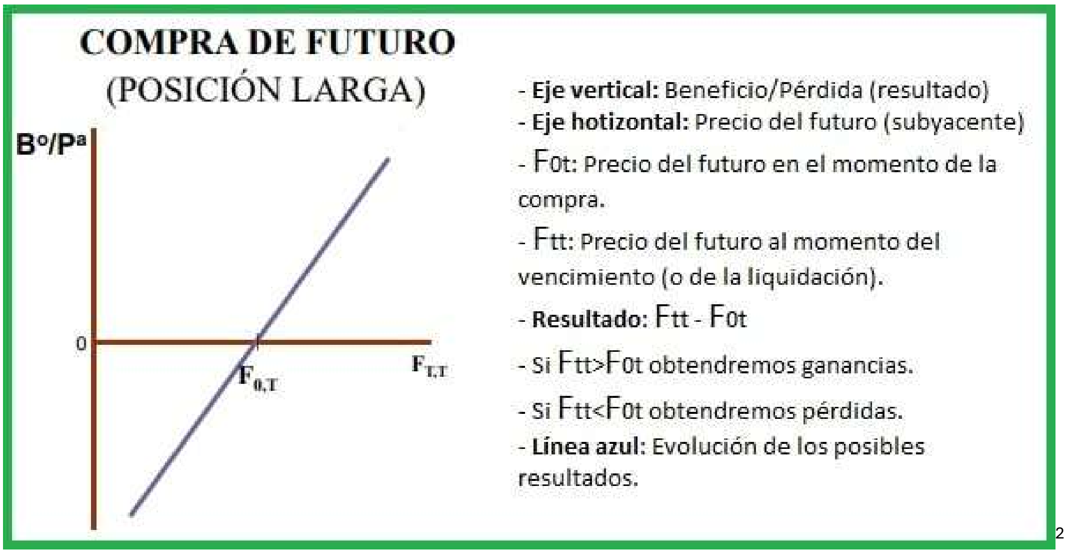
- Cuando un inversor compra futuros sobre un activo, espera que el precio del subyacente registre una subida para la fecha de vencimiento del contrato. Por eso le conviene asegurarse un precio futuro de compra que sea inferior a la cotización estimada del activo en el vencimiento.

- Al mismo tiempo, el vendedor de futuros estima que el precio del activo subyacente bajará hasta la fecha de vencimiento. Por esta razón, prefiere asegurar un precio de venta futuro que sea superior a la cotización esperada para el momento de vencimiento.

Siguiendo con este razonamiento, es cierto que cuando la tendencia de los precios de mercado es beneficiosa para el comprador de futuros, está perjudicando al vendedor de los mismos y viceversa. En este sentido, se afirma con frecuencia que los futuros, como otros productos derivados, son un juego de suma cero para expresar que cuando hay un contrato ganador siempre hay otro perdedor. Un juego de suma cero implica que la suma algebraica de las ganancias y pérdidas generadas es igual a cero, y al aplicarlo a los futuros financieros se traduce en que lo que gana o pierde el comprador de un futuro lo pierde o gana el vendedor. Esta expresión, sin ningún tipo de matizaciones, puede llevar a confusión: no siempre que un inversor de futuros obtiene ganancias, su contrapartida debe perder dinero. Todo dependerá de las inversiones completas realizadas por cada uno de ellos. Esto es así porque las razones que las dos partes tienen para invertir en futuros suelen ser muy distintas y además, no todo el mundo invierte exclusivamente en productos derivados.

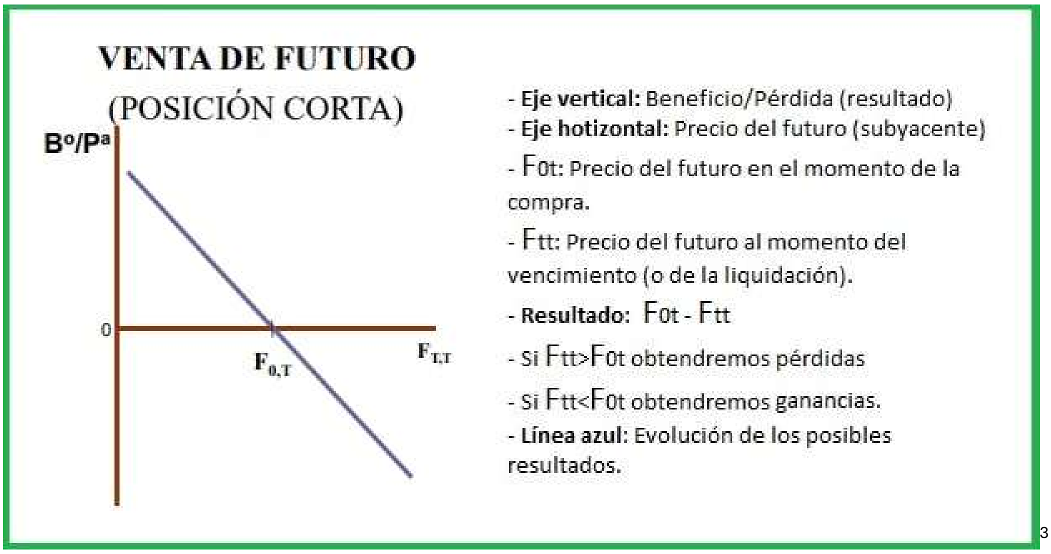
Del inversor que compra futuros, se dice que tiene una posición larga en futuros, mientras que el vendedor de futuros posee una posición corta en futuros. Estas son las dos posiciones básicas simples que encontramos en los contratos de futuros.

Las pérdidas máximas para el comprador de futuros se producirían si el precio del subyacente fuese igual a cero en el vencimiento del contrato, situación tremendamente improbable; estos resultados negativos se van reduciendo conforme aumenta el precio del activo subyacente y los beneficios aparecen, lógicamente, cuando el precio del subyacente es superior al precio pactado del futuro. A partir del precio de ejercicio, cuanto mayor sea el precio de mercado del activo subyacente en la fecha de vencimiento del contrato, mayores serán los beneficios para el inversor con una posición larga en futuros. Por tanto, para el comprador de futuros las pérdidas son limitadas, pero no lo son las ganancias.



[2]

En una posición vendedora de futuros, los beneficios máximos se conseguirán si el precio del subyacente es igual a cero en el momento del contrato. Las ganancias para el vendedor se van reduciendo conforme aumenta el precio del activo subyacente, llegando a ser nulas cuando el precio del subyacente coincide con el precio del futuro. A partir de ese punto, cuanto mayor sea el precio de mercado del activo subyacente en la fecha de vencimiento del contrato, mayores serán las pérdidas para el inversor con una posición corta en futuros, de tal forma que para el vendedor de futuros las ganancias que puede obtener son limitadas, mientras que no lo son sus pérdidas.



[3]

[2] Fuente: Accionesyvalores.es/futuros-en-bolsa
[3] Fuente: Accionesyvalores.es/futuros-en-bolsa

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 15. Teoría de la inversión en ambiente cierto. Clases de inversiones. Valor capital de un proyecto de inversión. Tanto interno. Tiempo de recuperación. Elección de un proyecto de inversión según diferentes hipótesis. Teorías de la inversión en ambiente aleatorio y en ambiente incierto. Criterios de selección de un proyecto de inversión.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Definiremos inversión como toda adquisición que da origen a dos conjuntos de capitales financieros de signos opuestos, el primero de outputs (salidas, costes, desembolsos) y el segundo de inputes (ingresos o entradas), con la condición de que el vencimiento del primero sea anterior al del segundo.

Vamos, pues, a estudiar las inversiones bajo la lógica de la elección finacniera (y el principio de subestimación de capitales futuros).

principio de subestimación de capitales futuros).

2. Clases de inversiones

Las inversiones se pueden clasificar:

- Atendiendo al sujeto:
    - Inversión por individuos o economías domésticas;
    - Empresas;
    - Estado o corporaciones públicas.
- Atendiendo al objeto:
    - Reales o productivos, en que se incorpora la inversión al proceso productivo para crear riqueza (aumentar el valor añadido de la economía);
    - Financieras, en que no se crea riqueza a nivel macroeconómico, sino que únicamente cambia la titularidad de un bien.
- Atendiendo a la duración:
    - Inversiones a corto plazo;
    - Inversiones a medio plazo;
    - Inversiones a largo plazo.
- Atendiendo a los objetivos:
    - Renovación: Sustitución de equipos por uso, desgaste u obsolescencia;
    - Expansión: Aumentar la capacidad de producción o las ventas;
    - Modernización o innovación: Buscan disminuir los costes, multiplicar el proceso, mejorar el producto…;
    - Estratégicas, entre las que distinguimos ofensivas (para penetrar en un mercado), defensivas (para mantener una posición en el mercado) o mixtas.
- Atendiendo a la corriente de flujos de caja que generan:
    - Una única inversión (salida) y una única desinversión (entrada), como las Letras del Tesoro;

    - Una inversión inicial y varias desinversiones, como las obligaciones con cupón periódico;
    - Varias inversiones y varias desinversiones, como cuando ampliamos una línea productiva y vamos desembolsando capital hasta que se empiezan a generar flujos de caja;
    - Varias inversiones y una desinversión, como en los planes de pensiones.
- Atendiendo a la relación que guarden las inversiones entre sí:
    - Independientes: No guardan relación unas con otras, realizándose una inversión en función de los criterios de selección de inversiones que veremos a lo largo de este tema, como la TIR o el VAN;
    - Dependientes, entre las que distinguimos:
        - Complementarias: la realización de una sugiere la realización de la otra. Por ejemplo, si vamos a sustituir ordenadores, quizá tengamos que invertir también en una actualización de software;
        - Sustitutivas o mutuamente excluyentes. Por ejemplo, si tengo que comprar un camión, llevaré a cabo una comparación entre marcas hasta comprar únicamente uno.
- Atendiendo al signo de los flujos generados:
    - Simples: cuando todos los flujos de caja generados tienen signo positivo;
    - No simples: cuando la inversión genera flujos de caja positivos y negativos.
- Atendiendo al signo del saldo de la inversión en distintos momentos del tiempo:
    - Puras: cuando el saldo financiero a un i* dado es siempre negativo, siendo I_0 negativo. Las inversiones simples siempre son puras.
    - Mixtas: cuando alguno de los saldos financieros a un i* dado es positivo. Esto quiere decir que el inversor está siendo prestatario en algún momento de la duración de la inversión, y no inversor.
- Atendiendo al grado de conocimiento de los capitales:
    - Ambiente cierto: los resultados se conocen con certeza;
    - Ambiente de riesgo o aleatorio: no se conocen resultados pero sí se pueden asignar probabilidades a los mismos;
    - Incertidumbre: No conocemos las probabilidades a asignar a los posibles resultados.

Las decisiones de inversión en ambiente de certeza son, como se ha indicado, aquellas en las que se conocen con certeza las magnitudes que la definen.

Los criterios de decisión deben ajustarse a los objetivos de la empresa o del inversor individual en su caso, por lo que se medirá el beneficio o la rentabilidad que genera la inversión, procurando mantener un nivel de liquidez razonable y evitando el que perfil de riesgo de la empresa se altere de forma significativa. Estos criterios de elección de inversiones pueden ser:

- Estáticos: No tienen en cuenta el paso del tiempo (y, por tanto, no tienen en cuenta el valor del dinero en el tiempo, es decir, el riesgo financiero). Un ejemplo sería el payback.
- Dinámicos: Sí tienen en cuenta el paso del tiempo, como la TIR o el payback descontado.

3. Valor capital de un proyecto de inversión

El valor capital de un proyecto de inversión es normalmente conocido como Valor Actual Neto (VAN) o Beneficio Total Actualizado (BTA).

Se define el VAN como sigue:

$$VAN = -I_0 + \sum_{k=1}^{n} FC_k (1+i)^{-k} + S_n (1+i)^{-n}$$

Siendo:

- I_0 la inversión inicial
- FC_k el flujo de caja neto o rendimiento de cada período k
- S_n el valor residual del proyecto de inversión

Obsérvese que la ley financiera utilizada es la de capitalización compuesta o descuento compuesto, y que hemos asumido tipos de interés constantes.

En el caso particular de que los flujos de caja netos sean constantes y el valor residual del proyecto de inversión sea cero, nos encontraríamos con:

$$VAN = -I_0 + FC a_{\overline{n}|i}$$

En cualquier caso, si el VAN toma un valor superior a cero, hablamos de un proyecto de inversión que crea valor, y si toma un valor por debajo de cero, hablamos de un proyecto de inversión que destruye valor.

Así, si estamos ante un solo proyecto de inversión, la decisión a tomar consiste en que, fijado el tanto i, invertiremos si el VAN a ese tanto es positivo, y rechazaremos la inversión si es negativo.

Si estamos ante un conjunto de proyectos de inversión, este criterio nos servirá para ordenarlos, prefiriendo aquel proyecto con mayor VAN. Por supuesto, esto solo es válido para proyectos homogéneos, esto es, que exijan la misma inversión inicial y tengan una misma duración.

Si la inversión inicial fuera diferente en los distintos proyectos considerados, la elección deberá basarse en la relación coste-beneficio, que es una forma o medida relativizada del VAN:

$$RCB = \frac{VAN}{I_0}$$

Para un proyecto aislado, buscaremos una RCB superior a cero. En caso de querer comparar distintos proyectos de inversión, elegiremos el que mayor RCB arroje.

Ventajas del VAN

- Se consideran todos los flujos de caja
- Es dinámico, puesto que descuenta los flujos de caja
- El resultado se puede interpretar como la creación o destrucción de valor del proyecto de inversión

Desventajas del VAN

- Es difícil determinar una tasa de descuento realista y ajustada al riesgo del proyecto
- Se asume que se reinvierten los flujos de caja a la misma tasa hasta el fin del proyecto – es la única forma para poder obtener realmente un valor igual al VAN
- Puede que dos proyectos arrojen un mismo VAN pero sus rentabilidades sean distintas. Es aquí donde entra en juego la TIR.

4. Tasa interna de rendimiento o retorno (TIR)

La TIR es aquel tanto r que anula el VAN:

$$0 = -I_0 + \sum_{k=1}^{n} FC_k(1+r)^{-k} + S_n(1+r)^{-n}$$

Cuando estamos ante una inversión simple, tendremos una única solución real y positiva para r, pero si estamos ante una inversión no siempre, podemos tener una, varias o ninguna solución real para la TIR.

Cuando analicemos la conveniencia, o no, de invertir en un proyecto de inversión, compararemos la TIR r del proyecto de inversión con el tanto de rentabilidad mínimo que se exige a la inversión (la tasa de descuento i). Si la TIR<i, entonces rechazaremos este proyecto para invertir en el mercado; si TIR>i, conviene aceptar el proyecto de inversión.

SI estamos tratando de decidir entre distintos proyectos de inversión, la preferencia vendrá dada por la TIR: a mayor TIR, mejor. Sin embargo, cuando hay varias soluciones reales y positivas para la TIR (caso de las inversiones mixtas), el criterio resulta inconsistente para decidir.

Ventajas TIR

- Es un método dinámico
- Es fácilmente calculable gracias a los métodos de computación modernos

Desventajas TIR

- Las mismas que en el VAN, acentuadas porque ahora hay que reinvertir a la TIR, que es superior a la tasa de descuento.
- Nos podemos encontrar con más de una solución

5. Tiempo de recuperación (Payback)

Este método mide el plazo que ha de transcurrir hasta que los rendimientos netos igualen al desembolso o coste inicial de la inversión:

$$I_0 = \sum_{k=1}^{s} R_k$$

De donde despejaríamos s y donde R incluye todo el rendimiento obtenido en cada momento k.

Este criterio presta más atención a la liquidez que a la rentabilidad del proyecto. Si analizamos dos inversiones con un mismo período de recuperación, habrá que considerar el capital vinculado asociado a cada una de ellas para determinar cuál es el preferible. EL capital vinculado es la cantidad de dinero que aún queda por recuperar año tras año. Será, por tanto, preferible aquella inversión que tiene un capital vinculado menor porque implica que se está recuperando más rápidamente la inversión inicial.

Ventajas

- Fácil de calcular y comprender
- Uso práctico en inversiones de desembolso inicial alto, cuando existen riesgos notables de tipo político o económico o cuando el progreso técnico es rápido o imperfecta la previsión del futuro.

Inconvenientes

- Se basa en la liquidez y no en la rentabilidad
- No tienen en cuenta los rendimientos futuros, ya que no considera los flujos de caja que vienen después de haber recuperado la inversión inicial
- Da el mismo tratamiento a todos los capitales del proyecto, sin distinguir entre cercados y alejados (consecuencia de ser un método estático).

Este último inconveniente se corrige con el Payback descontado, que sí tienen en cuenta el paso del tiempo:

$$I_0 = + \sum_{k=1}^{s\prime} R_k (1 + r)^{-k}$$

De donde despejaríamos s’.

Nótese que s’>s siempre.

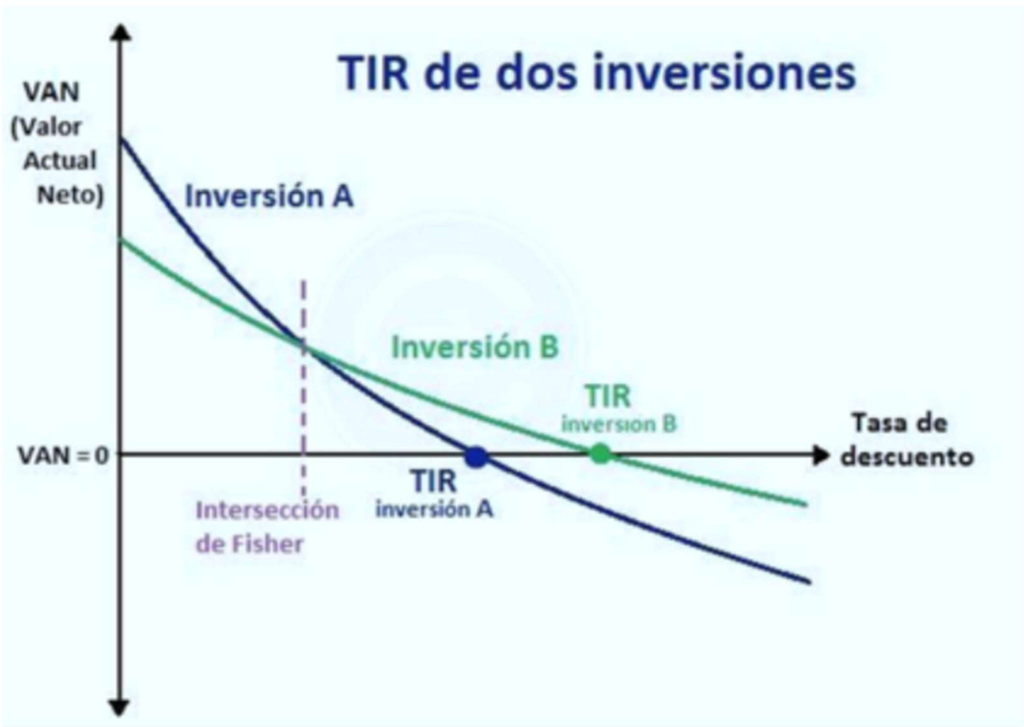
6. Elección de un proyecto de inversión según diferentes hipótesis

El VAN y la TIR generalmente nos ofrecen una misma ordenación y, por tanto, criterio de selección, salvo si tenemos:

- Inversiones de distinta duración;
- Inversiones que exigen diferentes desembolsos iniciales;
- Inversiones con flujos de caja positivos y negativos (no simples).

En estos casos, VAN y TIR pueden dar resultados diferentes.

El orden en que tienen lugar los flujos de caja, junto con la tasa de descuento, nos puede llevar a una situación en que hasta determinada tasa de descuento, K_F, sea preferible un proyecto de inversión, y a partir de K_F sea preferible el otro, a pesar de arrojar ambos proyectos un mismo VAN para esa tasa K_F. A esta tasa K_F se le llama intersección de Fisher, y se representa de siguiente modo:



[1]

7. Teorías de inversión en ambiente aleatorio y en ambiente incierto

En ambiente de incertidumbre, necesitamos analizar las consecuencias de una mala previsión. Para ello, existen diversos tipos de análisis:

[1] Fuente: https://blog.buda.com/tasa-interna-de-retorno/

- Sensibilidad, en que se analiza cómo influye cada variable del proyecto en la decisión a adoptar;
- De escenarios, en que se contempla el proyecto bajo escenarios alternativos;
- Árboles de decisión (menos utilizados en la práctica porque se vuelven muy complejos conforme aumenta la duración del proyecto).

En cuanto al ambiente aleatorio, como siempre, vamos a trabajar con esperanzas y varianzas para tratar de medir los rendimientos y riesgo que podemos esperar de cada proyecto de inversión.

Así, consideraremos que:

- Nuestra inversión inicial, I_0, es un desembolso cierto;
- Nuestros R_k o rendimientos netos son capitales aleatorios cuya cuantía dependerá de diversos factores internos y externos a la empresa;
- La duración del proyecto es otra variable aleatoria, pero a efectos prácticos se considera inicialmente conocida.

El rendimiento neto esperado para cada período k:

$$E(R_k) = \overline{R_k} = \sum_{j=1}^{m} R_{k,j} p(R_j)$$

La varianza de cada rendimiento en k:

$$V(R_k) = \sigma_k^2 = \sum_{j=1}^{m} (R_{k,j} - \overline{R_k})^2 p(R_j)$$

Y el coeficiente de variación, que nos permitirá medir el riesgo por unidad de rendimiento, y que resulta esencial para comparar proyectos de distinto tamaño:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{R}}$$

En caso de que la función de probabilidad que caracteriza a esta distribución de posibles resultados fuera continua, podríamos usar la Normal, la Uniforme y la Triangular:

- Uniforme: cuando se tiene escaso conocimiento del futuro, pero podemos estimar los valores extremos de R_k, siendo el más pequeño o pesimista R_k^P y el más alto u optimista R_k^O, teniendo:

$$E(R_k) = \frac{R_k^P + R_k^O}{2}$$

$$\sigma_k^2 = \frac{\left(R_k^P - R_k^O\right)^2}{12}$$

- Triangular: Se usa cuando, además, se puede estimar la moda o valor más probable R_k^{Mo}:

$$E(R_k) = \frac{R_k^P + R_k^{Mo} + R_k^O}{3}$$

$$\sigma_k^2 = \frac{\left(R_k^P - R_k^O\right)^2 - \left(R_k^O - R_k^{Mo}\right)\left(R_k^{Mo} - R_k^P\right)}{18}$$

- La Normal se utilizará cuando se tengan suficientes posibles rendimientos R_k como para poder aplicar el Teorema Central del Límite.

Función de distribución del VAN

Decíamos que el VAN es la suma financiera en 0 de todos los flujos de caja intervinientes en el proyecto de inversión, valorados en cero.

Si asumimos que cada rendimiento en k, que es una variable aleatoria, sigue una $N(\mu,\sigma)$, y que estos rendimientos son independientes, y contamos con un número de sumandos grande (de más de 10, según Andrés de Pablo), podemos asumir que el VAN seguirá una $N(\mu,\sigma)$.

Si estas hipótesis no se cumplieran, habría que asumir que el VAN puede seguir cualquier distribución, por lo que se deberán hacer ajustes, pruebas de adherencia o, en el peor de los casos, usar la desigualdad de Chebyshev para efectuar previsiones.

Función de distribución de la TIR

Para conocer la distribución de la TIR, se deben conocer las distribuciones del VAN para distintos valores de i. Para cada valor de i se obtiene una probabilidad de pérdidas que se calcula como:

$$p(VAN < 0 | i = i_0)$$

Al agrupar los resultados para cada i_0 se obtiene la función de distribución de la TIR.

Este procedimiento es laborioso, por lo que suele hacerse el siguiente cálculo, del que despejamos el tanto de rendimiento esperado:

$$0 = -I_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{R_k}(1 + \bar{r})^{-k}$$

Beneficio Monetario Esperado (BME)

Se define como:

$$BME = E(VAN) = -I_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{R_k}(1 + i)^{-k}$$

Varianza del VAN

$$V(VAN) = \sigma_{VAN}^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{k,j}(1+i)^{-(r+s)}$$

Siendo $\sigma_{k,j}$ la covarianza entre Rk y Rj.

Si los rendimientos netos fueran independientes, las covarianzas serían iguales a cero y, por tanto:

$$V(VAN) = \sigma_{VAN}^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2(1+i)^{-(r+s)}$$

8. Criterios básicos

BME

- Se elegirá el proyecto cuyo BME sea mayor (si solo analizamos un proyecto aislado, buscaremos BME > 0);
- Desventaja: No incorpora el riesgo de cada proyecto.

Criterio equivalente de certidumbre o de certeza (EC)

Consiste en modificar los rendimientos netos esperados multiplicándolos por unos coeficientes α_k menores que la unidad, de modo que, a mayor riesgo de proyecto, menores serán los coeficientes, y por tanto mayor la posibilidad de que el proyecto sea rechazado:

$$VC(EC) = -I_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{R}_k(1+i)^{-s}$$

Siendo $\alpha_k \bar{R}_k$ el equivalente cierto en cada k.

Criterio de la prima de riesgo

Consiste en modificar el tanto de valoración para inversiones sin riesgo, incrementándolo mediante una prima de riesgo variable que será tanto mayor cuando más arriesgado se considere el proyecto:

$$VC(PR) = -I_0 + \sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k(1+i')^{-s}$$

Siendo i' = i+ prima de riesgo.

El problema principal de este método es la gran dosis de subjetividad que lo impregna.

Una relación entre estos dos últimos métodos comentados es la siguiente:

$$\alpha_k = \left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^k$$

Como i<i', cuanto mayor sea k, menor será α_k. Así, los rendimientos netos se considerarán más arriesgados cuanto más alejados se encuentren en el tiempo.

Criterio esperanza – desviación típica

Se obtiene, para cada proyecto:

$$E = BME - \lambda\sigma_{VAN}$$

Siendo $\lambda>0$, ya que recoge el grado de aversión al riesgo (asignado por el decisor).

El criterio consiste en aceptar el proyecto si E>0; si se trata de varios proyectos de inversión, los ordenaremos de mayor a menor E.

Este es el más completo de los criterios, porque da entrada al riesgo de forma directa con la introducción de la desviación típica en el cálculo.

Críticas

- λ es un parámetro subjetivo.
- Si la función de distribución del VAN no es simétrica, la varianza no es una buena medida del riesgo, siendo mejor en ese caso el uso de la semivarianza.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 16. La financiación de la Empresa y el mercado de capitales. Análisis de los valores de renta variable. Métodos de valoración. Valor de los derechos de opción.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. La financiación de la Empresa y el mercado de capitales

Se denomina financiación por mercado de capitales toda aquella que tiene como objeto instrumento del crédito un título valor cotizado en mercado, en contraposición a un crédito instrumentado en un préstamo no cotizado. Por tanto, el mercado de capitales es el lugar al que acuden las compañías para financiarse vía deuda o equity mediante instrumentos de inversión como bonos, pagarés, letras… en el cual los inversores adquieren estos instrumentos para conseguir una rentabilidad.

El mercado de capitales se compone de muchas clases diferentes de activos, ya que engloba tanto a la renta fija, como a la renta variable y a los derivados. Por eso, tenemos que saber qué se entiende por cada uno de estos mercados para comprender mejor de qué está conformado el mercado de capitales.

- Mercado de renta fija: aquí se negocian bonos, Letras del Tesoro y otro tipo de productos propios del mercado de crédito. Se entiende mejor si pensamos en él como un mercado de deuda, ya que lo que hacemos cuando compramos un bono es financiar al emisor de ese bono, que puede ser una empresa o un Estado. Se caracteriza, también, por fijar un tipo de interés a pagar. Así, el inversor sabe la rentabilidad estimada que puede obtener con la inversión. Es uno de los mercados con menos riesgo, pero dependerá mucho del emisor, ya que hay empresas que tienen un alto riesgo y pagarán más intereses a sus acreedores y otras empresas con menos riesgo. Por otro lado, también están los Estados que se financian en este mercado y que suelen tener menos riesgo que los agentes privados.
- Mercado de renta variable: este es el mercado de las acciones, en el que hay un mayor acceso para los inversores minoristas. Aquí se acude para comprar títulos de una compañía con la intención de mantenerlos pensando que, en el largo plazo, esas acciones registrarán una revalorización debido a que el modelo de negocio de la empresa es rentable y confiamos en él. Así, por un lado, están las empresas que emiten sus acciones para conseguir financiación de esta manera, ya que se desprenden de un porcentaje de propiedad de la compañía, y los inversores que compran estas acciones confiando en los fundamentales del negocio y en su posterior revalorización.
- Mercado de derivados: este mercado también es amplio y se caracteriza por invertir en un activo subyacente. Por ejemplo, cuando invertimos en el mercado de futuros del oro o del petróleo, estamos invirtiendo en el mercado de derivados financieros. Aquí, las posibilidades son muchas, se puede invertir en materias primas, en mercados interbancarios como el Euribor, también se puede invertir de forma indirecta en la renta fija y en la renta variable utilizando otro tipo de instrumentos financieros. Pero, generalmente, suelen ser mercados de futuros y se usan como cobertura, como especulación o como arbitraje.

El sistema bancario y los mercados de capitales conforman dos componentes fundamentales del sistema financiero, con evidentes complementariedades entre unos y otros. En el primer caso, la función de intermediación financiera realizada por los bancos permite agrupar ahorros (depósitos) de pequeño importe, y a plazos reducidos, en préstamos de importe más elevado y a plazos más dilatados, es decir, canaliza el ahorro de pequeños inversores a satisfacer necesidades grandes de financiación. Como resultado de esa función, los bancos están mejor posicionados que los mercados de capitales para solucionar los problemas de agencia entre deudores y acreedores, y desarrollar relaciones de confianza en las que descansa dicha financiación bancaria.

Frente a esas ventajas, la financiación bancaria es menos apropiada cuando las empresas demandantes no cuentan con activos en garantía, ni una historia crediticia detrás, ni una corriente estable y predecible de flujos financieros. Ese es el caso de empresas de nueva creación y/o con elevado componente innovador y potencial de crecimiento, y en ellas es evidente que una financiación basada en los diversos instrumentos de los mercados de capitales es mucho más efectiva que la de origen bancario.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que bancos y mercados proveen diferentes servicios financieros, y una mezcla de ambos es necesaria para el crecimiento económico: las proporciones de uno y otro pueden variar en función del grado de desarrollo económico, pero también de aspectos como el marco legal. Conforme las economías avanzan en su grado de desarrollo, se incrementa el uso de los servicios que proveen los mercados de valores, en detrimento de los aportados por el sistema bancario.

Tradicionalmente se ha asumido que tanto en España como en Europa la financiación empresarial presentaba un excesivo sesgo bancario, en detrimento de los mercados de capitales y contrariamente al modelo estadounidense, en el que primaba la apelación a los mercados. Con el objetivo de corregir dicho sesgo, la Comisión Europea puso en marcha en 2015 su proyecto de ***Capital Markets Union*** (**CMU**), tras el que un elevado número de empresas españolas y europeas se estrenaron como emisores.

Los principales instrumentos de financiación empresarial en el mercado de capitales son:

- Bonos corporativos y bonos de proyecto;
- Titulizaciones y cédulas;
- Deuda privada, cuando un agente del mercado de capitales, como un fondo de inversión o una aseguradora, otorga un préstamo en formato no título valor a una empresa; también se llama direct lending;
- Capital riesgo.
- Bolsa: bien a través de una salida a Bolsa mediante acciones nuevas o mediante una ampliación de capital por parte de una compañía ya cotizada.

2. Análisis de los valores de renta variable

La renta variable es un tipo de inversión en la que la recuperación del capital invertido y la rentabilidad de la inversión no están garantizadas, ni son conocidas de antemano. Además puede ocurrir que la rentabilidad sea negativa, pudiendo llegar incluso a perder el dinero invertido. Esto se debe a que la rentabilidad de la renta variable depende de distintos factores como pueden ser la evolución de la empresa en la que se invierte, su situación económica, el comportamiento de los mercados financieros, etc. Las bolsas y mercados financieros son sensibles ante cualquier cambio que se interprete de manera positiva o negativa por parte de los inversores y por ello se consideran un termómetro para la economía.

¿Cómo puede saber, entonces, un inversor si la oportunidad de inversión que se le presenta, adquiriendo activos de renta variable en el mercado de capitales se ajusta a sus objetivos de inversión? Analizando la rentabilidad que esta inversión le puede reportar.

La rentabilidad de un accionista vendrá dada a través de dos vías: dividendos y plusvalías (diferencia entre el precio de compra y el precio futuro de venta de la acción, que también dependerá de los dividendos que vaya a percibir su tenedor desde ese momento). El valor de una acción, por tanto, va a ser el mismo sea cual sea el horizonte temporal del inversor: es el valor actual de la corriente de dividendos futuros.

Previamente a la definición de los diferentes conceptos de valor de los activos de renta variable, conviene hacer una consideración sobre la diferencia entre valor y precio: el precio es el resultado cuantitativo de una transacción entre dos partes, en unas circunstancias determinadas. Así, el precio es cambiante continuamente. En un mercado organizado como la Bolsa, el precio cambia múltiples veces al día, mientras que la lógica nos lleva a entender que el valor de un activo no puede cambiar tanto ni tan rápidamente. Mientras que el precio es, por tanto, muy concreto, el concepto de valor arrastra una importante subjetividad en función de quién sea quien lo calcule y de sus circunstancias. Un actor comprará un activo cuando estime que el precio al que lo compra es inferior al valor que le aporta, y venderá el activo si cree que el precio que le ofrecen es superior a su valor.

¿Cuáles son los distintos factores que aportan subjetividad al cálculo de valor de un activo?

- Percepción del riesgo
- Rentabilidades objetivo
- Sinergias con posibles integraciones de negocio
- Estrategias de crecimiento
- Situación de liquidez
- Situación personal
- Percepciones del futuro

Valor contable

Es que el resulta de cálculo del Patrimonio Neto de una compañía, de acuerdo con su balance. Este valor refleja un valor histórico y estático en el tiempo, por lo que no suele reflejar el valor de mercado de esta. Una aproximación mejor, y con el fin de eliminar la característica de precios históricos que reflejan los balances de la compañía, sería sustituir para cada partida del balance los valores contables por valores de liquidación de dichos activos en el mercado. De esta manera obtendríamos un valor liquidativo de la compañía.

Valor de mercado

Aquel precio que razonablemente se puede obtener en una transacción, en un mercado de acceso libre, con absoluta libertad para decidir comprar o vender, y con un conocimiento común para todos los operadores sobre la empresa objeto de transacción. En el caso de las empresas cotizadas, la mejor aproximación a este valor es el precio de cotización en Bolsa.

Valor intrínseco

El valor intrínseco de una acción sería el verdadero valor que la misma tiene para un inversor. Al igual que en el cálculo de valor de las acciones en compañías no cotizadas, el método de cálculo más utilizado es el de descuento de flujos de caja. No existe, por tanto, un único valor intrínseco, ya que el cálculo del mismo está sujeto a la asignación de valores previos a determinadas variables que influyen en la determinación de los flujos de caja futuros.

Los analistas bursátiles intentan realizar aproximaciones al valor intrínseco de las acciones cotizadas mediante la utilización de diversos sistemas, siendo el más relevante el de descuentos de flujos de caja y utilizando variables que suponen comunes a la mayoría de los inversores. Así, utilizan datos públicos sobre crecimientos de la actividad sectorial, sobre la rentabilidad de la inversión sin riesgo, el coste de los factores, etc.

De este modo determinan si el precio de la acción está por encima o por debajo de su valor intrínseco, produciendo recomendaciones de venta o compra en cada caso. Por tanto, a los efectos no es tan importante el cálculo del dato concreto sino la distancia relativa de este sobre el precio de la acción.

3. Valoración de acciones ordinarias. Métodos de valoración

Modelo de descuento de dividendos

El rendimiento financiero que nos ofrece la inversión en activos de renta variable se compone de dos partidas:

- Dividendos cobrados a lo largo de la vida de la inversión
- Plusvalía como diferencia entre el precio de adquisición de la acción y el de venta en un futuro

Simplificando al caso de una inversión realizada para el período de un año:

$$k = \frac{D_1 + P_1 - P_0}{P_0}$$

Donde:

- k: rentabilidad obtenida
- D_1: dividendo cobrado en el año 1
- P_1: precio de venta al cabo de un año
- P_0: precio pagado por la acción

De donde:

$$P_0 = \frac{(D_1 + P_1)}{(1 + k)}$$

Un mercado perfecto igualará las rentabilidades exigidas para los inversores y ajustará a estas el valor de cotización actual en función de las expectativas futuras; k se convertirá, por tanto, en la tasa de retorno exigida por los inversores.

A su vez, k estará en función de la rentabilidad del activo sin riesgo más la prima de riesgo que exija el inversor.

A su vez el precio de venta de la acción en el momento 1 estará en función de los rendimientos por dividendos y precios que se esperen obtener en sucesivos años, de donde:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1 + k)^t} + \frac{P_n}{(1 + k)^n}$$

Y si consideramos la inversión como permanente en el tiempo:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + k)^t}$$

La dificultad para estimar el valor de una acción estaría en la determinación de los dividendos futuros que va a pagar la empresa objeto de inversión.

Modelo de Gordon-Saphiro

Partiendo de la fórmula de cálculo de valor de la acción basada exclusivamente en el valor actual de los dividendos futuros, se puede intentar obviar el problema de determinación de los dividendos futuros si estamos una constante de crecimiento para los mismos, que designaremos “g”.

Por tanto:

$$D_2 = D_1(1 + g)$$

$$D_3 = D_2(1 + g) = D_1(1 + g)^2$$

Y así sucesivamente.

Volviendo a la fórmula del punto anterior:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k)} + \frac{D_1(1+g)}{(1+k)^2} + \frac{D_1(1+g)^2}{(1+k)^3} + \cdots$$

El resultado es el de la suma de infinitos elementos variables en progresión geométrica de primer término D1/(1+k) y razón q=(1+g)/(1+k):

$$P_0 = \frac{\frac{D_1}{1+k}}{1-\frac{1+g}{1+k}} = \frac{\frac{D_1}{1+k}}{\frac{1+k-1-g}{1+k}} = \frac{D_1}{(k-g)}$$

De donde podemos concluir que el valor de la acción será mayor en la medida que:

- Mayor sea el dividendo por acción
- Menor sea la tasa de rentabilidad exigida por el mercado
- Mayor sea la expectativa de crecimiento en el dividendo por acción

Por otra parte:

$$P_1 = \frac{D_2}{(k-g)}$$

$$P_1 = \frac{D_1(1+g)}{(k-g)}$$

$$P_1 = P_0(1+g)$$

Por tanto, según el modelo de Gordon-Saphiro, para el caso del crecimiento constante de dividendos, el incremento del valor de la acción cada período será igual al del crecimiento del dividendo para el mismo período.

Y la rentabilidad esperada de una inversión en una acción para un ejercicio será la suma del dividendo cobrado en el ejercicio más la tasa de crecimiento de dividendos prevista:

$$k = \frac{D_1}{P_0} + g$$

Aunque desde le punto de vista teórico este modelo simplifica enormemente el cálculo del valor de una acción, su aplicación práctica se complica por la dificultad y subjetividad que se infieren del cálculo de la tasa de crecimiento futuro del dividendo.

Tasa de crecimiento g

Este modelo solo es válido cuando la tasa de crecimiento g es menor que la rentabilidad exigida k.

La tasa de crecimiento g depende de la rentabilidad del capital propio (RoE) y de la ratio de retención:

- Ratio pay-out: porcentaje del beneficio neto que se distribuye como dividendo;
- Ratio de retención (coeficiente de reinversión): porcentaje de beneficio neto que se reinvierte en la empresa: 1 - ratio pay-out

$$g = RoE\ x\ ratio\ de\ retención$$

Tasa de rentabilidad esperada y tasa de rentabilidad exigida

De acuerdo al modelo anterior, el analista, a partir de unos dividendos conocidos y de su crecimiento en el futuro y para un precio de mercado concreto calculará cuál es la tasa de rentabilidad esperada de una inversión, a la que llamaremos K_e.

Por otra parte, el inversor tendrá determinada una rentabilidad exigida mínima a sus inversiones que estará en función de sus propias condiciones subjetivas.

De la comparación entre la tasa esperada y la tasa exigida se tomará la decisión de realizar o no una determinada operación de inversión.

El modelo de Gordon permite despejar la tasa de rentabilidad exigida como:

$$k_e = \frac{D_1}{P_0} + g$$

Esta rentabilidad exigida podrá descomponerse en dos elementos:

- Rentabilidad por dividendo (dividend yield)
- Rentabilidad por plusvalía (capital gain yield)

De modo que la rentabilidad por dividendo será $\frac{D_1}{P_0}$, y la rentabilidad por plusvalía será la tasa a la que aumenta el valor de una inversión, en este caso la tasa de crecimiento g.

Valoración de acciones con dividendos con crecimiento no constante

Muchas empresas, especialmente aquellas en fase de expansión, pueden estar distribuyendo dividendos bajos (o nulos) sobre los que esperan un alto crecimiento. Cuando su mercado madure, este crecimiento se ralentizará hacia una tasa de crecimiento más suave en una fase de estabilidad.

En este caso:

$$P_0 = VA\ dividendos\ cto\ no\ cte + VA\ dividendos\ en\ fase\ madura\ (Gordon)$$

Es decir:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_e)^1} + \frac{D_2}{(1+k_e)^2} + \cdots + \frac{D_t}{(1+k_e)^t} + \frac{P_t}{(1+k_e)^t}$$

Siendo:

$$P_t = \frac{D_{t+1}}{(k_e - g)} = \frac{D_t(1+g)}{(k_e - g)}$$

4. Valoración de acciones preferentes

Las acciones preferentes son un tipo de activo que, a pesar de lo que su nombre sugiere, en realidad tienen más que ver con la deuda a largo plazo de una compañía que con sus recursos propios.

Así, las podemos definir como un título que otorga a su poseedor el derecho a recibir un dividendo fijado de antemano siempre y cuando la empresa tenga beneficios y con carácter previo al cobro de dividendos por el resto de los tenedores de acciones ordinarias. Las acciones preferentes no poseen derechos políticos.

Las emisiones, al igual que en las acciones ordinarias, suelen ser a perpetuidad y en algunos casos incorporan la posibilidad de amortización anticipada por parte del emisor o la posibilidad de su conversión en acciones ordinarias a voluntad del inversor.

Desde el punto de vista de la prelación de pagos, tienen derecho a reclamar sus cantidades tras los acreedores senior y con carácter previo a los accionistas ordinarios.

Por tanto, su valoración será semejante a la de una deuda perpetua con el riesgo sobre esta de no cobrar el cupón anual si la empresa no obtiene beneficios.

Por tanto:

$$P_0 = \frac{D}{k}$$

Siendo:

- P_0: el valor de mercado de la acción preferente
- D: cupón anual pagadero si existen beneficios
- k: rentabilidad exigida, que tendrá en cuenta el riesgo, que lógicamente será superior al de un bono de la misma empresa

En el caso de que la acción preferente incorpore el derecho a canje o conversión por acciones ordinarias, la formulación del precio de mercado de la acción preferente sería:

$$P_0 = \frac{D}{k} + d$$

Donde d: valor de mercado de la opción de canje o conversión

5. Valor de los derechos de opción

La suscripción de acciones es un contrato por el cual una persona llamada suscriptor, se compromete a entrar en la sociedad anónima, en el plazo y condiciones estipuladas, el precio de una cierta cantidad de acciones adquiridas, y que en cuya virtud este adquiere la calidad de accionista, debiendo la sociedad por su parte hacer entrega al suscriptor del título de acciones que acredite su participación en ésta.

El Derecho de Suscripción Preferente (DSP) es el derecho de opción que presentan los socios (dentro de una sociedad mercantil personalista o de capital) frente a terceros interesados en suscribir acciones o participaciones que, con sus aportes, generarán un aumento del Capital social. El objetivo, por tanto, es respetar la proporción que tiene cada socio en el capital social, a efectos de que su participación no se vea disminuida por la ampliación de capital con base en la aportación de terceros.

Entre los derechos de suscripción preferente más destacables se encuentran los referidos a un aumento del capital social mediante el incremento en el Valor Neto de las acciones y, por otro lado, mediante el incremento sobre la base de capitalización de créditos.

Valor teórico del Derecho de Opción

Para tener en cuenta el valor teórico de un derecho de suscripción se debe considerar el número de acciones que se emiten, la proporción con las que se poseen, la cotización de las acciones antes de la ampliación y el precio de emisión de nuevas acciones procedentes de la ampliación de capital.

La cotización teórica después de la ampliación de capital viene definida por la siguiente fórmula:

$$C'' = \frac{mC' + nE}{m + n}$$

Siendo:

- C" = Cotización teórica después de la ampliación de capital,
- C' = Cotización de la acción antes de la ampliación,
- E = Precio de emisión de las nuevas acciones procedentes de la ampliación de capital,
- m = Número de acciones antiguas exigidas para acudir a la ampliación de capital,
- n = Número de acciones nuevas a suscribir a un cierto precio de emisión;

El **valor teórico** del derecho de suscripción será la diferencia entre la cotización bursátil de las acciones el día anterior al inicio de la ampliación y la cotización teórica después de la ampliación.

$$d = C' - C''$$

Donde d = Valor teórico del derecho de suscripción.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 17. Muestreo: tipos. Muestreo de poblaciones finitas. Distribuciones en el muestreo. Distribución de la media y de la varianza en el muestreo. Muestreo aleatorio simple. Errores de muestreo. Determinación del tamaño de la muestra.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Muestreo: tipos

El muestreo puede ser:

- Aleatorio, en que la selección de los elementos de la muestra es aleatoria e independiente de la opinión de cualquier persona. Cuando la extracción se realiza al azar, se garantiza la representatividad de la muestra, ya que los elementos son extraídos de la forma más objetiva posible, poniéndose a establecer la probabilidad de obtener cada muestra que sea posible seleccionar.

  Si se seleccionan elementos de la población, podemos distinguir entre selección con probabilidades iguales o con probabilidades desiguales. Dentro de los métodos de muestreo probabilístico se puede destacar:

  - Muestreo aleatorio con reposición, conocido como muestreo aleatorio simple (m.a.s.) y caracterizado porque la población es idéntica en todas las extracciones y cada elemento de la muestra es independiente de los demás.
  - Muestreo aleatorio sin reposición o muestreo irrestrictamente aleatorio, en que cada extracción modifica la probabilidad de extracción en las siguientes observaciones. Así, los elementos de la muestra no son independientes entre sí.
  - Muestreo estratificado: se organiza la población en estratos, es decir, en subpoblaciones muy homogéneas entre sí; dentro de cada estrato, el muestreo será aleatorio. El total del número de elementos de todos los estratos conforman la muestra total.
  - Muestreo por conglomerados: en cada conglomerado se representan todas las características de la población, y luego se elige aleatoriamente algún conglomerado.
  - Muestreo sistemático: los elementos poblacionales están numerados. Se fija un valor K y se elige, al azar, uno de los K primeros elementos, formando la muestra, más ese número +K, más ese número + 2K, y así sucesivamente.
  - Muestreo por etapas: es una generalización del muestreo por conglomerados, tratando de reducir el coste al mínimo. En la primera etapa se selecciona un número determinado de conglomerados; en la segunda, conglomerados pertenecientes a los anteriores, y así sucesivamente hasta llegar a los elementos poblacionales a observar.
- No aleatorio: en que la extracción no se realiza al azar. Distinguimos:
  - Muestreo por cuotas o accidental: Se suele asentar sobre la base de un buen conocimiento de los estratos de la población o de los individuos más representativos para los fines de la investigación. Se fijan unas cuotas que

consisten en un número de individuos que reúnen unas determinadas condiciones, dejando libertad al entrevistador para elegir a los entrevistados siempre y cuando se ajuste a esas cuotas.

- Muestro de juicio u opinión: Se caracteriza por un esfuerzo deliberado de obtener muestras representativas mediante la inclusión en la muestra de grupos supuestamente típicos.
- Otros: muestreo intencional y muestreo por bola de nieve.

2. Muestreo en poblaciones finitas

Cuando la población es infinita, resulta indiferente el tipo de muestro que se aplique, no es relevante si se aplica reemplazamiento (reposición) o no. Cuando la población es finita, cobra gran importancia el tamaño de la población, N. Sean X_1, X_2, ... , X_N los elementos poblacionales, de donde se pueden extraer $\binom{N}{n}$ muestras diferentes de tamaño n. Así, la probabilidad de una muestra concreta será $\frac{1}{\binom{N}{n}}$.

Cuando el cociente $f = \frac{n}{N}$ sea suficientemente pequeño, también dará igual el tiepo de muestreo. Llamaremos factor de corrección de poblaciones finitas a $1 - f = \frac{N-n}{N}$; Si 1-f > 0,95, consideraremos que se trata de una población infinita.

Por otro lado, teniendo en cuenta la convergencia de la distribución hipergeométrica a la binomial cuando N→∞, con una población grande el muestreo irrestricto se puede tratar como m.a.s.

3. Distribuciones en el muestreo

Al ser los estimadores funciones de las variables muestrales, habrá un valor u otro de ellos en función de que la muestra contenta unos u otros elementos, esto es, el estimador es una variable aleatoria de la que conocemos todos sus posibles resultados, pero no el que vamos a obtener en concreto.

Al ser los estimadoras variables aleatorias, tienen una función de distribución que recoge la probabilidad para cada uno de sus posibles valores.

Es necesario distinguir entre:

- Distribución del muestreo, refería a la distribución de frecuencias de las muestras.
- Distribución en el muestreo, que es la distribución de probabilidad de los posibles valores que puede tomar el estimador según la muestra que resulte extraída. Por tanto, un estimador tendrá su media $[E(\hat{\theta})]$ y su varianza $[V(\hat{\theta})]$, en base a las cuales se definen las propiedades de los estimadores (insesgadez, eficiencia,

consistencia). Es decir: conforme voy extrayendo muestras y calculando sus estadísticos, termino teniendo una población de muestras, y cada muestra tiene sus propias características (estadísticos semejantes a los parámetros poblacionales); así, una característica muestral tendrá sus propios parámetros (centralización, dispersión) y seguirá una distribución que deberá tener relación con la de la población original.

Cabe, asimismo, diferenciar entre:

- Parámetro poblacional: Característica numérica de la población; es una constante cuyo conocimiento permite definir totalmente la función de distribución.
- Estadístico: Es una variable aleatoria, función de las observaciones muestrales, que no contiene ningún valor o parámetro desconocido; la distribución de un estadístico está relacionada con la distribución de la población original y el tamaño de la muestra (n).

Los parámetros que vamos a estimar son:

- La media poblacional: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$, mediante el estadístico media muestral: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$; y
- La varianza poblacional: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2}{N}$, mediante ${S_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

Y vamos a analizar cómo se distribuyen los estadísticos muestrales.

Muestreo aleatorio simple

Al ser m.a.s, existe reemplazamiento.

Estimamos la media poblacional a través de la media muestral:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Entonces:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

En resumen, aplicando el Teorema Central del Límite si n→∞:

$$\bar{x} \to N\left(\mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

De modo que:

$$\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0{,}1)$$

Si σ es desconocida:

$$\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\frac{S_1}{\sqrt{n}}} \rightarrow t_{n-1}$$

La varianza poblacional, por su parte, se estima a partir de la cuasivarianza muestral:

$$\widehat{\sigma^2} = {S_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Con $E(S_1^2)=\sigma^2$

No obstante, ahora lo que nos ocupa es conocer la distribución de la varianza muestral, que tendrá sus propias media y varianza dado que también se trata de una variable aleatoria. Siendo la varianza muestral:

$${S_x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Y siendo:

$$E({S_x}^2) = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$V({S_x}^2) = \frac{\mu_4 - \mu_3}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2)^2}{n^2} - \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu^3}$$

Muestreo irrestrictamente aleatorio (poblaciones finitas)

No existe reemplazamiento.

Vamos de nuevo con la media muestral:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Con:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}$$

De modo que:

$$\bar{x} \rightarrow N\left(\mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}}\right)$$

Para el caso de la varianza muestral:

$$E({S_1}^2) = \sigma^2 \frac{N}{N-1}$$

4. Muestreo aleatorio simple y poblaciones finitas

Errores de muestreo

El simple hecho de emplear muestras y no la población al completo nos va a llevar al error muestral, que cabe distinguir de errores de otros tipos como el error de especificación de la población, de marco muestral, de selección o de falta de respuesta.

El error de muestreo como tal se produce debido a la variación del número o la representatividad de la muestra que responde. Se puede controlar y reducir el error con distintas estrategias:

- Un diseño cuidadoso de la muestra
- Una muestra lo suficientemente grande
- Múltiples contactos para garantizar una respuesta significativa

En el caso del m.a.s., el error de muestreo relativo se analiza a través de la dispersión de la media, es decir, $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$ o, más bien, a través de su desviación típica: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

También es posible calcular el error de muestreo absoluto para la estimación de la media poblacional, suponiendo que se distribuye según una Normal. Así:

$$p\left(|\bar{x} - \mu| < z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}}\right) = \gamma = 1 - \alpha$$

Tipificando:

$p\left(\frac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma_{\bar{x}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = p\left(\xi' < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \gamma$ con $\xi' \to N(0,1)$

Así, el error de muestreo absoluto será $\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}}$ con una probabilidad (nivel de confianza) γ. Este ε también es la semiamplitud del intervalo de confianza para la media poblacional; bajo hipótesis de normalidad:

$$p\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}}\right) = \gamma$$

Nota: para γ=0,95 → ε = 1,96$\sigma_{\bar{x}}$

Para el m.a.s: $\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}} = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para poblaciones finitas: $\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\bar{x}} = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Determinación del tamaño muestral para la estimación de la media

Dado un nivel de significación α, fijar el tamaño del error equivale a predeterminar la varianza del estimador, siendo el tamaño de la muestra el resultado del supuesto que hagamos sobre el error o la varianza.

Fijado el valor de Z por el nivel de confianza, el error es igual a la desviación estándar del estimador multiplicado por una constante (1,96 para γ=0,95):

- Poblaciones finitas:

  Si elevamos al cuadrado e introducimos el valor de $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\varepsilon^2 = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}$$

  Si suponemos conocidos N y s2, podemos despejar el tamaño de la muestra, n:

$$n = \frac{\sigma^2 N}{(N-1)\sigma_{\bar{x}}{}^2 + \sigma^2}$$

- M.a.s.:

$$\varepsilon^2 = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{n}$$

$$n = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 18. Teoría de la estimación: estimador y estimación. Propiedades de los estimadores. Estimación por punto: métodos, con especial referencia al de máxima verosimilitud. Estimación por intervalo. Contraste de hipótesis.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Teoría de la estimación: estimador y estimación

Sea un fenómeno aleatorio o población que se representa por la variable aleatoria ξ con función de probabilidad $f(X;\theta)$, donde θ representa a un parámetro de valor desconocido o a un vector de parámetros con valores desconocidos $\theta = \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k\}$. Cabe resaltar que, si su valor es desconocido, siempre lo será; los métodos de inferencia estadística tratarán, a partir de la información contenida en la muestra, aproximarse a su verdadero valor (Estimación) o aceptar o rechazar hipótesis que puedan tomar ciertos valores con un determinado margen de error (contraste de hipótesis).

Para inferir alguna característica desconocida de la población, supondremos que se va a obtener una muestra de tamaño n [X: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$] por medio de muestreo aleatorio simple (m.a.s.), de modo que $x_i \sim f(x_i; \theta)$, con i=1, … , n (independientes en probabilidad).

Concepto de estimador: Estadístico elaborado de tal forma que, para una muestra concreta, el valor que tome se asignará al parámetro (θ) de valor desconocido, sin objeto de descubrir o revelar su cuantía (dado que es imposible), sino con el objeto de aproximarse o estimar su verdadero valor. A la cantidad así obtenida la llamamos estimación.

Distinguimos, por tanto, entre:

- Parámetro: θ. Se puede considerar el conjunto de valores que puede tomar, constituyendo el espacio paramétrico Θ.
- Estimador: $\hat{\theta} = t(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Es un estadístico y, por tanto, es una variable aleatoria con su correspondiente distribución de probabilidad, que dependerá de los valores paramétricos desconocidos.
- Estimación: $\hat{\theta}_0 = t(x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0})$. Para una muestra determinada, $X_o = (x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0})$, la estimación es la concreción del valor obtenido para el estadístico $\hat{\theta} = t(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, estimador de θ.

Hay dos criterios de estimación:

- Estimación puntual: busca el mejor estadístico $\hat{\theta} = t(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ de modo que, para una muestra concreta $X_o = (x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0})$, determine el alor estimado para el parámetro.
- Estimación por intervalo: se buscan los estadísticos $T_1(x)$ y $T_2(x)$ más adecuados para que, dada una muestra concreta, $X_o = (x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0})$, se determine un intervalo de valores de gran fiabilidad para el parámetro: $\theta \in [\, T_1(x_0); T_2(x_0)]$.

Se define el error cuadrático medio del estimador $\hat{\theta}$ [ECM($\hat{\theta}$)] como la medida, en media y al cuadrado, de la diferencia entre el posible valor del estimador y el valor desconocido del parámetro, en la distribución del estimador $\hat{\theta}$:

$$ECM(\hat{\theta}) = E[\theta - \hat{\theta}]^2$$

Se puede demostrar que:

$$ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + [sesgo(\hat{\theta})]^2 = V(\hat{\theta}) + b(\hat{\theta})^2$$

Donde:

$$V(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2$$

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Por tanto, como queremos minimizar el ECM($\hat{\theta}$), vamos a buscar los estimadores con menor sesgo y menor varianza en su distribución de probabilidad.

2. Propiedades de los estimadores

Estimador insesgado o centrado

Se dice que el estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ es insesgado si E($\hat{\theta}$)= θ.

Decimos que un estimador es asintóticamente insesgado cuando, siendo sesgado [E($\hat{\theta}$)= θ + b(θ)], el sesgo tiende a 0 cuando el tamaño muestral n tiende a infinito.

Un estimador insesgado es un estimador centrado.

Estimador eficiente

Un estimador $\hat{\theta}$ es eficiente si es insesgado y es el que posee menor varianza de entre todos los estimadores insesgados del parámetro θ.

Solo en determinados casos podremos identificar al estimador eficiente, y será cuando comprobemos que la varianza del estimador insesgado coincida con la expresión obtenida con la cota de Cramer-Rao, que se establece bajo las siguientes condiciones:

- El campo de variación de las x_i no depende del valor de θ;
- $\theta \in \Theta \subset \Re$ (espacio abierto);
- La función de verosimilitud L(X;θ) admite primera derivada respecto a θ;
- Las operaciones de integración y derivación sobre L(X;θ) son intercambiables.

De modo que:

$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{[1 + b(\hat{\theta})]^2}{nE\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2} = CR$$

Si θ^* es el estimador insesgado, la cota queda:

$$V(\theta^*) \geq \frac{1}{nE\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2} = CR$$

Al estimador eficiente se le considera el estimador óptimo, dado que optimiza el ECM al anular el sesgo y hacer mínimo el otro término (la varianza del estimador).

Estimador consistente

La consistencia es una propiedad asintótica, ya que la condición suficiente de consistencia se da si:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta \\ \lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0 \end{cases}$$

Lo que implica que $\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\theta}) = 0$.

Estadístico suficiente

Se dice que un estadístico $T(X)=T(x_1, \ldots, x_n)$ es suficiente respecto al parámetro θ si recoge toda la información que contiene la muestra sobre dicho parámetro, de tal forma que la distribución de probabilidad conjunta de la muestra, condicionada a que T(X) haya tomado un valor determinado [T(X)=t], no depende de θ:

T(X) es suficiente $\leftrightarrow$ $f_x(x_1, \ldots, x_n / T(X)=t)$ no depende de θ.

El modo más sencillo de establecer si un estadístico es suficiente lo proporciona el **Teorema de Factorización** de Fisher-Neyman:

CNyS de suficiencia: $L(X; \theta)$ se puede descomponer en dos funciones:

- $g[T(x);\theta]$, que depende de θ; y
- $h(X)$, que no depende de θ.

De tal forma que:

$L(X; \theta)= g[T(x);\theta]\, h(X)$

3. Estimación por punto: métodos

Método de los momentos

Se basa en que los momentos muestrales respecto al origen (a_r) son buenos estimadores de los correspondientes momentos poblacionales (α_r).

Consideremos una variable aleatoria x con función de probabilidad dependiente de k parámetros con valor desconocido: $\xi \sim f(x; \theta_1, \ldots, \theta_k)$.

Se supone que existen los momentos respecto al origen α_r para r = 1, … , k, que determinaremos como:

- $\alpha_r = E(\xi^r) = \sum_{\forall x} x^r f(x; \theta_1, \dots, \theta_k) = \alpha_r(\theta_1, \dots, \theta_k)$ si ξ discreta; o
- $\alpha_r = E(\xi^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x; \theta_1, \dots, \theta_k) dx = \alpha_r(\theta_1, \dots, \theta_k)$ si ξ continua.

Y se establecen en la muestra los momentos $a_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}$, r = 1, …, k.

Igualamos los momentos poblacionales a los muestrales, formando un sistema de k ecuaciones con k incógnitas, que serán los valores desconocidos de los parámetros:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta_1, \dots, \theta_k) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1}{n} \\ \qquad\qquad \dots \\ \alpha_r(\theta_1, \dots, \theta_k) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n} \\ \qquad\qquad \dots \\ \alpha_k(\theta_1, \dots, \theta_k) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n} \end{cases}$$

Si este sistema tiene solución única para los valores desconocidos de θ_i:

$$\begin{cases} \theta_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \qquad \dots \\ \theta_r = \varphi_r(x_1, \dots, x_n) \\ \qquad \dots \\ \theta_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Y esta será la solución matemática del sistema, que constituirán los estimadores por momentos del parámetro.

Los estimadores por momentos son siempre consistentes.

Método de máxima verosimilitud

Un valor del parámetro será más verosímil que otro cuando con él obtengamos una mayor probabilidad de la muestra que se ha extraído que con el otro valor. Un valor es máximo-verosímil cuando no existe otro valor del parámetro con el que se obtenga una probabilidad mayor para la muestra que hemos extraído.

El estimador de máxima verosimilitud (EMV) es el estadístico que, para cualquier muestra que se pueda extraer, nos proporciona los valores más verosímiles para el parámetro desconocido.

Para la obtención del EMV se deberá estudiar la existencia de máximo de la función de verosimilitud según los valores del parámetro, y comprobar que ese máximo es único y que el valor del parámetro en ese punto se puede expresar como función unívoca de los elementos muestrales.

Supongamos una población representada por la variable aleatoria ξ con $f(X;\theta)$. De esta población se extrae una m.a.s (n) X: $(x_1, ..., x_n)$ con $x_i \sim f(x_i; \theta)$, i = 1, ... , n, y siendo las x_i independientes en probabilidad. La función de verosimilitud es:

$$L(X;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \ \forall\theta \in \Theta$$

Imaginemos que ya se han observado los valores muestrales: $X_o = (x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0})$; la función de verosimilitud quedará:

$$L(X_0;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_{i_0};\theta)$$

El valor más verosímil que puede tomar el parámetro será aquel con el que la función de verosimilitud tome su máximo valor, para una muestra dada.

θ = M será el valor más verosímil de θ si se verifica que máx $L(X;\theta) = L(X_0;M)$.

Generalización a una muestra cualquiera

Situándonos en algún momento anterior a la observación de la muestra, es decir, dejando los valores muestrales indeterminados, vamos a analizar la existencia de máximo en la función de máxima verosimilitud y tendremos que comprobar que, existiendo este máximo, es único. Entonces podremos expresar el valor del parámetro más verosímil como función unívoca de los valores muestrales:

máx $L(X;\theta) = L(X;M)$, con $M = \varphi(x_1, ..., x_n)$, siendo $\varphi(x_1, ..., x_n)$ un estadístico tal que, para una muestra en concreto, nos dará el valor más verosímil del parámetro. Por tanto, será el EMV: $\hat{\theta}_{MV} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$

Normalmente, la función de máxima verosimilitud presenta una forma analítica compleja como para operar con ella; suele ser más sencillo trabajar con su transformación logarítmica o segunda función de verosimilitud, que tendrá sus máximos y mínimos en los mismos valores paramétricos que la original. Así, se tratará de maximizar la función $l(X;\theta) \ = \ ln\, L(X;\theta)$.

Veamos cómo proceder en caso de dos parámetros y una función de verosimilitud diferenciable:

Partimos de una función de verosimilitud

$$L(X;\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2)$$

$$l(X;\theta_1,\theta_2) = \ln L(X;\theta_1,\theta_2) = \sum_{i=1}^{n} ln f(x_i;\theta_1,\theta_2)$$

La condición necesaria de máximo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{\partial l(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

Si podemos despejar, entonces:

$$\begin{cases} \theta_1 = \varphi_1(X) \to \hat{\theta}_{1_{MV}} = \varphi_1(X) \\ \theta_2 = \varphi_2(X) \to \hat{\theta}_{2_{MV}} = \varphi_2(X) \end{cases}$$

Donde $\hat{\theta}_{1_{MV}}$ y $\hat{\theta}_{2_{MV}}$ serán EMV si la matriz Hessiana es definida negativa, es decir, deberá cumplirse que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta_1^2} < 0 \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta_1^2} & \dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta_1 \theta_2} \\ \dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta_2 \theta_1} & \dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta_2^2} \end{vmatrix} > 0 \end{cases}$$

Los estimadores máximo verosímiles, bajo ciertas condiciones de regularidad, cumplen que:

- Existe el EMV y es único;
- EMV es siempre, al menos, asintóticamente insesgado;
- EMV es siempre consistente;
- Si hay estimador eficiente, es el de máxima verosimilitud;
- Eficiencia asintótica, es decir, el EMV converge a la Normal, donde la varianza coincide con la cota de Cramer-Rao; y
- Si existen estadísticos eficientes, el EMV es función de ellos.

4. Estimación por intervalo

Para ampliar, respecto de la estimación puntual, el rango de posibles valores en que pudiera situarse el parámetro, se han desarrollado, dentro de la Inferencia Estadística, diversos métodos para la estimación por intervalo. Uno de ellos es la elaboración de intervalos de confianza.

La obtención de un intervalo de confianza para q consiste en determinar dos estadísticos $T_1(X)$ y $T_2(X)$ de modo que $p[T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)] = \gamma = 1- \alpha$, donde γ es el nivel de confianza y α el nivel de significación.

Para una muestra concreta $X_o = (x_{1_0}, \dots, x_{i_0}, \dots, x_{n_0})$, cuando ya se han observado los valores muestrales, no tiene sentido hablar de probabilidad, por eso hablamos de confianza, y se expresa: $\theta \in [T_1(X) ; T_2(X)]_{\gamma=1-\alpha}$.

Elaboración del intervalo de confianza

1. Elegimos un estadístico pivote $T(X;\theta)$ tal que:
    - Su expresión incluye a θ;
    - Su distribución de probabilidad es conocida (en muchos casos, tabulada) e independiente de θ;
    - Es función continua y monótona de q, de modo que es posible despejar θ como función uniforme de X.
2. Se fija $\gamma = 1 - \alpha$
3. En la distribución de probabilidad de $T(X;\theta)$ se pueden calcular los valores k_1 y k_2 que verifican que $p[k_1 \le T(X;\theta) \le k_2] = \gamma$
4. Dentro de esa probabilidad, despejamos θ de las siguientes ecuaciones:
    - $T(X;\theta)=k_1 \rightarrow \theta = t_1(x)$
    - $T(X;\theta)=k_2 \rightarrow \theta = t_2(x)$
    - Resultando: $\theta \in [\, t_1(x) ; t_2(x)]_\gamma$

5. Contraste de hipótesis

Una hipótesis estadística es cualquier conjetura formulada sobre alguna de las características de la distribución de probabilidad de la población o de las observaciones muestrales que se pudieran hacer de la misma o de los modelos que se pudieran construir con diferentes variables poblacionales.

Tipos de hipótesis:

- Paramétrica (atribuye un valor o un rango de valores al parámetro o parámetros desconocidos); o no paramétrica (incluye características no paramétricas como la forma de la distribución de la probabilidad, la independencia entre variables aleatorias, etcétera);
- Simple (bajo su enunciado, la distribución de probabilidad de ξ, y por tanto la de la muestra, está completamente determinada y es única); o compuesta (la distribución de ξ aún queda indeterminada);
- Nula (se enuncia para ser contrastada con los resultados muestrales, de modo que será rechazada o aceptada según se encuentre evidencia en la muestra; se

representa por H_0); o alternativa (la que se propone frente a la nula; se representa por H_1).

La aceptación o rechazo de la hipótesis nula deberá hacerse siempre de acuerdo con el resultado muestral observado. Si consideramos que la muestra X puede tomar valores dentro del espacio muestral n-dimensional, dividiremos dicho espacio en dos conjuntos complementarios: la región crítica (R_C) y la región de aceptación (R_A), de modo que si la muestra cae en la región crítica se rechaza H_0, y si pertenece a la región de aceptación no se rechazará H_0.

La determinación de la región crítica se hará por medio de un estadístico elaborado apropiadamente en cada caso, estableciéndose claramente el conjunto de sus posibles valores que nos harían rechazar la hipótesis nula y conformarían, por tanto, dicha región crítica.

Las probabilidades y conceptos que se definen para caracterizar el proceso del contraste de hipótesis son:

- Nivel de significación: es la probabilidad de cometer el error de primera especie:

$$\alpha = p(\varepsilon_1) = p((rechazar\ H_0|H_0\ cierta)$$

- La probabilidad de cometer el error de segunda especie es:

$$p(\varepsilon_2) = p((aceptar\ H_0|H_0\ falsa) = \beta(\theta)$$

- La potencia del contraste es:

$$\eta(\theta) = 1 - \beta(\theta) = p((rechazar\ H_0|H_0\ falsa)$$

- La función de potencia es la función que, dependiendo de todos los valores de θ, incorpora tanto la probabilidad de cometer el error ε_1 (α) como la potencia del contraste:

$$\phi(\theta) = p((rechazar\ H_0|\theta) = p(X \in R_C)$$

- P-valor: se determina una vez extraída la muestra y calculado el valor del estadístico con el que se resuelve el contraste. Se puede definir como la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como el que se ha obtenido con el estadístico, suponiendo H_0 cierta. Es una medida directa de lo probable que resultaría obtener una muestra como la actual bajo H_0 cierta.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 19. Concepto de Estadística actuarial. Fenómeno actuarial. Principios fundamentales del modelo biométrico. Estructuras y funciones biométricas. Tantos de supervivencia y mortalidad. Determinación de la probabilidad de muerte. Función de supervivencia.

Edición noviembre 2025

Concepto de Estadística Actuarial

La estadística actuarial es una disciplina que proporciona las herramientas necesarias para el estudio de ciertas actividades económicas llevadas a cabo, principalmente, por las compañías de seguros.

Estudia las leyes que rigen los fenómenos aleatorios que pueden tener consecuencias económicas desfavorables, esto es, los fenómenos actuariales: Los modelos de distribución de probabilidad para los seguros de no vida (números de siniestros y su cuantía) y de los modelos de probabilidad para los seguros de vida (modelos de supervivencia y modelos biométricos).

Cabe considerar dentro de su objeto también el complemento de la disciplina de la matemática actuarial en cuanto a la valoración del riesgo financiero, esto es, el riesgo asumido considerando todas las operaciones objeto de su cobertura (teoría del riesgo colectivo), o la probabilidad de ruina de la empresa.

En ocasiones se confunde el término de estadística actuarial con el de biometría, que es una parte de la primera, cuando los modelos de probabilidad que se estudian son basados en la supervivencia o no de los elementos de un colectivo. Pero la estadística actuarial comprende también la modelización para las probabilidades de ocurrencia de siniestros, número de éstos y cuantía del campo de la no vida.

En definitiva es la parte de la ciencia estadística que estudia los fenómenos actuariales.

Fenómeno Actuarial

Por fenómeno actuarial se entiende aquel fenómeno aleatorio cuya realización tiene consecuencias económicas. O bien a aquel fenómeno de naturaleza económica con carácter aleatorio.

Dado que la posibilidad de acontecimiento implica unas consecuencias económicas positivas o negativas, cuando éstas puedan ser desfavorables, el sujeto afectado tratará de evitarlas o, en caso de que esto no sea posible, prevenirlas.

El fenómeno por tanto suscita incertidumbre, que objetivamente será conocida como Riesgo. La realización o concreción del fenómeno actuarial se conoce como siniestro, el sujeto pretenderá prevenirse de las consecuencias económicas del acontecimiento del siniestro.

El método con el que el sujeto tratará de cubrirse de esta incertidumbre es la institución del seguro que compensará económicamente al sujeto por el acontecimiento de siniestros.

Esto es:

- Se produce una transferencia del riesgo. Es otro sujeto quien cubrirá las consecuencias económicas de un siniestro.
- Agrupación: Para que lo anterior sea posible es necesario que exista el sujeto que va a cubrir las consecuencias sea una agrupación de sujetos, de modo que se pueda paliar la intensidad del siniestro en cuestión.

- Por otro lado el sujeto que desea cubrirse deberá aportar un precio a la agrupación por la cobertura de sus riesgos. Este precio es lo que se denomina prima.

Los requisitos por tanto que deben confluir son: Agrupación (de sujetos que sumen el riesgo), Reparto (de las consecuencias económicas que derivan de los siniestros) y transferencia, por tanto, de las consecuencias.

El fenómeno actuarial es en definitiva incierto y por tanto aleatorio en cuanto a su ocurrencia (siniestro/no siniestro) pero a la vez está sujeto a la aleatoriedad sobre el número de siniestros que pueden acaecer en un periodo de tiempo y a la cuantía, intensidad o severidad de cada uno de éstos. La aleatoriedad del fenómenos se presenta por tanto de manera permanente.

Principios fundamentales de la variable biométrica

La biometría es la parte de la Estadística Actuarial que estudia fundamentalmente la supervivencia humana (aunque se puede extender para la duración en poblaciones de animales o bienes sujetos a procesos de envejecimiento) y de otros campos relacionados con la misma como son la construcción de tablas de mortalidad o de vida.

La modelización de la muerte o supervivencia integra el denominado modelo biométrico, el cuál viene marcado por el tiempo biométrico de los individuos o elementos (esto es, por su edad). El modelo biométrico además es un modelo estocástico cuyo diseño se construye en torno a una variable aleatoria X → Edad de fallecimiento, y que representa el tiempo biológico transcurrido desde el instante del nacimiento de un individuo hasta su fallecimiento.

El estudio de esta variable biométrica es más sencillo cuando se supone que ésta tiene un carácter **continuo** (como el tiempo que la sostiene). Sin embargo los datos históricos con los que contamos suministran la información en edades completas, por lo que generalmente se trabaja bajo el prisma de una descripción **discreta** de esta variable. Las soluciones a las que se llegan bajo una y otra concepción son ligeramente diferentes.

La variable biométrica básica es la que hemos definido como edad de fallecimiento, y se adscribe a un individuo genérico. Es una variable aleatoria definida en el intervalo $(0, \infty)$, si bien en las construcciones prácticas se suele utilizar un infinito llamado actuarial, una edad límite que se nota por ω, por lo que el campo de variación de X queda $(0, \omega)$

Esta variable como se ha indicado se refiere a la edad de fallecimiento de un individuo recién nacido.

Otra variable biométrica básica es la que denominamos Vida residual, esto es, la edad de fallecimiento de un individuo de edad x (ya ha sobrevivido a la edad x y por tanto su distribución es la truncada en x de la anterior).

Las hipótesis básicas sobre las que descansa el modelo son:

- **Homogeneidad:** Los individuos forman un grupo homogéneo en el sentido estadístico de que su edad de fallecimiento (distribuciones) son idénticas. Las variables edad de fallecimiento de cada individuo se distribuyen con la misma ley de probabilidad. De esta manera podemos estudiar el comportamiento probabilístico de un individuo genérico y utilizar sus conclusiones para el conjunto de éstos. Cada individuo es una réplica exacta de otro que tenga la misma edad.

Homogeneidad estadística en torno a una variable y heterogeneidad: Se dice que un conjunto de elementos o individuos, un grupo, presenta homogeneidad respecto a una característica cuando los datos individuales de dicha característica no difieren demasiado del dato promedio para todo el colectivo. La heterogeneidad se refiere a la existencia de gran dispersión entre los datos individuales y el promedio del grupo.

Cuando esto no sea posible se separa a los individuos en grupos de modo que éstos sean homogéneos dentro de sí y heterogéneos entre sí (estratos).

Los distintos grupos de personas observados estadísticamente para obtener las frecuencias dx/lx han de ser evidentemente homogéneos, es decir, de las mismas características respecto a una serie de causas que influyen en la mortalidad:

a) Las estadísticas demográficas han puesto de manifiesto que la mortalidad varía con el sexo, lo cual ha conducido al establecimiento de tablas distintas para hombres y para mujeres.

b) La profesión y el clima, entre otras, son circunstancias que ejercen influencia sobre la mortalidad. Sin embargo, sobre este punto no hay estadísticas abundantes y de garantía. Esto se debe a que las compañías de seguros son casi las únicas entidades que tienen interés en un estudio profundo de la mortalidad aunque, por razón de la composición de su clientela, no tiene para ellas gran importancia la cuestión de la profesión y el clima. En efecto, la profesión puede variar en el transcurso del contrato de seguro. En cuanto al clima, la compañía inicia sus operaciones en su propio país y, eventualmente, las extiende luego a otros países con análogas condiciones de vida; lo que hace innecesario la utilización de tablas diferentes. En consecuencia, la solución implementada por las aseguradoras consiste en insertar cláusulas restrictivas en el contrato, excluyendo profesiones particularmente peligrosas y climas reputados universalmente de malsanos.

- **Independencia:** Las variables que describen las edades de fallecimiento de los distintos individuos so estadísticamente independientes. Esta hipótesis se traduce en que las probabilidades para la edad de fallecimiento de un individuo no dependen de la edad de fallecimiento de otro. No hay efecto contagio.
- **Estacionariedad**: Las probabilidades biométricas sobre los individuos no dependen de su fecha de nacimiento, sólo de su edad, esto es, dependen del tiempo biométrico pero no del tiempo físico, teniendo las mismas probabilidades de fallecer dos individuos de 60 años en el año 1980 que en el 1990. Esta hipótesis sólo es aceptable para periodos de tiempo corto y se viene relajando en los últimos años donde se usan cada vez más las tablas dinámicas sobre las estáticas que corrigen el tiempo físico.

Estos tres principios o hipótesis nos permiten reducir los análisis de grupo a un individuo genérico desde el cual se extienden las conclusiones o resultados posteriormente, mediante la relación entre frecuencias y probabilidades.

Estructuras biométricas

Se pretende ver cómo se comportan un grupo de **n** cabezas (**x_1, x_2, ..., x_n**), mediante la probabilidad:

$$ {}_t p_{x_1, x_2, \ldots, x_n} = F(t, \varsigma_1, \ldots, \varsigma_\gamma) \qquad \gamma \leq n $$

En definitiva, como se observa que ***γ ≤ n***, se tratará de modelizar el comportamiento de un grupo utilizando el número mínimo de parámetros, que se va a denominar *actuarianos*.

Por ejemplo, si se tiene una estructura de orden dos, se tendrá ***t*** y dos parámetros **ς_1, ς_2** más.

Se pretende modelizar la realidad a partir de grupos ficticios de pocas personas (parámetros).

Dos cabezas serán equivalentes si se cumple que:

$F_1(x) = F_2(x)$ $\quad \forall$**x**

$\mu_1(x) = \mu_2(x)$ $\quad \forall$**x**

Considerando dos grupos:

(**x_1, x_2, ..., x_n**) $\rightarrow$ grupo real

(**ς_1, ς_2 ..., ς_γ**) $\rightarrow$ grupo ficticio (conocido como *actuariano*)

Dos grupos serán equivalentes con respecto a su función de supervivencia si coinciden:

$$ \mu_X^h = \overline{\mu}_G^h $$

$$ \mu_X^h = \mu_{x_1+h} + \mu_{x_2+h} + \ldots + \mu_{x_n+h} $$
$$ \overline{\mu}_G^h = \mu_{\varsigma_1+h} + \mu_{\varsigma_2+h} + \ldots + \mu_{\varsigma_\gamma+h} $$

Es decir, los *actuarianos* tienen un comportamiento equivalente al grupo real, y en ese sentido, envejecen uniformemente (igual al grupo real). Esto se conoce como la ley de envejecimiento uniforme de *Quinquet*.

Se plantean por tanto 3 cuestiones importantes:

1) *¿A cuánto se puede reducir el grupo? ¿Cuál debe ser el valor de γ?* Esto es lo que se conoce como el *orden de la estructura*.
2) *¿Cuál es la relación entre μ_x (real) y μ_G (ficticio)?*
3) *¿Cómo se pueden expresar las edades de los actuarianos (parámetros) como función de las edades del grupo real?*

Orden de la estructura biométrica

Partiendo de la definición de equivalencia entre el grupo real y ficticio:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{x_i+h} = \sum_{j=1}^{\gamma} \overline{\mu}_{G_j+h}$$

Esta relación se satisface para todo ***h***, por lo que también debe satisfacerse para las sucesivas derivadas (son sumas de derivadas), al menos hasta orden γ:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{x_i+h} = \sum_{j=1}^{\gamma} \overline{\mu}_{G_j+h}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mu'_{x_i+h} = \sum_{j=1}^{\gamma} \overline{\mu}'_{G_j+h}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mu''_{x_i+h} = \sum_{j=1}^{\gamma} \overline{\mu}''_{G_j+h}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mu^{(\gamma)}_{x_i+h} = \sum_{j=1}^{\gamma} \overline{\mu}^{(\gamma)}_{G_j+h}$$

Además como dichas relaciones se cumplen para todo ***h***, supuesto que ***h=0***, queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \dots\dots + \mu_{x_n} = \bar{\mu}_{G_1} + \bar{\mu}_{G_2} + \dots\dots + \bar{\mu}_{G_\gamma} \\
&\mu'_{x_1} + \mu'_{x_2} + \dots\dots + \mu'_{x_n} = \bar{\mu}'_{G_1} + \bar{\mu}'_{G_2} + \dots\dots + \bar{\mu}'_{G_\gamma} \\
&\mu''_{x_1} + \mu''_{x_2} + \dots\dots + \mu''_{x_n} = \bar{\mu}''_{G_1} + \bar{\mu}''_{G_2} + \dots\dots + \bar{\mu}''_{G_\gamma} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\mu_{x_1}^{(\gamma)} + \mu_{x_2}^{(\gamma)} + \dots\dots + \mu_{x_n}^{(\gamma)} = \bar{\mu}_{G_1}^{(\gamma)} + \bar{\mu}_{G_2}^{(\gamma)} + \dots\dots + \bar{\mu}_{G_\gamma}^{(\gamma)}
\end{aligned}
$$

En este sistema se advierte que existen ***γ*** incógnitas, que serán precisamente los actuarianos del grupo ficticio, pero hay ***γ+1*** ecuaciones. Por tanto, debe existir una relación de dependencia funcional entre los primeros miembros del sistema, y esto implica que el rango de la matriz jacobiana del sistema no sea mayor que ***γ***:

$$
\Im = \begin{pmatrix} \mu'_{x_1} & \mu'_{x_2} & \cdots & \mu'_{x_n} \\ \mu''_{x_1} & \mu''_{x_2} & \cdots & \mu''_{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{x_1}^{(\gamma+1)} & \mu_{x_2}^{(\gamma+1)} & \cdots & \mu_{x_n}^{(\gamma+1)} \end{pmatrix} \to \textit{\textbf{rango}}(\Im) \le \gamma
$$

Es decir, existirán más filas (***γ + 1***) que el rango:

$$
A_0 \begin{pmatrix} \mu'_{x_1} \\ \vdots \\ \mu'_{x_n} \end{pmatrix} + \dots\dots + A_\gamma \begin{pmatrix} \mu_{x_1}^{(\gamma+1)} \\ \vdots \\ \mu_{x_n}^{(\gamma+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Por tanto, lo anterior se debe cumplir para cualquier grupo de x_i:

$$
A_0 \mu'_x + A_1 \mu''_x + \dots\dots + A_\gamma \mu_x^{(\gamma+1)} = 0
$$

En definitiva, **lo que define a una estructura de orden *γ* es que sus μ_{x_i} son solución de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes homogénea de orden *γ + 1*.**

Por ejemplo, suponiendo una estructura de orden 1, tal que ***γ = 1***:

$$
A_0 \mu'_x + A_1 \mu''_x = 0
$$

El polinomio característico y sus raíces:

$$A_0 r + A_1 r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = -\dfrac{A_0}{A_1} \end{array}$$

Por tanto, se obtienen dos posibles casos:

▫ *Raíz doble* ***r = 0***, lo cual ocurre cuando $A_0 = 0$

$$\mu_x = A + Bx$$

En este caso, aparece la *2ª ley de Dovmoy.*

▫ *Raíces distintas* $\boldsymbol{r_1 = 0}$, $\boldsymbol{r_2 \neq 0}$:

$$\mu_x = A + Be^{-\frac{A_0}{A_1}x}$$

En este caso, aparece la *1ª ley de Makeham*.

Se observa que es muy interesante poder ajustar el comportamiento de un grupo grande a través de una ley conocida, que es la que seguiría el individuo representativo.

Si se supone una estructura de orden cero, tal que $\boldsymbol{y = 0}$:

$$A_0 \mu'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_x = A_0 = K$$

En este caso no se necesita ningún *actuariano* para definir este grupo, es decir, no es necesario conocer las edades de los individuos para definir dicha estructura.

Este caso se corresponde con la *1ª ley de Dovmoy*, por lo que se observa que por independencia y homogeneidad, ahora la probabilidad de supervivencia conjunta puede escribirse:

$${}_t p_{x_1, x_2, \ldots, x_n} = \prod_{i=1}^{n} {}_t p_{x_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{-kt} = e^{-nkt}$$

Se ejemplifica ahora una estructura de orden dos, es decir, tal que ***γ* = 2**:

$$A_0\mu'_x + A_1\mu''_x + A_2\mu'''_x = 0$$

El tanto instantáneo de mortalidad viene dado por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes homogénea de orden 3. Obteniendo el polinomio característico, y sus raíces:

$$A_0 r + A_1 r^2 + A_2 r^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0, \quad r_2, \quad r_3$$

Se tienen *cuatro* casos posibles:

▫ *Raíz triple* $r_1 = r_2 = r_3 = 0$

En este caso, el tanto instantáneo tendrá la forma: $\mu_x = A + Bx + Cx^2$, lo cual se corresponde como sabemos con la *3ª ley de Dovmoy*.

▫ *Raíz doble* $r_1 = r_2 = 0$, *y* $r_3 \neq 0$

En este caso, el tanto instantáneo tendrá la forma: $\mu_x = A + Bx + Ce^{r_3 x}$, lo cual se corresponde con la *2ª ley de Makeham*.

▫ $r_1 = 0$, *y raíz doble* $r_2 = r_3 \neq 0$

En este caso, el tanto instantáneo tendrá la forma: $\mu_x = A + (B + Cx)e^{r_2 x}$, lo cual se corresponde con la *ley de Risser*.

▫ *Raíces distintas* $r_1 = 0$, *y* $r_2 \neq 0$, $r_3 \neq 0$

En este caso, el tanto instantáneo tendrá la forma $\mu_x = A + Be^{r_2 x} + Ce^{r_3 x}$, lo cual se corresponde con la *ley de Lazarus*.

<u>Edades de los actuarianos en función de las edades del de los componentes del grupo real</u>

Suponiendo que el tanto equivalente del grupo ficticio es *proporcional* al del grupo real, tal que:

$$\gamma \cdot \overline{\mu}_{G=x} = n \cdot \mu_x \quad \Rightarrow \quad \overline{\mu}_{G=x} = \frac{n}{\gamma} \cdot \mu_x$$

Y partiendo de la relación de equivalencia para todo ***h***, y en concreto para ***h = 0***:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{x_i} = \sum_{j=1}^{\gamma} \overline{\mu}_{G_j} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_{x_i} = \frac{n}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} \mu_{G_j} \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{x_i}}{n} = \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{\mu_{G_j}}{\gamma}$$

- Para el caso de ***γ=1*** en el cual sólo hay una cabeza (su comportamiento con respecto al grupo real es el mismo), estaremos ante la *2ª ley de Dovmoy* (cuando ambas raíces son cero):

$$\mu_x = A + Bx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{x_i}}{n} = \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{\mu_{G_j}}{1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{(A + Bx_i)}{n} = \frac{(A + BG)}{1}$$

$$A + B\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = A + BG$$

$$G = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

Es decir, la edad del único actuariano será es la media de las edades de los componentes del grupo real.

- Para el caso de la *3ª ley de Dovmoy*, se tiene una estructura de orden 2 (es decir ***γ=2***), y el tanto instantáneo de mortalidad viene dado por:

$$\mu_x = A + Bx + Cx^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{x_i}}{n}=\frac{\mu_{G_1}+\mu_{G_2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{(A+Bx_i+Cx_i^2)}{n}=\frac{(A+BG_1+CG_1^2)}{2}+\frac{(A+BG_2+CG_2^2)}{2}$$

$$A+B\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}+C\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n}=A+B\cdot\frac{G_1+G_2}{2}+C\cdot\frac{G_1^2+G_2^2}{2}$$

$\dfrac{G_1+G_2}{2}=\overline{x} \quad \rightarrow$ media de las edades del grupo de actuarianos

$\dfrac{G_1^2+G_2^2}{2}=a_2 \quad \rightarrow$ media de los cuadrados, es el momento de 2 respecto al origen

Quedando un sistema:

$$\begin{aligned} G_1+G_2&=2\overline{x} \\ G_1^2+G_2^2&=2a_2 \end{aligned}$$ elevándolos al cuadrado arriba y multiplicando por 2 abajo:

$$\left.\begin{aligned} G_1^2+G_2^2+2G_1G_2&=4\overline{x}^2 \\ 2G_1^2+2G_2^2&=4a_2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ restando el 1º con el 2º $G_1^2+G_2^2-2G_1G_2=4(a_2-\overline{x}^2)$

Esto puede reescribirse como: $(G_1-G_2)^2=4s_x^2$ donde s_x^2 es la varianza:

$$s_x^2=m_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x})^2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n}-\overline{x}^2=a_2-a_1^2$$

Igualmente, puede observarse que como:

$$\sqrt{(G_1-G_2)^2}=\sqrt{4s_x^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_1+G_2=2\overline{x} \\ G_1-G_2=2s_x \end{cases}$$

Se pueden escribir las edades de los actuarianos en función de la media la varianza:

$G_1=(\overline{x}+s_x) \qquad G_2=(\overline{x}-s_x)$

Otro caso que se puede analizar con facilidad es el caso en el cual ***y=1***, pero con raíces distintas:

$$\mu_x = A + Be^{r_2 x}$$

Es decir, la *2ª ley de Makeham*, por lo que se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(A+Be^{rx_i})}{n} = \frac{A+Be^{rG}}{1} \quad \Rightarrow \quad A + B\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{rx_i}}{n} = A + Be^{rG} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{rx_i}}{n} = e^{rG}$$

Aplicando logaritmos:

$$\ln \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{rx_i}}{n} = \ln e^{rG} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{1}{r}\left(\ln \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{rx_i}}{n} \right)$$

Obteniendo la expresión para estimar la edad del actuariano del grupo ficticio, en función de las edades del grupo real.

Funciones biométricas

Se define la variable ℓ_x como el número esperado de personas supervivientes pasados **x** años.

Si llamamos ς a la variable aleatoria que mide el número de supervivientes a la edad **x**, se tiene que:

$$\ell_x = E(\varsigma_x) = \ell_0(1 - F(x)) = \ell_0 \cdot P(\varsigma > x) = \ell_0 \cdot {}_x p_0$$

Definiendo igualmente d_x como el número esperado de fallecidos a la edad **x**:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \underline{año\ 1} & \underline{año\ 2} & \cdots & \underline{año\ s} \\
0 & d_0^1 & d_0^2 & \cdots & d_0^s \\
1 & d_1^1 & d_1^2 & \cdots & d_1^s \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x & d_x^1 & d_x^2 & \cdots & d_x^s \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\omega & d_\omega^1 & d_\omega^2 & \cdots & d_\omega^s
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
d_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} d_0^i}{s} \\
\vdots \\
d_x = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} d_x^i}{s} \\
\vdots \\
d_\omega = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} d_\omega^i}{s}
\end{array}
$$

Para calcular las probabilidades de supervivencia y de muerte, se pueden usar estas dos magnitudes que se escriben en función de los datos de la cohorte.

Tanto de supervivencia y tanto de mortalidad.

Los tantos de mortalidad y supervivencia en la estadística actuarial se refieren a las probabilidades de fallecer antes de un año desde la edad x o sobrevivir un año más a la edad x.

Para cada edad existe una probabilidad de sobrevivir a un año más o fallecer antes de ese año. Por tanto, para cada edad existe una distribución binomial que describe la probabilidad de fallecer y la probabilidad de sobrevivir a un año más. Ambas probabilidades son complementarias y recogen todo el espacio probabilístico por tanto sus valores sumarán 1.

Existe también el estudio que describe la muerte por diversas causas o la eliminación del colectivo. En dicho caso la probabilidad de fallecer o desaparecer antes de un año aparece como un conjunto de probabilidades mutuamente excluyentes cuya suma es igual al tanto de fallecimiento (o desaparición) por cualquier causa. En dicho caso la distribución es una multinomial.

Si se ponen en función de la cohorte, los tantos de supervivencia y mortalidad a la edad x se definen como sigue:

El **tanto de mortalidad** es la forma de denotar la **probabilidad de muerte (desaparición, eliminación, salir del grupo)** de un individuo (cabeza, elemento, población) en un determinado período de tiempo t cuando t=1 año.

Notación y Fórmula:

- El tanto de mortalidad se denota generalmente como $q_x$que es la **probabilidad de que una persona de edad x** muera antes de alcanzar la edad x+1.

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Donde:

- d_x es el número de muertes ocurridas de edad x (que no alcanzan con vida la edad x+1)
- l_x es el número de personas vivas a la edad x al comienzo del intervalo.
- l_{x+1} es el número de supervivientes a la edad x+1

Si en lugar de un año se toma un intervalo cualquiera como t:

$${}_tq_x = \frac{d_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

Por tanto, los fallecidos a lo largo de un año serán por tanto (estimados):

$$d_x = \ell_x \cdot q_x$$

Puesto que hemos visto que $d_x = \ell_x - \ell_{x+1} \quad \Rightarrow \quad d_{x-1} = \ell_{x-1} - \ell_x \Rightarrow \quad \ell_x = \ell_{x-1} - d_{x-1}$

Tanto de Supervivencia

El **tanto de supervivencia** es la probabilidad de que una persona de una determinada edad **sobreviva** a la siguiente edad, es decir, la probabilidad de que una persona que ha llegado a la edad x continúe viva hasta la edad x+1.

Notación y Fórmula:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x$$

Donde:

- l_{x+1} es el número de supervivientes a la edad x+1
- l_x es el número de personas vivas a la edad x al comienzo del intervalo.

En el caso de que se valore en el intervalo t:

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - {}_tq_x$$

Función de supervivencia

El análisis de la supervivencia se basa en los tiempos de falla, los cuales provienen de una variable aleatoria NO NEGATIVA T, que representa la longitud de tiempo de vida futura o tiempo de supervivencia.

La variable T, viene caracterizada por cuatro funciones:

- función de supervivencia
- función de densidad de probabilidad

Estas funciones son matemáticamente equivalentes, conocida una se derivan las otras tres. La variable T, puede ser variable aleatoria continua o discreta, según el caso.

Función de supervivencia caso continuo.

La función que define el nombre del grupo determinista de supervivientes o de forma más abreviada, la cohorte, se trata de una función que describe el tamaño de un grupo de individuos nacidos en un mismo instante, desde su nacimiento hasta que el grupo se extingue.

Formalmente:

$$l\colon [0,\omega] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sus valores se designan por $l(x)\ o\ l_x$, siendo $l(0)$ o l_0 el tamaño inicial del grupo y por tanto $l(x)\ o\ l_x$ los supervivientes a la edad x.

Es una función no creciente (generalmente decreciente) ya que se admite que el grupo es cerrado y no se producen nuevas incorporaciones. Para su tratamiento matemático se acepta que es una función regular, continua y derivable.

Teniendo en cuenta que la cohorte es un grupo homogéneo, cada individuo de la misma se enfrenta a un experimento aleatorio que culmina con la muerte o supervivencia a la edad x.

Para ello se define una variable aleatoria T: Tiempo de vida hasta la muerte de modo que la función de supervivencia S(t), tanto en el caso continuo como en el discreto, se define como la probabilidad de que un individuo sobreviva más allá del tiempo t.

Para el caso continuo:

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F_T(t) = \int_t^{\infty} f_T(u)du$$

Esta función de supervivencia es el complementario de la función de distribución de T: tiempo de vida hasta la muerte (es la función de distribución de los fallecimientos).

$$S(t) = 1 - F_T(t)$$

$$-\frac{d}{dt}S(t) = f_T(t)$$

Las propiedades de S(t)son:

1.-Es monótona no creciente.

2.-S(t)=1 para t=0.

3.-S(t)=0 cuando t→∞.

La relación entre S(x) y $l(x)$ sería:

$$l(x) = E\big(L(x)\big) = \ l(0)\ s(x)$$

$$L(x) \dashrightarrow B(l(0), s(x))$$

Siendo $s(x)$ la función de densidad de $S(x)$

De modo que se puede tomar como estimación que:

$$\hat{s}(x) = \frac{l(x)}{l(0)}$$

Esto significa :

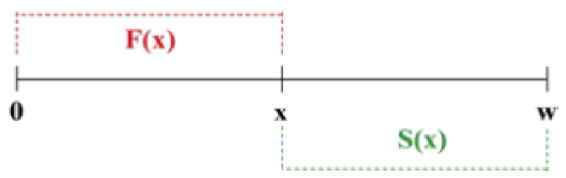
Es decreciente porque la probabilidad que un recién nacido llegue con vida a una determinada edad cae conforme se avanza en la edad.

La probabilidad que una persona fallezca después de nacer es 1

Si t tiende a infinito, es decir tiende a w, ninguna persona puede sobrevivir, la probabilidad de sobrevivir después de esa edad es cero.

La función S(t) es conocida también como la *tasa de supervivencia acumulativa*;

La función de distribución y de supervivencia se complementan.

	S(x) + F(x) = 1 S(x) = 1 – F (x) o F(x) = 1 – S(x)

Función de supervivencia caso discreto

Si T es una variable aleatoria discreta que toma valores $0< t_1 < t_2 <.....$ Entonces la función de probabilidad de Tes:

$$f(t) = \begin{cases} \mathbb{P}(T = t_j) & \text{si } t = t_j, j = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo que su función de supervivencia es:

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = \sum_{t<t_j} f(t_j)$$

Sus propiedades son las mismas que en el caso continuo.

Bibliografía

Ayuso, M. (2007). *Estadística actuarial vida* (Vol. 51). Edicions Universitat Barcelona.

Gil Fana, J. A., Antonio, A., & Vilar Zanón, J. L. (1999). *Matemática de los seguros de vida*. Fundación MAPFRE.

Morales, G. M. A. (1996). *Métodos estadísticos para actuarios*. Editorial Complutense.

López Cachero, M., & López de la Manzanara Barbero, J. (1996). *Estadísticas para actuarios*. Fundación MAPFRE.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 20. Probabilidad de muerte y supervivencia. Principales variables aleatorias. Función de supervivencia. Tanto instantáneo de mortalidad. Esperanza de vida

Edición noviembre 2025

Probabilidad de muerte y supervivencia.

Dada una cabeza de edad x, es seguro que en algún momento de su existencia, a una edad x+t, va a fallecer con una probabilidad q_{x+t} o va a sobrevivir con una probabilidad de p_{x+t}. Estas dos probabilidades conforman un modelo binomial de muerte/supervivencia.

Como probabilidades que son:

- $p_{x+t} + q_{x+t} = 1$ si se establece que la única causa de "salida" es el fallecimiento (existen modelos multidecrementales pero no es objeto de este tema)
- $0 \leq q_{x+t} \leq 1$ y $0 \leq p_{x+t} \leq 1$
- $q_{x+t} = 1$ cuando $x + t = \omega$ y $p_{x+t} = 1$ cuando $x + t = 0$ dado que el espacio probabilístico se define en $(0, \omega)$

En contraposición a otro tipo de fenómenos aleatorios, la característica principal que sigue a los fenómenos sobre la vida es que se sabe con seguridad que el fenómeno va a ocurrir y la aleatoriedad se encuentra en el desconocimiento del *Cuándo* va a ocurrir.

Para poder realizar un estudio de este fenómeno aleatorio que va a representar el fallecimiento o no de una cabeza, se requiere previamente de la definición de un conjunto de variables aleatorias.

Principales variables aleatorias.

El estudio de las variables biométricas es más sencillo cuando se supone que éstas tienen un carácter **continuo** (como el tiempo que la sostiene). Sin embargo, los datos históricos con los que se cuenta suministran la información en edades completas, por lo que generalmente se trabaja bajo el prisma de una descripción **discreta** de esta variable. Las soluciones a las que se llegan bajo una y otra concepción son ligeramente diferentes.

<u>Edad de fallecimiento de un individuo recién nacido</u>.

La variable biométrica básica es la que se define como **<u>edad de fallecimiento</u>**, y se adscribe a un individuo genérico.

Es una variable aleatoria definida en el intervalo (0, ∞), si bien en las construcciones prácticas se suele utilizar un infinito llamado actuarial, una edad límite que se nota por ω, por lo que el campo de variación de X queda (0, ω).

Su función de distribución es F(x) de modo que F(0)=1 y F(ω)=0.

Se define como F(x) la función de distribución de la probabilidad de muerte de un individuo de edad 0 (acaba de nacer).

Así sea ξ la variable aleatoria "Edad de muerte de un individuo (cabeza, elemento)" que toma valores x medidos en años, su dominio será:

- x=0,1,2,... ω-t si se toman edades enteras y por tanto se considera la variable como discreta (siendo ω la edad límite y t el intervalo de tiempo vivido antes de fallecer)

- o bien $x \in (0, \omega)$ si se toma la edad de muerte como una variable continua.

Función de distribución de la variable aleatoria edad para un recién nacido

$$F(x) = P[X < x], \text{ para } x \geq 0.$$

Que tiene las mismas propiedades que toda función de distribución:

- $F(0) = 0$
- $F(\infty) = 1$ o $F(w) = 1$
- $F(x)$ es una función no decreciente y continua por la derecha.

A partir de la función de distribución se puede obtener la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

Pudiendo estudiar que un individuo recién nacido fallezca entre la edad x y la edad x+t, es decir, en un intervalo.

$$P(x < X \leq x+t) = P(X \leq x+t) - P(X \leq x) = F(x+t) - F(x)$$

$$P(x < X < x+t) = \int_x^{x+t} f(y)dy = F(x+t) - F(x)$$

Vida residual o tiempo de vida hasta la muerte

Sin embargo en la mayoría de las ocasiones se quiere estudiar la probabilidad de sobrevivir o morir de individuos genéricos que ya tienen cumplida una edad x, es por ello que se hace necesaria otra variable biométrica básica, la que se denomina **Vida residual o tiempo de vida hasta la muerte** , esto es, la edad de fallecimiento de un individuo de edad x (ya ha sobrevivido a la edad x y por tanto su distribución es la truncada en x de la anterior).

Edad de muerte de un individuo de edad x

La edad de muerte de un individuo (elemento o grupo) es una variable aleatoria. Se conoce la ocurrencia del suceso fallecimiento, pero se desconoce cuándo va a ocurrir éste. Su estudio se basa por tanto en la estadística y en las probabilidades de fallecimiento a una edad x o en un intervalo de tiempo x+t, o complementariamente, la supervivencia a dicha edad o intervalo.

Cuando se estudia la probabilidad de fallecer de un individuo que ya tienen cumplida cierta edad x se está ante una nueva variable que se define como:

$$T_x$$

- Si es discreta, se habla de los **años que le quedan por vivir** a un individuo de edad x (en edades enteras) sus valores serán k=0,1,.. ω-x-1
- Si es continua, se habla de **tiempo de vida hasta la muerte** o tiempo que le queda por vivir a un individuo de edad x (vida residual). Sus valores son $t\epsilon(0, \omega - x)$

Tanto k como t empiezan en 0 porque son los años o el tiempo que queda por vivir a partir de la edad x.

En este caso la nueva variable T_x está condicionada a la edad x ya alcanzada por el individuo, la función de probabilidad está truncada en dicho punto. Como T es una función que depende de t (o de k) generalizando se tiene:

$$G_x(t) = {}_tq_x = \frac{P(x < X \leq x + t)}{P(X > x)} = \frac{F(x + t) - F(x)}{1 - F(x)} = P((X \leq x + t)|(X > x))$$

Para 0<t<∞ o bien 0<k<w.

Y se define como la probabilidad temporal de fallecimiento de una cabeza: probabilidad de que una cabeza de edad x muera a la edad x+t (no alcance con vida la edad x+k+1 en el caso discreto), esto es, es una probabilidad de muerte condicionada a que la cabeza ya ha alcanzado la edad x.

Su función de densidad es la derivada respecto de t (o de k):

$$g_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} G_x(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)}$$

Como se puede observar está truncada por la función de supervivencia 1-F(x)=S(x), por lo que también se puede escribir como:

$$G_x(t) = \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)} = {}_tq_x$$

Actuarialmente se define como ${}_tq_x$ probabilidad de que un individuo de edad x fallezca antes de cumplir la edad x+t. Complementariamente ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$, se denota como ${}_tp_x$ a la probabilidad de que un individuo de edad x alcance con vida (sobreviva) la edad x+t.

Probabilidades diferidas de fallecimiento

$$_{t/k}q_x = {}_{t+k}q_x + {}_{k}p_x \cdot {}_{t}q_x = {}_{t}p_x \cdot {}_{k}q_{x+k} = {}_{t}p_x - {}_{t+k}p_x$$

Se trata de la probabilidad de que una cabeza de x años sobreviva x+t años y muera antes de cumplir x+t+k (entre x+t y x+t+k).

Función de supervivencia

El análisis de la supervivencia se basa en los tiempos de falla, los cuales provienen de una variable aleatoria NO NEGATIVA, que representa la longitud de tiempo de vida futura o tiempo de supervivencia.

La variable T, viene caracterizada por cuatro funciones:

- función de supervivencia
- función de densidad de probabilidad

Estas funciones son matemáticamente equivalentes, conocida una se derivan las otras tres. La variable T, puede ser variable aleatoria continua o discreta, según el caso.

Función de supervivencia caso continuo.

La función que define el nombre del grupo determinista de supervivientes o de forma más abreviada, la cohorte, se trata de una función que describe el tamaño de un grupo de individuos nacidos en un mismo instante, desde su nacimiento hasta que el grupo se extingue.

Formalmente:

$$l: [0, \omega] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sus valores se designan por $l(x)$ o l_x, siendo $l(0)$ o l_0 el tamaño inicial del grupo y por tanto $l(x)$ o l_x los supervivientes a la edad x.

Es una función no creciente (generalmente decreciente) ya que se admite que el grupo es cerrado y no se producen nuevas incorporaciones. Para su tratamiento matemático se acepta que es una función regular, continua y derivable.

Teniendo en cuenta que la cohorte es un grupo homogéneo, cada individuo de la misma se enfrenta a un experimento aleatorio que culmina con la muerte o supervivencia a la edad x.

Para ello se define una variable aleatoria **T: Tiempo de vida hasta la muerte** de modo que la función de supervivencia S(t), tanto en el caso continuo como en el discreto, se define como la probabilidad de que un individuo sobreviva más allá del tiempo t(es por tanto la complementaria a su función de distribución, la función de supervivencia en el sentido estadístico del término).

Para el caso continuo:

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F_T(t) = \int_t^{\infty} f_T(u)du$$

Esta función de supervivencia es el complementario de la función de distribución de T: tiempo de vida hasta la muerte (es la función de distribución de los fallecimientos).

$$S(t) = 1 - F_T(t)$$

$$-\frac{d}{dt}S(t) = f_T(t)$$

Las propiedades de S(t)son:

1.-Es monótona no creciente.

2.-S(t)=1 para t=0.

3.-S(t)=0 cuando t→∞.

La relación entre S(x) y $l(x)$ sería:

$$l(x) = E\big(L(x)\big) = \ l(0)\ s(x)$$

$$L(x) -\!\!\rightarrow B(l(0), s(x))$$

Siendo $s(x)$ la función de densidad de $S(x)$

De modo que se puede tomar como estimación que:

$$\hat{s}(x) = \frac{l(x)}{l(0)}$$

Esto significa :

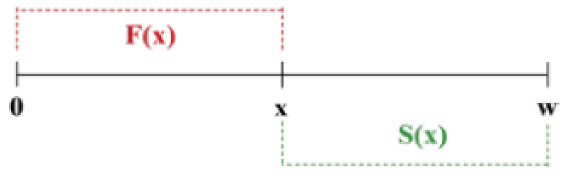
Es decreciente porque la probabilidad que un recién nacido llegue con vida a una determinada edad cae conforme se avanza en la edad.

La probabilidad que una persona fallezca después de nacer es 1

Si t tiende a infinito, es decir tiende a w, ninguna persona puede sobrevivir, la probabilidad de sobrevivir después de esa edad es cero.

La función S(t) es conocida también como la *tasa de supervivencia acumulativa*;

La función de distribución y de supervivencia se complementan.

	S(x) + F(x) = 1 S(x) = 1 – F (x) o F(x) = 1 – S(x)

Función de supervivencia caso discreto

Si T es una variable aleatoria discreta que toma valores 0< t_1 < t_2 <..... Entonces la función de probabilidad de Tes:

$$f(t) = \begin{cases} \mathbb{P}(T = t_j) & \text{si } t = t_j, j = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo que su función de supervivencia es:

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t) = \sum_{t<t_j} f(t_j)$$

Sus propiedades son las mismas que en el caso continuo.

Al igual que se ha observado la probabilidad temporal de fallecimiento, existe la probabilidad temporal de supervivencia, que se define como:

$$_tp_x = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} = \frac{1 - F(x + t)}{1 - F(x)} = \frac{S(x + t)}{S(x)} = P((X > x + t)|(X > x))$$

La relación entre las probabilidades temporales de supervivencia para un año entero y las temporales en un año se relacionan mediante la siguiente igualdad:

$$_tp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots \cdot p_{x+n} = \prod_{i=0}^{t} p_{x+i}$$

Esto es, la probabilidad de sobrevivir un número entero de años a la edad x hasta la edad x+t es el producto de la probabilidad de sobrevivir a cada una de las edades subsiguientes.

Escindibilidad

Lo anterior se puede generalizar, de forma que:

$$ {}_{t}p_x = {}_{k}p_x \cdot {}_{t-k}p_{x+k} $$

No ocurre igual con las probabilidades de muerte:

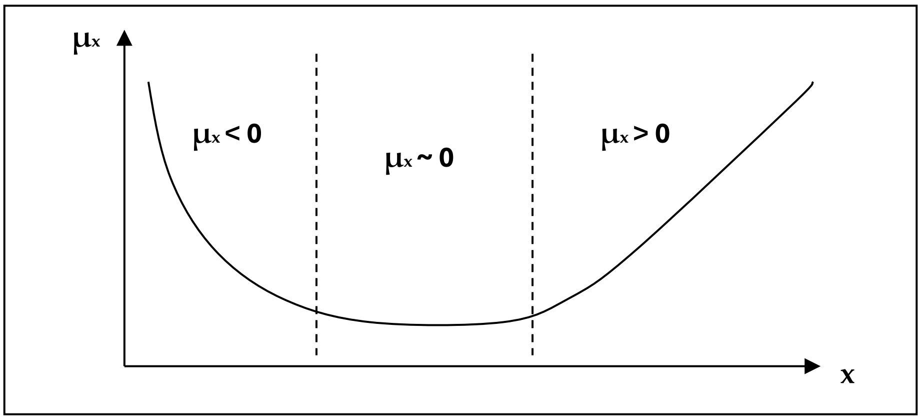
$$ {}_{t}q_x = {}_{k}q_x + {}_{k}p_x \cdot {}_{(t-k)}q_{x+k} $$

Tanto instantáneo de mortalidad.

Se define el tanto instantáneo de mortalidad μ_x como la probabilidad condicionada de morirse después de un instante **h → 0** en adelante, y por tanto se asocia con la velocidad de muerte, pero condicionada a llegar a dicha edad **x**. Por tanto:

$$ \mu_x = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} $$

Normalmente, dicho μ_x suele comportarse según la siguiente gráfica, atendiendo a los distintos valores de **x**:



¿Como se puede representar la velocidad μ_x a partir de las probabilidades anteriores?

$$\int \mu_x dx = \int \frac{F'(x)}{1-F(x)} dx$$

$$\int \mu_x dx = -\ln(1-F(x)) + \ln \underset{K}{A}$$

$$-\int \mu_x dx = \ln\left(\frac{1-F(x)}{A}\right)$$

$$e^{-\int \mu_x dx} = \left(\frac{1-F(x)}{A}\right) \quad \Rightarrow \quad 1-F(x) = Ae^{-\int \mu_x dx}$$

Aplicando la condición **F(0) = 0 → 1 – F(0) = 1 →** $A = e^{(\int \mu_x dx)_{x=0}}$ se obtiene:

$$1-F(x) = e^{-\int_0^x \mu_s ds} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1-e^{-\int_0^x \mu_s ds}$$

Con ello, se pueden obtener las probabilidades buscadas:

$$_h p_x = \frac{1-F(x+h)}{1-F(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+h} \mu_s ds}}{e^{-\int_0^x \mu_s ds}} = e^{-\int_x^{x+h} \mu_s ds} \quad \Rightarrow \quad _h q_x = 1-e^{-\int_x^{x+h} \mu_s ds}$$

$$_t q_x = \ _t p_x\, \mu(x+t)$$

Esperanza de vida

La esperanza de vida es la magnitud que resulta de estudiar el valor esperado de la variable "edad de muerte" (esperanza de vida al nacer) o el valor esperado de la variable "Tiempo de vida hasta la muerte" (vida residual).

Como esperanza matemática que es se define:

$$\bar{e}_x = E\big(T(x)\big)$$

Donde $T(x) = X - x$

$$\bar{e}_x = E\big(T(x)\big) = \int_0^{w-x} t \cdot g_x(t) dt = \int_0^{w-x} t \cdot {}_t p_x \cdot \mu(x+t) dt$$

Que se puede poner en función de los datos de la cohorte como:

$$\bar{e}_x = E\big(T(x)\big) = \int_0^{w-x} t \cdot \left(-\frac{l^{\prime}(x+t)}{l(x)}\right) dt = \frac{1}{l(x)} \int_0^{w-x} t \cdot l^{\prime}(x+t)\, dt = \int_0^{w-x} {}_t p_x dt$$

Para el caso continuo.

En el caso discreto y bajo la hipótesis de uniformidad de fallecimientos a lo largo del año se tiene,

Vida media completa (esperanza de vida completa)

$$\dot{e}_x = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{w-x} {}_t p_x$$

Vida media abreviada (Esperanza de vida abreviada)

Que es el número de años completos que vive un individuo de edad x antes de fallecer (esto es, la parte entera de la variable T(x))

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x$$

Bibliografía

Ayuso, M. (2007). *Estadística actuarial vida* (Vol. 51). Edicions Universitat Barcelona.

Gil Fana, J. A., Antonio, A., & Vilar Zanón, J. L. (1999). *Matemática de los seguros de vida*. Fundación MAPFRE.

Morales, G. M. A. (1996). *Métodos estadísticos para actuarios*. Editorial Complutense.

López Cachero, M., & López de la Manzanara Barbero, J. (1996). *Estadísticas para actuarios*. Fundación MAPFRE.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 21. Teoría de la supervivencia. Distintos modelos de población: Malthusiana, estable y estacionaria. Funciones biométricas asociadas a la supervivencia.

Edición Julio 2025

1. Introducción

Los fenómenos actuariales se presentan como fenómenos aleatorios (conocemos todos sus posibles resultados, pero no el que va a concretarse) con consecuencias económicas. Se entiende entonces el riesgo como la probabilidad de que se den dichas consecuencias, cuya aleatoriedad se presenta en:

- Duración: Se sabe que va a ocurrir, pero se desconoce cuándo. Las probabilidades serán del tipo $p(\xi>x)$, es decir, estudiaremos las funciones de supervivencia.
- Ocurrencia: Se desconoce si ocurrirá; nos encontramos, así, ante modelos dicotómicos.
- Cantidad: Se desconoce el número de veces que acontecerá. Trabajamos con modelos de conteo.
- Cuantía: Una vez acontecido, desconocemos con qué intensidad se manifestará, o cuánto importe supondrá. Normalmente, trabajaremos con modelos de distribución continua positiva.

2. Teoría de la supervivencia

La cuestión que trata de modelizar la teoría de la supervivencia es, precisamente, la duración, en tanto que estudia diversos aspectos sobre la vida (generalmente, humana, si bien se puede extender a otros campos en tanto sean elementos sujetos a envejecimiento).

La indeterminación del momento se refiere a:

- Tiempo físico: época en que ocurre.
- Tiempo biométrico: en función de la edad del individuo cuando ocurre. Si consideramos solo este tiempo biométrico, decimos que trabajamos bajo hipótesis de estacionariedad.

El problema de la supervivencia humana puede tratarse:

- En sentido estricto: Analizaremos el fenómeno de la mortalidad, de la duración de la vida o de duración de la vida después de un momento dado (supervivencia después de haber alcanzado cierta edad). Este fenómeno de mortalidad o fallecimiento es cierto en su acaecimiento pero aleatorio en cuanto a su localización en el tiempo biométrico. Trabajaremos con las variables ξ, η_x, K_x.
- En sentido amplio: Se analiza el fenómeno del individuo vivo en una condición o estado (actividad laboral, estado civil, incapacidad, etcétera).

Los individuos no se estudian por separado, sino como parte de los colectivos a los que pertenecen, de modo que llevaremos a cabo estudios:

- Por generación (cohortes);
- Por territorios;
- Por actividad profesional;

- Por sexo;
- Y un largo etcétera.

El colectivo a que pertenezcan los individuos puede ser:

- Abierto: Se consideran entradas y salidas al/desde el mismo (se consideran movimientos migratorios); o cerrado: En caso contrario, no se consideran entradas y salidas distintas de las que definen el colectivo, es decir, se puede salir del colectivo por fallecimiento o por alcanzar una determinada edad, pero no por otros motivos.
- Homogéneo: Poca variabilidad respecto de una o varias características (edad, territorio); o heterogéneo: Mucha variabilidad respecto a diversas características.

Si consideramos que el colectivo es homogéneo, estudiamos a la población con el modelo biométrico, añadiendo las hipótesis de independencia y estacionariedad; veamos a qué se refieren las hipótesis del modelo biométrico cuando analizamos la supervivencia de un colectivo:

- Homogeneidad: los individuos componentes del grupo son equivalentes entre sí respecto de la mortalidad;
- Independencia: La probabilidad de muerte/supervivencia de un elemento de la población no viene condicionada por la probabilidad de supervivencia o muerte de otro elemento de la población.
- Estacionariedad: La supervivencia depende únicamente de la edad (tiempo biométrico).

Si consideramos un colectivo heterogéneo, estudiamos la población como un todo bajo lo que conocemos como Modelos de la Población.

3. Distintos modelos de población: Malthusiana, estable y estacionaria.

Dentro de la demografía, el estudio del crecimiento de la población ocupa un lugar destacado. Se presentan, a continuación, distintos modelos de población que tratan de dar forma a la previsión del crecimiento de esta.

Población Malthusiana

Malthus propone un crecimiento exponencial de la población:

$$P(t) = P(0) * e^{rt}$$

Donde:

- P(t): Población en el momento t (trabajando en un intervalo [0, t]
- P(0): Población en el momento 0
- r: tasa de crecimiento, que en este modelo se estima constante. Siendo esta tasa calculada como la diferencia entre la tasa de nacimientos y la tasa de defunciones

($r(t) = n(t) - d(t)$), si lo estimamos constante en el tiempo ($r = n - d$), estamos diciendo que los nacimientos y fallecimientos son independientes de la época en que se viva (cuando en la realidad no lo son: baby boom, incorporación de la mujer al trabajo, mejoras sanitarias...). En caso de considerar una población abierta, bajo este modelo se considera, también, que las tasas de emigración e inmigración son independientes de t.

Así, la población crece si r>0, decrece si r<0, y se mantiene si r=0.

Malthus era pesimista, porque establece un crecimiento poblacional geométrico, mientras que lo establece aritmético para la producción de alimentos. Es lo que se conoce como la catástrofe malthusiana.

El principal inconveniente de este modelo radica en que no se consideran factores como las tasas variables de natalidad y mortalidad, la estructura de la población (su envejecimiento), los movimientos migratorios, las epidemias, desastres naturales... Sin embargo, sigue siendo de interés para el estudio de pequeñas poblaciones durante períodos cortos de tiempo (no es realista su aplicación para períodos largos porque el crecimiento de la población sería explosivo si r>0 o llevaría a la extinción si r<0).

Población estable

Este modelo parte del modelo anterior, con fecundidad y mortalidad invariantes. En este caso, solo se considera a la población femenina.

Definamos:

- N(t): densidad de nacimientos femeninos en t
- P(x): Probabilidad que tiene una mujer de edad x de sobrevivir al período t

Así, la densidad de mujeres de edad x en t:

$$P_{x,t} = N(t-x) * P(x)$$

Interpretándose N(t-x) como las mujeres que nacen y llegan a una edad x en t.

Si tenemos en cuenta, además, la población según el modelo malthusiano:

$$N(t) = N(0) * e^{rt}$$

Entonces:

$$N(t-x) = N(0) * e^{r(t-x)} = N(0) * e^{rt} * e^{-rx} = N(t) * e^{-rx}$$

Ahora, vamos a tratar de llegar a la ecuación característica o de Lotka:

Definimos los nacimientos de mujeres en el momento t como:

$$N(t) = \int_{\alpha}^{\beta} N(t-x) * P(x) * f(x)\, dx$$

Siendo:

- x: edad;
- N(t): tasa natalidad;
- P(x): proporción de supervivientes a la edad x;
- [α , β]: el intervalo intergenésico general: 15 a 49 años (límites del intervalo de edad fértil);
- f(x): tasa de fecundidad específica instantánea para la edad x. Se calcula como:

$$f(x) = \frac{número\ de\ hijos\ de\ madres\ de\ edad\ x}{número\ de\ mujeres\ de\ edad\ x}$$

Sustituyendo:

$$N(t) = \int_{\alpha}^{\beta} N(t) * e^{-rx} * P(x) * f(x)\, dx$$

Despejando:

$$\frac{N(t)}{N(t)} = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-rx} * P(x) * f(x)\, dx = 1$$

Esta es la que conocemos como ecuación característica o de Lotka; siempre existirá una raíz única y real de r (tasa de crecimiento) para cualquier esquema de mortalidad y fecundidad.

Teorema de Lotka

Cualquier población de mujeres tales que sus funciones de fecundidad y mortalidad permanezcan constantes en el tiempo a partir de un momento, tienden hacia una población estable, sin depender de la estructura inicial de edad.

Se demuestra fácilmente observando cómo, en el límite, una población así converge a una exponencial y, por tanto, si f(x) y la mortalidad son constantes, la población converge a la estabilidad, no dependiendo de la estructura inicial de la edad.

Población cuasi-estable

Se trata de un caso particular en que la fecundidad es constante, y la mortalidad es variable pero decreciente.

Población estacionaria

La población total es constante para cualquier momento t, de modo que P(t)=P(0). Esto es porque los nacimientos son iguales a las defunciones, manteniéndose también la composición de sexo y edad.

Decimos, entonces, que:

- La densidad instantánea de nacimientos es constante: N(t)=N
- El esquema de mortalidad es invariante en el tiempo: P(x,t)=P(x)

- La fuerza de mortalidad $\mu_{(x,t)}=\mu_{(x)}$
- Las probabilidades de muerte a cada edad dependen solo de la edad (tiempo biométrico), y no del momento o época (tiempo físico) → $q_{x,t}=q_x$
- Las tasas brutas de mortalidad y natalidad son constantes e iguales:

$$r(t) = n(t) - d(t)$$

$r = n - d$ por malthusiana

$n = d$ por estacionaria

$$r = 0$$

P(t)=P(0)

4. Funciones biométricas asociadas a la supervivencia

Desarrolladas en otros temas:

- Variables: ξ, η_x, K_x
- Funciones: $F_{\xi}(x)$, $F\eta_x(z)$, $S(x)$
- Tantos: ${}_hP_x$, ${}_hq_x$, h/q_x

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 22. Modelos matemáticos de la función de supervivencia: La función de De Moivre, Leyes de Makeham, Gompertz, y otras.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

A lo largo de este tema vamos a desarrollar distintos modelos de comportamiento aleatorio de las funciones biométricas. En cada caso, el modelo propone una forma funcional para la función de supervivencia y el tanto instantáneo de mortalidad.

La razón e interés de la construcción, diseño y estudio de los modelos de supervivencia pivota sobre dos ámbitos: uno metodológico y otro práctico:

- Metodológicamente, la consideración de algunas hipótesis sobre los fenómenos biométricos conlleva una estructura funcional de alguna de las funciones biométricas.
- En el ámbito práctico, una vez seleccionado un modelo que implica una forma funcional para una determinada función biométrica, esta dependerá de unos pocos parámetros (dos o tres) y, una vez determinados estos (generalmente, estimados estadísticamente), la obtención de cualquier incógnita biométrica se convierte en un simple problema de cálculo.

Antes de introducirnos en los distintos modelos, hay que tener en cuenta finalmente que, aunque los estudiaremos separadamente, en la práctica suelen formarse muchas veces de forma combinada, aplicando un modelo distinto a distintos tramos de edad.

2. La función de Moivre, Leyes de Makeham, Gompertz y otras

Leyes que establecen la función de supervivencia

Ley de Moivre

"La supervivencia evoluciona de manera decreciente respecto a la edad".

Partimos de una función de supervivencia de la forma:

$$l_x = a - bx$$

Situándonos en x=0:

$$l_0 = a$$

En x=ω:

$$l_\omega = 0 = l_0 - b\omega$$

$$b = \frac{l_0}{\omega}$$

Por tanto:

$$l_x = l_0\left(1 - \frac{x}{\omega}\right) = \frac{l_0}{\omega}(\omega - x)$$

Según Moivre, ω=86, por lo que:

$$l_x = l_0\left(1 - \frac{x}{86}\right)$$

Otras funciones:

- $\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} = \frac{1}{\omega - x}$
- ${}_hP_x = 1 - \frac{h}{\omega - x}$
- ${}_hq_x = \frac{h}{\omega - x}$
- $1 - F(x) = 1 - \frac{x}{\omega}; F(x) = \frac{x}{\omega}$
- $d_x = \frac{l_0}{\omega}$

Ley de Sang

Partimos de la siguiente función de supervivencia:

$$l_x = a + Kb^x$$

Situándonos en x=0 y x=w, podemos obtener los valores de a y K:

$$a = -\frac{l_0 b^\omega}{1 - b^\omega}$$

$$K = \frac{l_0}{1 - b^\omega}$$

Por tanto:

$$l_x = l_0 \frac{b^\omega - b^x}{b^\omega - 1}$$

El tanto de mortalidad:

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} = \frac{b^x lnb}{b^\omega - b^x}$$

Ley de Babbage

La función de supervivencia tiene la forma:

$$l_x = A + Bx + Cx^2$$

Situándonos, como siempre, en x=0 y x=ω:

$$A = l_0$$

$$C = \frac{-l_0 - B\omega}{\omega^2}$$

Asumiendo que $B = -2\frac{l_0}{\omega}$:

$$l_x = \frac{l_0(\omega - x)^2}{\omega^2}$$

El tanto de mortalidad:

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} = \frac{2}{\omega - x}$$

Leyes a partir de la resolución de estructuras biométricas de distinto orden

Existe un conjunto de leyes de supervivencia al que podemos llegar a través de la resolución de estructuras biométricas.

Decimos que un grupo de n cabezas perteneciente al espacio biométrico tendrá estructura biométrica de orden υ si existe otro grupo de υ cabezas que envejece uniformemente a él. Los υ componentes del grupo ficticio o básico (ξ_1, ξ_2, ..., ξ_υ) se llaman actuarianos. Así, el espacio del que forma parte el primer grupo (real) es de estructura de orden υ si:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{x_j+h} = \sum_{j=1}^{\upsilon} \bar{\mu}_{\xi_j+h} \; \forall h$$

A partir de la derivación sucesiva de ambos miembros de la ecuación, se obtiene una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden υ+1, con coeficientes constantes y homogénea, cuya solución nos dará la forma del tanto μ_x:

$$\sum_{j=0}^{\upsilon} A_j \mu_x'^{j+1} = 0$$

Leyes de Dormoy

υ=0 → Primera ley de Dormoy

$$\sum_{j=0}^{0} A_j \mu_x'^{j+1} = A_0 \mu_x' = 0;\; \mu_x = A_0 r; r = 0 \rightarrow \; \mu_x = K\; constante$$

De modo que:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x K dx} = l_0 e^{-Kx}$$

De aquí:

- $1 - F(X) = e^{-Kx}; F(X) = 1 - e^{-Kx}$
- ${}_hP_x = e^{-Kh}$
- ${}_hq_x = 1 - e^{-Kh}$

υ=1 → Segunda ley de Dormoy

$$A_0 \mu_x' + A_1 \mu_x'' = 0;\; A_0 r + A_1 r^2 = 0; \mathrm{r} = 0, \alpha = 2 \rightarrow \mu_x = a + bx$$

La función de supervivencia:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x (a+bx)dx} = l_0 (e^{-a})^x \left(e^{-\frac{b}{2}}\right)^x = l_0 S_1^x S_2^{x^2}$$

υ=2 → Tercera ley de Dormoy

$$A_0\mu_x' + A_1\mu_x'' + A_2\mu_x''' = 0;\ A_0r + A_1r^2 + A_2r^3 = 0; \mathrm{r} = 0, \alpha = 3 \to \mu_x = a + bx + cx^2$$

La función de supervivencia:

$$l_x = l_0e^{-\int_0^x (a+bx+c\ \ ^2)dx} = l_0S_1^xS_2^{x^2}S_3^{x^3}$$

Leyes de Makeham

υ=1 → Primera ley de Makeham

$$A_0\mu_x' + A_1\mu_x'' = 0;\ A_0r + A_1r^2 = 0; r_1 = 0, r_2 \neq 0 \to \mu_x = a + be^{rx}$$

La función de supervivencia:

$$l_x = l_0e^{-\int_0^x (a+be^{rx})dx} = l_0e^{-\left(ax+\frac{b}{r}e^{rx}\right)+\frac{b}{r}} = Ke^{-ax}e^{-\frac{b}{r}e^{rx}} = KS_1^xS_2^{g^x}$$

υ=2 → Segunda Ley de Makeham

$$A_0\mu_x' + A_1\mu_x'' + A_2\mu_x''' = 0; r_1 = 0, \alpha_1 = 2; r_2 \neq 0, \alpha_2 = 1 \to \mu_x = a + bx + ce^{rx}$$

La función de supervivencia:

$$l_x = l_0e^{-\int_0^x (a+bx+ce^{rx})dx} = l_0e^{-ax}e^{-\frac{b}{2}x^2}e^{-\frac{c}{r}e^{rx}}e^{\frac{c}{r}} = KS_1^xS_2^{x^2}S_3^{g^x}$$

Gompertz

En la primera ley de Makeham, hacemos a=0:

$$\mu_x = e^{rx}$$

La función de supervivencia:

$$l_x = KS^{g^x}$$

Risser

υ=2

$$A_0\mu_x' + A_1\mu_x'' + A_2\mu_x''' = 0; r_1 = 0, \alpha_1 = 1; r_2 \neq 0, \alpha_2 = 2 \to \mu_x = a + (b + cx)e^{rx}$$

La función de supervivencia:

$$l_x = l_0e^{-\int_0^x a+(b+cx)e^{rx}dx} = l_0e^{-ax}e^{\left(-\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}\right)e^{rx}}e^{-\frac{cx}{r}e^{rx}}e^{\frac{b}{r}-\frac{c}{r^2}} = KS_1^xS_2^{g^x}S_3^{xg^x}$$

Lazarus

υ=2

$$A_0\mu_x' + A_1\mu_x'' + A_2\mu_x''' = 0; r_1 = 0; r_2 \neq 0; r_3 \neq 0, r_2 \neq r_3 \ \to \mu_x = a + be^{r_1x} + ce^{r_2x}$$

La función de supervivencia:

$$l_x = l_0e^{-\int_0^x a+be^{r_1x}+ce^{r_2x}dx} = l_0e^{-ax}e^{-\frac{b}{r_1}e^{r_1x}}e^{-\frac{c}{r_2}e^{r_2x}}e^{\frac{b}{r_1}}e^{\frac{c}{r_2}} = KS_1^xS_2^{{g_1}^x}S_3^{{g_2}^x}$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 23. Tablas de supervivencia. Contenido e interpretación. Determinación de las probabilidades mediante tablas de supervivencia. La función de supervivencia.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Nos situamos en el campo de la biometría, aquella parte de la estadística actuarial que se ocupa, fundamentalmente, del estudio de la supervivencia y de otros conceptos relacionados con la misma.

La variable más relevante es ξ: "edad de muerte de un individuo", cuya medición requiere el análisis de tasas de mortalidad pasadas en el colectivo de estudio, a fin de predecir o estimar ξ de la forma más objetiva posible.

La evolución de la población depende de factores como la fecundidad, la mortalidad y los fenómenos migratorios; las tablas nos ayudan a estudiar el de la mortalidad. La existencia de estas tablas de mortalidad se basa en la ciencia actuarial en cuanto que modeliza la ocurrencia de un suceso (en este caso, el fallecimiento de un individuo de edad x).

2. Tablas de supervivencia

Una tabla de supervivencia, mortalidad o vida contiene los elementos básicos que permiten calcular las probabilidades de muerte y supervivencia en una población homogénea (en que la edad es el principal factor determinante de la mortalidad de los individuos) a partir de las cuales se llevan a cabo los cálculos actuariales. Es la serie cronológica que expresa la reducción progresiva de un grupo inicial de individuos de la misma edad por efecto de los fallecimientos.

Aunque, generalmente, se habla de tablas de mortalidad, en realidad se debe diferenciar entre:

- Tablas de mortalidad: colección de valores del número de fallecimiento que a cada edad se ha verificado entre un grupo de l individuos con una edad inicial preestablecida, de ordinario la edad $x=0$;
- Tablas de supervivencia: colección de valores del número de supervivientes a cada edad, entre un grupo de l individuos de la misma edad.

Estas tablas se extraen la una de la otra y ambas son conocidas como tablas demográficas, y se pueden clasificar en:

- Tablas de momento, imagen fija de un año concreto, o de generación, basadas en el estudio de cohortes, como conjunto de individuos de una población que comparten la experiencia de un mismo suceso-origen, definidas por el suceso-origen nacimiento; estas últimas se pueden clasificar en estáticas, si solo consideran el tiempo biométrico, o dinámicas, si también consideran el tiempo físico o cronológico.

- Tablas abiertas, que permiten la incorporación de individuos al grupo inicial, o cerradas, en caso contrario.

- Tablas de decremento único, si solo se consideran salidas por fallecimiento, o de decrementos múltiples, si también se consideran otros fenómenos adicionales al fallecimiento como causa de salida, como puede ser la invalidez;
- Tablas de población general o de asegurados;
- Tablas completas (las funciones se elaboran para cada edad, de año en año, hasta w) o abreviadas (las funciones se calculan por grupos de edades, usualmente en grupos quinquenales, menos el primer y segundo grupos, que se dividen de 0 a 1 y de 1 a 4 años).

Las tablas de mortalidad (o supervivencia) satisfacen tres características:

- Homogeneidad: es necesario que los distintos grupos de personas observados sean homogéneos respecto a la edad de muerte, de cara a obtener las frecuencias que sirven como estimadores de las probabilidades de muerte a cada edad.
- Independencia, ya que el fallecimiento de un individuo no puede aumentar la probabilidad de muerte de otro (no hay contagio).
- Estacionariedad: si la tabla no es dinámica, se entiende que la época no influye en la edad de muerte.

3. Contenido e interpretación

Las variables contenidas en una tabla de supervivencia son las siguientes:

- x: edad.
- l_x: número de personas vivas a la edad x al comienzo del intervalo temporal.
- d_x: número de personas fallecidas a la edad x (no alcanzan con vida la edad x+1). Se puede calcular a partir del número de personas vivas de edad x y x+1:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

- q_x: tanto anual de mortalidad. Probabilidad de que una persona de edad x muera antes de alcanzar la edad x+1. Se calcula como:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

- p_x: tanto anual de supervivencia. Probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a x+1:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x$$

- L_x: Número medio de individuos vivos entre las edades x y x+1:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt \rightarrow Aplicando\ teorema\ de\ la\ media: L_x \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

- m_x: tanto central de muerte o de mortalidad. Refleja el número de fallecidos a la edad x respecto al número esperado (medio) de fallecidos a esa edad:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{2q_x}{2 - q_x}$$

- Despejando:

$$q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x}$$

$$p_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x}$$

4. Determinación de probabilidades mediante tablas de supervivencia

- Tanto de supervivencia: Hemos desarrollado anteriormente el tanto anual de supervivencia. Pues bien, de la misma manera, podemos calcular la probabilidad temporal de supervivencia para un período h>1: ${}_hp_x = \frac{l_{x+h}}{l_x}$, que mide la proporción de individuos de la cohorte que, habiendo superado la edad x, también superan x+h.

- Tanto de mortalidad: De la misma manera, se puede calcular la probabilidad de fallecimiento en función de los datos de la cohorte para un período h>1: ${}_hq_x = \frac{{}_hd_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+h}}{l_x}$, que mide la proporción de individuos fallecidos antes de llegar a x+h, habiendo superado x. Si x y h son enteros positivos, entonces ${}_hd_x = \sum_{j=0}^{h-1} d_{x+j}$, y ${}_hq_x = \frac{\sum_{j=0}^{h-1} d_{x+j}}{l_x}$

  Como siempre: ${}_hp_x = 1 - {}_hq_x$

- Probabilidad diferida de fallecimiento: recoge la probabilidad de supervivencia hasta un tiempo m determinado y la muerte posterior en otro período n:

$${}_{m/n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = {}_mp_x - {}_{m+n}p_x = {}_mp_x\ {}_nq_{x+m} = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$$

5. Función de supervivencia

Aunque en las tablas de mortalidad solamente aparecen los valores para x entera, la función lx puede definirse para cualquier x real y positiva. En tal caso, l_x se denomina

Función de Supervivencia, que se trata de una función real de variable real, decreciente y que interseca al eje de ordenadas en l_0 y al de abscisas en ω.

Entonces: frente al hecho de que una cabeza sobreviva, está la posibilidad de que no. Es, así, un suceso dicotómico, lo que nos lleva a un modelo B(1,p), donde

$$p = \ {}_{x}P_0 \ = \ 1 \ - \ F(x) = S(x)$$

Por tanto: B[1,1-F(x)]. El conjunto de cabezas: B[l_0,1-F(x)].

Donde:

- S(x) es la función de supervivencia, que recoge la probabilidad de que un recién nacido llegue con vida a la edad x. Sus propiedades son:
  - Monótona no creciente (habitualmente decreciente) y continua por la derecha;
  - S(0)=1;
  - S(∞)=0.
- F(x) es la función de distribución, complementaria de la función de supervivencia. Sus propiedades son:
  - Monótona no decreciente y continua por la derecha;
  - F(0)=0;
  - F(∞)=1.

Al número de cabezas que han sobrevivido a esa edad x de ese conjunto inicial l_0 lo llamamos función de supervivencia:

$$l_x = l_0[1 - F(x)]$$

De donde:

$$\frac{l_x}{l_0} = 1 - F(x)$$

Derivando:

$$\frac{l'_x}{l_0} = -F'(x)$$

Sabiendo que:

$$\mu_x = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} = \frac{-\frac{l'_x}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}} = -\frac{l'_x}{l_x}$$

Entonces:

$$-\mu_x = \frac{l'_x}{l_x}; -\int \mu_x dx = \int \frac{dl_x}{l_x}$$

$$ln l_x = -\int \mu_x dx + c$$

$$l_x = ce^{-\int_0^x \mu_x dx}$$

Suponiendo x=0:

$$l_0 = ce^{-\int_0^0 \mu_x dx} = c$$

Por tanto:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_x dx}$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 24. Construcción de tablas de mortalidad. Determinación de tantos anuales de mortalidad. Clases de ajuste. Estudio dinámico de la mortalidad. Tablas dinámicas.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Nos situamos en el campo de la biometría, aquella parte de la estadística actuarial que se ocupa, fundamentalmente, del estudio de la supervivencia y de otros conceptos relacionados con la misma.

La variable más relevante es ξ: "edad de muerte de un individuo", cuya medición requiere el análisis de tasas de mortalidad pasadas en el colectivo de estudio, a fin de predecir o estimar ξ de la forma más objetiva posible.

La evolución de la población depende de factores como la fecundidad, la mortalidad y los fenómenos migratorios; las tablas nos ayudan a estudiar el de la mortalidad. La existencia de estas tablas de mortalidad se basa en la ciencia actuarial en cuanto que modeliza la ocurrencia de un suceso (en este caso, el fallecimiento de un individuo de edad x).

Una tabla de supervivencia, mortalidad o vida contiene los elementos básicos que permiten calcular las probabilidades de muerte y supervivencia en una población homogénea (en que la edad es el principal factor determinante de la mortalidad de los individuos) a partir de las cuales se llevan a cabo los cálculos actuariales. Es la serie cronológica que expresa la reducción progresiva de un grupo inicial de individuos de la misma edad por efecto de los fallecimientos.

Aunque, generalmente, se habla de tablas de mortalidad, en realidad se debe diferenciar entre:

- Tablas de mortalidad: colección de valores del número de fallecimiento que a cada edad se ha verificado entre un grupo de l individuos con una edad inicial preestablecida, de ordinario la edad x=0;
- Tablas de supervivencia: colección de valores del número de supervivientes a cada edad, entre un grupo de l individuos de la misma edad.

Estas tablas se extraen la una de la otra y ambas son conocidas como tablas demográficas, y se pueden clasificar en:

- Tablas de momento, imagen fija de un año concreto, o de generación, basadas en el estudio de cohortes, como conjunto de individuos de una población que comparten la experiencia de un mismo suceso-origen, definidas por el suceso-origen nacimiento; estas últimas se pueden clasificar en estáticas, si solo consideran el tiempo biométrico, o dinámicas, si también consideran el tiempo físico o cronológico.
- Tablas abiertas, que permiten la incorporación de individuos al grupo inicial, o cerradas, en caso contrario.

- Tablas de decremento único, si solo se consideran salidas por fallecimiento, o de decrementos múltiples, si también se consideran otros fenómenos adicionales al fallecimiento como causa de salida, como puede ser la invalidez;
- Tablas de población general o de asegurados;
- Tablas completas (las funciones se elaboran para cada edad, de año en año, hasta w) o abreviadas (las funciones se calculan por grupos de edades, usualmente en grupos quinquenales, menos el primer y segundo grupos, que se dividen de 0 a 1 y de 1 a 4 años).

Las tablas de mortalidad (o supervivencia) satisfacen tres características:

- Homogeneidad: es necesario que los distintos grupos de personas observados sean homogéneos respecto a la edad de muerte, de cara a obtener las frecuencias que sirven como estimadores de las probabilidades de muerte a cada edad.
- Independencia, ya que el fallecimiento de un individuo no puede aumentar la probabilidad de muerte de otro (no hay contagio).
- Estacionariedad: si la tabla no es dinámica, se entiende que la época no influye en la edad de muerte.

2. Construcción de tablas de mortalidad

Las variables contenidas en una tabla de supervivencia son las siguientes:

- x: edad.
- l_x: número de personas vivas a la edad x al comienzo del intervalo temporal. l_0, que recogerá el número de individuos vivos de edad 0, se fijará en 100 000 o 1 000 000.
- d_x: número de personas fallecidas a la edad x (no alcanzan con vida la edad x+1). Se puede calcular a partir del número de personas vivas de edad x y x+1:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

- L_x: Número medio de individuos vivos entre las edades x y x+1:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}dt \rightarrow Aplicando\ teorema\ de\ la\ media: L_x \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

- m_x: tanto central de muerte o de mortalidad. Refleja el número de fallecidos a la edad x respecto al número esperado (medio) de fallecidos a esa edad:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{2q_x}{2 - q_x}$$

3. Determinación de los tantos anuales de mortalidad

A partir de estas variables podemos calcular las siguientes probabilidades:

- q_x: tanto anual de mortalidad. Probabilidad de que una persona de edad x muera antes de alcanzar la edad x+1. Se calcula como:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

- p_x: tanto anual de supervivencia. Probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a x+1:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x$$

- Tanto de supervivencia: Hemos desarrollado anteriormente el tanto anual de supervivencia. Pues bien, de la misma manera, podemos calcular la probabilidad temporal de supervivencia para un período h>1: ${}_hp_x = \frac{l_{x+h}}{l_x}$, que mide la proporción de individuos de la cohorte que, habiendo superado la edad x, también superan x+h.

- Tanto de mortalidad: De la misma manera, se puede calcular la probabilidad de fallecimiento en función de los datos de la cohorte para un período h>1: ${}_hq_x = \frac{{}_hd_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+h}}{l_x}$, que mide la proporción de individuos fallecidos antes de llegar a x+h, habiendo superado x. Si x y h son enteros positivos, entonces ${}_hd_x = \sum_{j=0}^{h-1} d_{x+j}$, y ${}_hq_x = \frac{\sum_{j=0}^{h-1} d_{x+j}}{l_x}$

  Como siempre: ${}_hp_x = 1 - {}_hq_x$

- Probabilidad diferida de fallecimiento: recoge la probabilidad de supervivencia hasta un tiempo m determinado y la muerte posterior en otro período n:

$${}_{m/n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = {}_mp_x - {}_{m+n}p_x = {}_mp_x \, {}_nq_{x+m} = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$$

- Por último, a partir del tanto central de mortalidad, podemos calcular:

$$q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x}$$

$$p_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x}$$

4. Clases de ajuste

Cuando se estiman funciones biométricas a partir de datos provenientes de una población, con frecuencia se plantea la necesidad de buscar una curva suave que tenga relación con las estimaciones primarias de dichas funciones. En algún caso puede convenir ajustar los datos sobre probabilidades brutas de fallecimiento de las edades avanzadas a una cierta función creciente de la edad, por ejemplo.

En otros casos querremos respetar los valores conocidos de algunas funciones, por ejemplo los valores para edades enteras y asignar los valores para edades fraccionaras en lo que se conoce como interpolación si se trata de asignar valores para edades intermedias entre los datos disponibles o extrapolación si se trata de asignar valores para edades que quedan fuera del rango para el que se disponen datos. Podemos hablar de:

- Interpolación lineal: $l_{x+t} = at + b$
- Interpolación exponencial: $l_{x+t} = ab^t$
- Interpolación hiperbólica:$\frac{1}{l_{x+t}} = at + b$

Con frecuencia una función sencilla que pase por los datos no es capaz de tener el perfil deseado (creciente y convexa, pongamos por caso). Se recurre entonces al ajuste a una función del tipo (del perfil) deseado que, aunque "no pase" por los datos, se parezca lo suficiente a ellos.

Llamaremos, en general, graduación al conjunto de métodos que permiten ajustar las probabilidades (de fallecimiento) brutas para que las nuevas probabilidades obtenidas permitan hacer cálculos actuariales adecuados al haberse eliminado las fluctuaciones y perturbaciones aleatorias que tenían las estimaciones iniciales.

Las tasas brutas, con sus fluctuaciones, pueden suponerse como realizaciones muestrales del comportamiento de una población mayor, y por consiguiente las probabilidades ya graduadas vendrían a ser estimaciones de las verdaderas probabilidades de fallecimiento que cumplirían ciertos requisitos de suavidad; esto es son similares para edades próximas y no presentan saltos bruscos.

Los métodos de graduación irían a garantizar estas buenas propiedades matemáticas a los resultados que se obtendrían en la tabla de mortalidad calculada a partir de las probabilidades "graduadas".

Existen cuatro tipos principales de ajuste[1]:

- Métodos gráficos
- Métodos paramétricos

[1] Desarrollados en tema 26

- Métodos no paramétricos
- Métodos dinámicos

5. Estudio dinámico de la mortalidad. Tablas dinámicas

En las tablas estáticas, la principal característica es la estacionariedad, pero en un estudio completo se deben tener en cuenta ambos conceptos temporales, es decir, la expresión matemática del fenómeno de supervivencia depende de dos parámetros: el tiempo físico y el tiempo biométrico. Este hecho da lugar a las tablas dinámicas. ¿Y por qué es importante el estudio dinámico de la mortalidad, que considera la época de nacimiento del individuo para estimar sus probabilidades de muerte o supervivencia? Porque fenómenos como la mejora de las condiciones sanitarias y los avances en medicina conducen a cambios en el riesgo de mortalidad a una determinada edad a lo largo del tiempo; además, se puede imaginar que el pasado de una generación determinada puede modificar el nivel de su mortalidad futura: por lo general, una epidemia que se produce en un momento t y que afecta a personas de edad x en esa fecha, puede contribuir a reducir las tasas de mortalidad de muerte en edades superiores a x para esta generación (por la muerte prematura de los individuos menos resistentes).

La medida natural de mortalidad consiste en contar las muertes que se producen durante un período determinado y luego calcular las tasas de mortalidad específicas por edad, relacionando este número de muertes con el número de personas en riesgo. Vemos que, si la mortalidad cambia con el tiempo, este enfoque sesga la medición de la mortalidad ya que, en un período de tendencia descendente de la mortalidad, conduce a una subestimación de la esperanza de vida (o a una sobrestimación de las tasas de muerte). De hecho, en este enfoque en que consideramos a individuos de diferentes generaciones para calcular las tasas de mortalidad, la tabla resultante no representa la mortalidad de ninguna generación real.

¿Cómo se está viendo la tendencia al uso de tablas dinámicas en España? A través del empleo de las tablas de supervivencia PERM/F2020, que calcula la probabilidad de fallecimiento anual para la anualidad comprendida entre el día que el asegurado cumple x años en el año cronológico t, y el día anterior a cumplir x+1 años como:

$$q_{x,t} = q_x^{base\ 2012} * e^{-\lambda_x (t-2012)}$$

Siendo λ_x el factor de mejora a aplicar a cada edad x.

La idea básica tras la construcción de las PERM/F es predecir las tasas de mortalidad en los años futuros para la edad x tomando las tasas de mortalidad del pasado para esa misma edad x. Si bien la fórmula exponencial implica una tasa de mejora constante y esta hipótesis puede no ser muy real, es muy usada y da buenos resultados.

Las tablas PER2020 toman el años 2012 como base, y son las únicas autorizadas para el cálculo de provisiones técnicas bajo contabilidad y Solvencia II (las de primer orden para BEL y segundo orden para ROSSP, distinguiendo entre seguros individuales y colectivos), derogando a las GR95, PER2000C y PER2000P desde el 31/12/2020. Para planes de pensiones, calculamos la provisión matemática con:

- PER 2020 de segundo orden para supervivencia
- PASEM 2020 de segundo orden para fallecimiento

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 25. Variables aleatorias fundamentales: vida media, vida probable y varianza. Aplicación a funciones particulares de supervivencia

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Variables aleatorias fundamentales: vida media, vida probable y varianza. Aplicación a funciones particulares de supervivencia

Vida media

La esperanza de vida o vida media es la magnitud que resulta de estudiar el valor esperado de la variable "edad de muerte" (esperanza de vida al nacer) o el valor esperado de la variable "Tiempo de vida hasta la muerte" (vida residual).

Como esperanza matemática que es se define:

$$\bar{e}_x = E\big(T(x)\big)$$

Donde $T(x) = X - x$

$$\bar{e}_x = E\big(T(x)\big) = \int_0^{w-x} t \cdot g_x(t)dt = \int_0^{w-x} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu(x+t)dt$$

Que se puede poner en función de los datos de la cohorte como:

$$\bar{e}_x = E\big(T(x)\big) = \int_0^{w-x} t \cdot \left(-\frac{l^{'}(x+t)}{l(x)}\right) dt = \frac{1}{l(x)} \int_0^{w-x} t \cdot l^{'}(x+t)\, dt = \int_0^{w-x} {}_tp_x dt$$

Para el caso continuo, se puede contemplar la esperanza de vida como la suma de las infinitas probabilidades temporales de supervivencia desde la edad x hasta el infinito actuarial.

Por otro lado,

$$\frac{1}{l(x)} \int_0^{w-x} t \cdot l^{'}(x+t)\, dt$$

Se ha resuelto por partes (ver demostración en cualquier manual de ciencia actuarial).

Si se define la variable **Tx como cantidad de existencia** (no confundir con T(x) que es la vida residual, la cantidad de existencia se refiere al total del número de años que vivirá en total todos los individuos de la cohorte que tienen la edad x).

$$T_x = \int_0^{w-x} l(x+t)dx$$

Parece obvio que si la cantidad de existencia es el número total de años que quedan por vivir a todos los individuos de la edad x, y l(x) es el número de individuos que tienen edad x, su cociente es el promedio y por tanto la vida media, esto es, la esperanza de vida a la edad x (los años totales repartidos de forma uniforme, igualitaria, equitativa, entre todos los que quedan a esa edad x).

$$\bar{e}_x = \frac{T_x}{l(x)}$$

En el caso discreto y bajo la hipótesis de uniformidad de fallecimientos a lo largo del año se tiene:

$$T_x = \sum_{k=x}^{w-1} L_k$$

Donde L_k es la edad censal, esto es, el número de años totales en la cohorte para cada una de las edades.

A partir de la función Tx, cantidad de existencia, se definen una serie de variaciones de la esperanza:

Esperanza de vida a la edad x diferida un tiempo t

Este caso suele ser útil para ver la esperanza de vida hasta la edad de jubilación, por ejemplo.

$${}_{t/}\bar{e}_x = \bar{e}_{x+t} \cdot {}_{t}p_x = \frac{T_{x+t}}{l(x+t)} \cdot \frac{l\,(x+t)}{l(x)} = \frac{T_{x+t}}{l(x)}$$

Esperanza de vida temporal

Número de años que vivirá un sujeto de edad x en los próximos t años.

$${}_{t}\bar{e}_x = \bar{e}_x - {}_{t/}\bar{e}_x = \frac{T_x - T_{x+t}}{l(x)}$$

Esperanza de vida mixta

Es la que conjuga la temporalidad con un diferimiento.

$${}_{n/t}\bar{e}_x = {}_{n/}\bar{e}_x - {}_{n+t/}\bar{e}_x = {}_{n}p_x \cdot {}_{t/}\bar{e}_{x+n}$$

Es decir, la esperanza de vida mixta es igual a la probabilidad de supervivencia temporal n años a la edad x por la esperanza de vida temporal t años a la edad x+n.

Por otro lado, existen como casos particulares en el estudio del caso discreto, las dos siguientes magnitudes de vida media. Lo normal es usar éstas ya que suele existir falta de información acerca de la función l(x) y que únicamente sea conocido el valor de la cohorte para años enteros (discreto, lx), por lo que a partir de éstos se hacen aproximaciones.

<u>Vida media completa (esperanza de vida completa)</u>

$$\dot{e}_x = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{w-x} {}_tp_x$$

<u>Vida media abreviada (Esperanza de vida abreviada)</u>

Que es el número de años completos que vive un individuo de edad x antes de fallecer (esto es, la parte entera de la variable T(x))

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tp_x$$

Vida probable

La vida probable es la edad η a la que se igualan las probabilidades de sobrevivir y de morir, esto es:

$${}_\eta p_x = {}_\eta q_x = 0{,}5$$

Es decir, se corresponde con el valor de la mediana de la distribución de probabilidad de la variable vida residual o tiempo de vida hasta la muerte.

η decrece con x (su primera derivada respecto de x es negativa).

También puede verse como tiempo (o años enteros en el caso discreto) que es necesario para que la cohorte a la edad x pierda justo la mitad de individuos:

$$l(x+t) = l(x)/2$$

Varianza

Al tratarse de una varianza de la variable vida residual, se va a obtener en primer lugar el momento dos respecto del origen, de dicha variable, de tal forma que:

$$E(T(x)^2) = \int_0^{w-x} t^2 g_x(t)dt = \quad 2\int_0^{w-x} t \;{}_tp_x dt$$

Y dado que la varianza se puede escribir como el momento dos respecto del origen menos el momento uno al cuadrado,

$$V(T(x)) = 2\int_0^{w-x} t\ {}_tp_x dt - \int_0^{w-x} {}_tp_x dt$$

La existencia de una edad límite garantiza la convergencia de estas variables.

Aplicación a funciones particulares de supervivencia

Ley de Moivre

Esta ley tiene una importancia histórica más que práctica.

La vida residual se asocia con la uniforme.

Es poco adecuada, salvo para el corto plazo.

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$$

$$g_x(t) = \frac{1}{\omega - x}$$

$${}_tq_x = G_x(t) = \frac{t}{\omega - x}$$

Esperanza de vida (continuo)

$$\bar{e}_x = \frac{\omega - x}{2}$$

Esperanza de vida (discreto)

$$e_x = \frac{\omega - x - 1}{2}$$

Ley exponencial

$$\mu_x = \mu \quad ,, (x \geq 0)$$

$${}_tq_x = G_x(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

Esperanza de vida (continuo)

$$\bar{e}_x = \frac{1}{\mu}$$

Esperanza de vida (discreto)

$$e_x = \frac{e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}}$$

Bibliografía

Ayuso, M. (2007). *Estadística actuarial vida* (Vol. 51). Edicions Universitat Barcelona.

Gil Fana, J. A., Antonio, A., & Vilar Zanón, J. L. (1999). *Matemática de los seguros de vida*. Fundación MAPFRE.

Morales, G. M. A. (1996). *Métodos estadísticos para actuarios*. Editorial Complutense.

López Cachero, M., & López de la Manzanara Barbero, J. (1996). *Estadísticas para actuarios*. Fundación MAPFRE.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 26. Interpolación y ajustes. Graduación de la mortalidad. Interpolación polinómica. Distintos procedimientos de ajuste.

Edición Julio 2025

1. Introducción

Cuando se estiman funciones biométricas a partir de datos provenientes de una población, con frecuencia se plantea la necesidad de buscar una curva suave que tenga relación con las estimaciones primarias de dichas funciones. En algún caso puede convenir ajustar los datos sobre probabilidades brutas de fallecimiento de las edades avanzadas a una cierta función creciente de la edad, por ejemplo.

En otros casos querremos respetar los valores conocidos de algunas funciones, por ejemplo los valores para edades enteras y asignar los valores para edades fraccionaras en lo que se conoce como interpolación si se trata de asignar valores para edades intermedias entre los datos disponibles o extrapolación si se trata de asignar valores para edades que quedan fuera del rango para el que se disponen datos. Podemos hablar de:

- Interpolación lineal: $l_{x+t} = at + b$
- Interpolación exponencial: $l_{x+t} = ab^t$
- Interpolación hiperbólica: $\frac{1}{l_{x+t}} = at + b$

Con frecuencia una función sencilla que pase por los datos no es capaz de tener el perfil deseado (creciente y convexa, pongamos por caso). Se recurre entonces al ajuste a una función del tipo (del perfil) deseado que, aunque "no pase" por los datos, se parezca lo suficiente a ellos.

Llamaremos, en general, graduación al conjunto de métodos que permiten ajustar las probabilidades (de fallecimiento) brutas para que las nuevas probabilidades obtenidas permitan hacer cálculos actuariales adecuados al haberse eliminado las fluctuaciones y perturbaciones aleatorias que tenían las estimaciones iniciales.

Las tasas brutas, con sus fluctuaciones, pueden suponerse como realizaciones muestrales del comportamiento de una población mayor, y por consiguiente las probabilidades ya graduadas vendrían a ser estimaciones de las verdaderas probabilidades de fallecimiento que cumplirían ciertos requisitos de suavidad; esto es son similares para edades próximas y no presentan saltos bruscos.

Los métodos de graduación irían a garantizar estas buenas propiedades matemáticas a los resultados que se obtendrían en la tabla de mortalidad calculada a partir de las probabilidades "graduadas".

2. Interpolación polinómica

El problema consiste básicamente en que dada una función, f, se conocen los valores que toma para n+1 puntos, $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$, esto es se conocen los valores : $f(x_0)$,

$f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$, y se trata de buscar un polinomio de grado n que pase por esospuntos $(x_i, f(x_i))$,i=0,1,...,n; es decir que cumpla:

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n(x_1) = f(x_1), \dots, P_n(x_n) = f(x_n)$$

Es evidente que, si el número de puntos es elevado, también lo será el grado delpolinomio, pudiendo llegarse a resultados muy poco operativos. Pero también es cierto que, en general, la solución existe y es única lo que garantiza la viabilidad del procedimiento.

Llamando:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = f(x)$$

Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \dots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

El determinante de este sistema de n+1 ecuaciones lineales con n+1 incógnitas (los coeficientes a_0, a_1, ..., a_n) es el determinante de Vandermonde:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

Por lo que si los puntos (datos) tienen distinta abscisa (son de distintas edades) el determinante será distinto de cero y el sistema tendrá solución y será única.

La solución del sistema es fácilmente calculable por la siguiente expresión, a resolver mediante hoja de cálculo:

$$A = D^{-1}Y$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Existen otros procedimientos analíticos para obtener polinomios de interpolación. Entre otros, los de los polinomios de Lagrange, el de interpolación parabólica progresiva, o los basados en la fórmula de Newton (de aproximaciones sucesivas) o en la de Gauss.

A continuación desarrollaremos únicamente el método de la interpolación parabólica progresiva. Se trata de un método recurrente basado en la siguiente idea: supuesto que tenemos ya determinado un polinomio de grado n-1 que pasa por n-1 puntos, vamos a construir un polinomio de grado n que pasa por los n-1 anteriores y por un punto más:

El polinomio que ya tenemos es:

$$P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Y suponemos que este polinomio pasa por los puntos siguientes:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$$

Vamos a construir, ahora, un polinomio de grado n según el siguiente esquema:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Construyéndolo de esta manera, nos aseguramos de que sigue pasando por los n-1 puntos anteriores; haciendo que pase por el último punto $(x_n, f(x_n))$, podremos despejar el último coeficiente a_n:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x_n) + a_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) = f(x_n)$$

$$a_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}$$

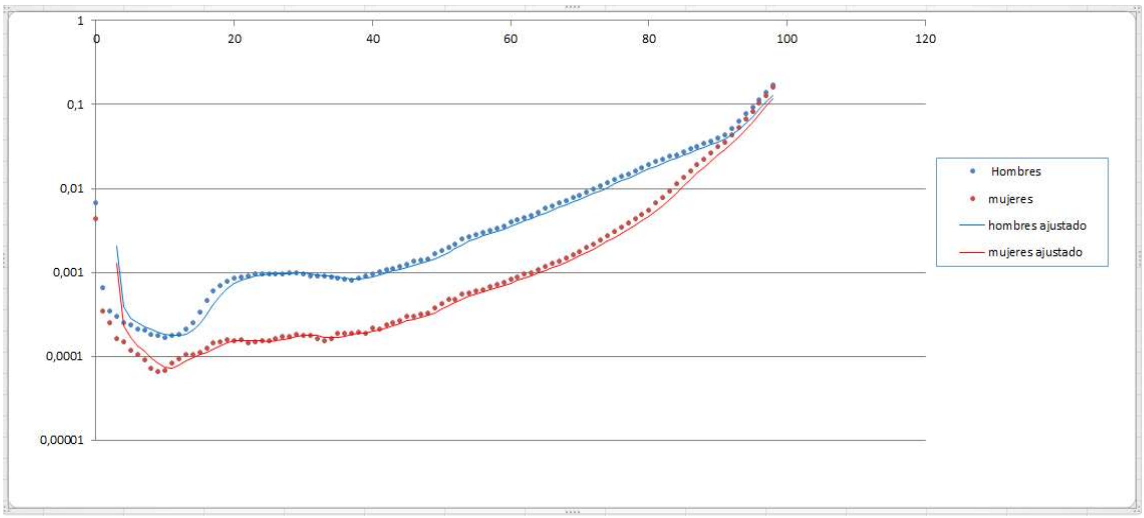
3. Procedimientos de ajuste

Vamos a distinguir cuatro grupos principales de ajuste:

- Métodos gráficos
- Métodos paramétricos
- Métodos no paramétricos
- Métodos dinámicos

Métodos gráficos

Los métodos gráficos se basan en la descripción de la trayectoria de la edad de fallecimiento en función de la edad. Sobre el eje de abscisas se representa la edad y, sobre el de ordenas, las probabilidades graduadas. Lo habitual será emplear una escala logarítmica para poder apreciar el comportamiento ligeramente decreciente en los primeros años de vida. Los métodos gráficos suelen emplearse para fines posteriores a la construcción de la tabla de mortalidad; por ejemplo, para comparar distintos casos (varios países, o varias subcarteras) mediante una gráfica y algunos índices de referencia para comparar. Abajo: curvas de mortalidad de hombres y mujeres.



Métodos paramétricos

Estos métodos buscan una función $f(x)=q_x$ dependiente de un número finito de parámetros. El ajuste de los parámetros se puede hacer por:

- Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO): minimiza las distancias entre valores observados y la fórmula matemática elegida.
- Mínima Chi-Cuadrado (X^2): Bajo el supuesto de que el modelo elegido para cada medida de probabilidad es correcto, el estadístico X^2 mide la discrepancia entre las muertes observadas y las esperadas.
- Máxima verosimilitud: Buscamos valores de parámetros que maximicen la función de verosimilitud de los valores de dx observados para las edades $n_1 \leq x \leq n_2$.

Métodos no paramétricos

Estos métodos no proponen ninguna forma funcional para el comportamiento de los datos, por lo que no pueden sintetizar el ajuste o graduación en una expresión analítica simple. Las probabilidades graduadas se obtienen mediante métodos de suavizado que combinan las probabilidades adyacentes.

Entre estos métodos, destacan:

- La estimación por núcleo o de Kernel: Se supone que la verdadera tasa de mortalidad se ve como la tasa observada en cada edad más un error para cada edad:

$$q_0^0 = q_x + r_x$$

  Entonces, estimamos la tasa de cada edad considerando los valores de tasas observadas en los años cercanos, ponderados según su cercanía por una ponderación

Kernel o función núcleo. Destacan el núcleo gaussiano, el núcleo constante y el núcleo Epachenikov.

- Fórmula de Wittaker-Henderson

Métodos dinámicos

Estos métodos tienen por objeto expresar la mortalidad en función del calendario futuro. Distinguimos entre métodos estructurales y no estructurales.

Métodos dinámicos estructurales

En estos métodos, la ley de mortalidad se mantiene a lo largo de los años, considerándose la influencia del tiempo calendario únicamente en los parámetros. Así, nuestra función tendrá la forma f(x, α_1(t), α_2(t), ... , α_n(t)).

Tenemos:

- Modelo de Heligman y Pollard: la ley de mortalidad de cada año es la de Heligman y Pollard, y cada parámetro se estima por año por Mínimos Cuadrados Ponderados no Lineales.
- Método logit: Consideramos la transformación logit para cada edad x y período t.
- Método Lee Carter: Trata de ajustar una función lineal a los logaritmos de los valores de mortalidad observados para cada edad específica.

Métodos no estructurales

En estos métodos, la medida de la mortalidad depende de la edad x y del tiempo t: nuestra función tendrá la forma f(x, t).

Destaca el modelo logarítmico, que propone:

$$\ln(q_{xt}) = \ln(\alpha_x) + t * \ln(\beta_x)$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 27. Procesos estocásticos: Concepto y clasificación. Procesos de Markov. Cadenas de Markov de parámetro discreto. Estudio de las probabilidades de transición, de primer paso y de absorción. Clases comunicantes. Estados y clases recurrentes y no recurrentes.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Procesos estocásticos: Concepto y clasificación.

La evolución aleatoria de un fenómeno aleatorio es estructurable, lo cual conduce al estudio de estructuras matemáticas y estadísticas que conforman el contenido de lo que se ha dado a llamar proceso estocástico o función aleatoria.

Hay autores que usan indistintamente una y otra denominación (como López-Cachero) mientras que otros distinguen función aleatoria cuando la clase de Borel a la que corresponde el fenómeno es invariante con el tiempo y proceso estocástico cuando se ve afectado por el tiempo (Martín-Pliego).

El proceso estocástico resulta ser de la familia de las aplicaciones medibles

$$(\Omega, \Sigma, \mathrm{P}) - - \varsigma_t - - > (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})\forall t$$

$(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$: Espacio probabilizable

Ω: Colección de sucesos o espacio muestral

Σ: Álgebra de sucesos

P: probabilidad inducida

$$\varsigma_t = \varsigma(\omega, t)$$

Esto es, ω sucesos que pertenecen a Ω y $t \epsilon T$, conjunto numerable o infinito no numerable.

- Si T es numerable: sucesión aleatoria
- Si T es infinito no numerable: Proceso continuo.

Fijado t de tal manera que $t = t_0 ==> \varsigma_{t_0} = \varsigma(\omega, t_0) = \varsigma(\omega)$ variable aleatoria (v.a), para cada valor de $\omega_0 \epsilon \, \Omega$ el proceso estocástico proporciona una trayectoria, por tanto Ω también es el espacio de trayectorias del proceso.

Lo indicado permite considerar que la familia de variables aleatorias puede a su vez determinar una aplicación global medible:

$$\phi = \{\varsigma_t | t \epsilon T\}$$

En el espacio probabilístico

$$(\Omega, \Sigma, \mathrm{P}) - - \phi - - > (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})\forall t$$

Tal que:

$$\phi^{-1}(B) \epsilon \, \Sigma \qquad \forall \, \mathrm{B} \, \epsilon \, \mathcal{B}_T$$

ϕ aplicación global es medible sí y sólo sí la aplicación de ς_t $\forall t$ es medible.

Distribución de probabilidad del proceso estocástico: Es la medida $\wp^*$que la aplicación global ϕ induce en $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

$$\wp^*(B) = P\left(\phi^{-1}(B)\right) \quad ,, \quad \phi^{-1}(B) \epsilon \, \Sigma \qquad \forall \, \mathrm{B} \, \epsilon \, \mathcal{B}_T$$

Clasificación

En función de la variable aleatoria y el tiempo:

Los estados son los valores que puede tomar una variable aleatoria y pueden ser definidos como discretos o continuos. La variable tiempo se puede tomar como discreta o continua. En función de ello los procesos estocásticos se clasifican en:

<table>
<tr><td rowspan="2">Clasificación</td><td colspan="3">Tiempo</td></tr>
<tr><td></td><td>Discreto</td><td>Continuo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Variable aleatoria</td><td>Discreta</td><td>Cadena</td><td>Proceso saltos puros</td></tr>
<tr><td>Continua</td><td>Proceso estado continuo y tiempo discreto</td><td>Proceso continuo</td></tr>
</table>

Procesos fundamentales

Los procesos más habituales son:

- De variable independiente
- Normales
- Estacionarios
- De Markov:
    - Procesos de vida y muerte
    - Cadenas de Markov
    - Procesos de Poisson
    - Procesos de Erlang
    - Proceso de Wiener (movimiento browniano)

De variable independiente

Sean $\varsigma_{t_1}, \varsigma_{t_2}, \ldots, \varsigma_{t_n}$,, $n \in \mathbb{N}$ para el conjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subset T$ independientes en probabilidad tal que $\varsigma_{t_n/t_1,t_2,\ldots,t_n} = \varsigma_{t_n}$ es un proceso de variables independientes, por tanto se puede expresar la función de distribución conjunta como producto de función de distribuciones marginales.

Procesos Normales

Sean $\varsigma_{t_1}, \varsigma_{t_2}, \dots, \varsigma_{t_n}$,, $n \in \mathbb{N}$ para el conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$ con una distribución finito-dimensional conjunta de modelo Normal al proceso se le llama Normal (no es suficiente que las marginales sean normales)

Procesos Estacionarios

Sean $\varsigma_{t_1}, \varsigma_{t_2}, \dots, \varsigma_{t_n}$,, $n \in \mathbb{N}$ para el conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$ si poseen distribución finito-dimensional invariante ante cualquier traslación se dirá que el proceso es estacionario.

$$F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1+\tau,t_2+\tau,\dots,t_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Procesos de Markov

Sean $\varsigma_{t_1}, \varsigma_{t_2}, \dots, \varsigma_{t_n}$,, $n \in \mathbb{N}$ para el conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$ si que $\varsigma_{t_n/t_1,t_2,\dots,t_n} = \varsigma_{t_n/t_{n-1}}$ es un proceso de Markov.

$$F_{t_n/t_1,t_2,\dots,t_n}\left(x_{n/x_1,x_2,\dots,x_n}\right) = F_{t_n/t_{n-1}}\left(x_{n/x_{n-1}}\right)$$

Procesos de Markov.

Los procesos estocásticos pueden depender de instantes anteriores, procesos con memoria. Lo que caracteriza a un proceso de Markov es que tiene poca memoria, y que los valores del presente no dependen del pasado, únicamente del momento o instante inmediatamente anterior. Como se ha indicado antes:

Sean $\varsigma_{t_1}, \varsigma_{t_2}, \dots, \varsigma_{t_n}$,, $n \in \mathbb{N}$ para el conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$ si que $\varsigma_{t_n/t_1,t_2,\dots,t_n} = \varsigma_{t_n/t_{n-1}}$ es un proceso de Markov.

$$F_{t_n/t_1,t_2,\dots,t_n}\left(x_{n/x_1,x_2,\dots,x_n}\right) = F_{t_n/t_{n-1}}\left(x_{n/x_{n-1}}\right)$$

Se clasifican en:

- Cadenas de Markov: Procesos discretos en tiempo discreto
- Procesos de Markov: procesos discretos en tiempo continuo (de saltos)

Cadenas de Markov de parámetro discreto.

Las cadenas de Markov de parámetro discreto (Cadenas de Markov *sensu estricto*) sitúa el análisis de los procesos estocásticos en un ámbito de relativa sencillez, conformando un proceso con finitud de los estados o sucesos, concreciones, del fenómeno aleatorio y numerabilidad de los valores del parámetro que determinan la evolución del fenómeno.

Un proceso X_n discreto en tiempo discreto es una cadena de Markov si:

$$P\left\{\chi_{n+1} = j \middle| \chi_0 = i_{0,} \chi_1 = i_{1,} \ \dots . \chi_{n-1} = i_{n-1,} \chi_n = i \right\} = P\{\chi_{n+1} = j | \ \chi_n = i \}$$

Elementos de una cadena de Markov

Conjunto o espacio de estados

$$E = \{i_0, i_1, \dots, \}$$

Probabilidades de transición (1 etapa): Probabilidad de pasar del estado i al estado j en una etapa.

$$P\{\chi_{n+1} = j | \ \chi_n = i \} = P_{ij}$$

Probabilidad de transición (n etapas)

$$P\{\chi_n = j | \ \chi_0 = i \} = P_{ij}^{(n)}$$

Distribución de probabilidad inicial para cada $i \ \in E$

$$P\{\chi_0 = i\}$$

Cadena Homogénea

Se dice que una cadena de Markov es homogénea si,

$$P\{\chi_{n+1} = j | \ \chi_n = i \} = P_{ij} = P\{\chi_{m+1} = j | \ \chi_m = i \}$$

No depende de los instantes n y m únicamente de i y j.

La distribución inicial será:

$$P^{(0)} = \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}\right)$$

Marginales para i=1,2,...n estados

$$P_i^{(0)}\{\chi_0 = i\}$$

Matriz de transición: Define las probabilidades de paso para cada uno de los estados, por tanto es una matriz estocásticas (y por ello, por filas suma 1).

$$0 \le P_{ij} \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$$

- Filas: estado de salida (i)
- Columnas: Estado de llegada (j)

$$|P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Distribuciones de la cadena

Probabilidad de Estado: $P_i^{(n)}$: Probabilidad de estar en el estado i tras n etapas

$$P_i^{(n)}\{\chi_n = i\}$$

Probabilidad de paso o transición entre estados: $P_{ij}^{(n)}$: Probabilidad de pasar del estado i al estado j en n etapas o pasos, que escritas con las ecuaciones e Chapman-Kolmogorov sería:

$$P_{ij}^{(n)} = P\{\chi_n = j | \chi_0 = i\} = \sum_k P_{ik}^{(n-r)} \cdot \ P_{kj}^{(r-s)} \rightarrow \text{Estado}$$

Distribución de probabilidad del estado tras n etapas

$$P_i^{(n)} = (P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \dots, P_r^{(n)}) \rightarrow \text{Transición}$$

$$P_i^{(n)} = P\{\chi_n = i\} = \sum_{i \in E} P\{\chi_{n-1} = j\} \cdot P\{\{\chi_n = i | \ \chi_{n-1} = j\}$$

$$P_{ji} = P\{\chi_n = i | \ \chi_{n-1} = j\}$$

$$P_j^{(n)} = \sum_{i \in E} P_i^{(n-1)} \cdot P_{ij}$$

De la matriz de transición

$$P_i^{(n-1)} = (P_1^{(n-1)}, P_2^{(n-1)}, \dots, P_r^{(n-1)} \dots)$$

$$P_i^{(n)} = P_i^{(n-1)} \cdot IP$$

IP es la matriz de transición en una etapa

$$P_i^{(n)} = (P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \dots, P_r^{(n)} \dots) = \mathbf{P}^{(n)}$$

$$P_j^{(n-1)} = (P_1^{(n-1)}, P_2^{(n-1)}, \dots, P_r^{(n-1)} \dots) = \mathbf{P}^{(n-1)}$$

$$IP = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rr} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)} \cdot IP$$

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-2)} \cdot IP \cdot IP = \mathbf{P}^{(n-3)} \cdot IP \cdot IP \cdot IP =..= \mathbf{P}^{(0)} \cdot IP^n$$

Potencia de la matriz de transición

$$IP^n = H \cdot J^n \cdot H^{-1}$$

Donde J es el **determinante jacobiano** y H la **matriz de autovectores**, solución de:

$$H = \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ (v_1) & (v_2) & \dots .(v_n) \\ .. & .. & .. \end{pmatrix} ==> (IP - \lambda\, \mathrm{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ es la **matriz de autovalores.**

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots . & .. \\ .. & \lambda_h \dots & .. \\ .. & \dots & \lambda_n \\ & \dots . & \end{pmatrix}$$

I es **la matriz identidad.**

Distribución estacionaria de la cadena

Una cadena tiene una distribución estacionaria si:

$$\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)} = \cdots = \mathbf{P}^{(n)} = \Pi$$

Todas las filas son iguales.

Todas las distribuciones de la cadena son idénticas.

Para encontrar la distribución estacionaria basta con encontrar el vector Π de probabilidades tal que:

$$\Pi = \Pi \cdot \mathrm{IP}$$

$$\mathrm{P}^{(0)} = \Pi$$

Sabiendo que $\sum_i \Pi = 1$, , $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, .., \Pi_j \dots)$

De forma que

$$\left(P_1^k, P_2^k, \dots, P_J^k, \dots\right) = \left(\Pi_1, \Pi_2, .., \Pi_j \dots\right) \ \forall k$$

Distribución ergódica (estacionaria en el límite).

Si la cadena no es estacionaria podría serlo cuando n→∞

$$P^{(n)} - n \to \infty \to \Pi$$

En este caso se llama cadena ergódica, y cuando la cadena es ergódica se cumple que:

1) $\lim\limits_{n-\to\infty} P^{(n)} = \Pi$
2) $\Pi = \Pi \cdot \mathrm{IP}$
3) Es estocástica $\sum_i \Pi = 1$
4) $\lim\limits_{n-\to\infty} IP^{(n)} = \lim\limits_{n-\to\infty} IP^n = \lim\limits_{n-\to\infty}$ |Π donde |Π es una matriz donde todas sus filas son iguales a Π

Regularidad estocástica

Se dice que |P es estocásticamente regular si existe algún k tal que IP^k tiene todos sus elementos positivos (ningún cero).

En ese caso

1) |P admite un único vector de probabilidades verificando que $\Pi = \Pi \cdot \mathrm{IP}$
2) $\lim\limits_{n-\to\infty} P^{(n)} = \Pi$
3) $\lim\limits_{n-\to\infty} IP^n =$ |Π donde todas las filas de esta matriz coinciden con Π (y suma 1 por filas).

Observaciones:

Si |P tiene algún 1 en la diagonal **|P** →NO es estocásticamente regular

Si existe Π tal que $\Pi = \Pi \cdot \mathrm{IP}$ y Π tiene alguna componente nula => IP no es esatocásticamente regular.

IP es estocásticamente regular sí y sólo sí un autovalor es igual a 1 y todos los demás en valor absoluto menores que 1.

Estudio de las probabilidades de transición, de primer paso y de absorción.

<u>Incertidumbre en el número de etapas:</u> se quiere saber el número de etapas necesarias y requeridas para pasar del estado i al estado j.

Se notará por N_{ij} **al tiempo del primer paso o número de etapas** para el primer paso, esto es, si $N_{ij} = n$ significa que se requieren n etapas para pasar del estado i al estado j POR PRIMERA VEZ. (PRIMER PASO)

$\boldsymbol{P(N_{ij} = n) = f_{ij}^{(n)}}$ → es la probabilidad de pasar de i a j por primera vez (primer paso) en **n** etapas (superíndice).

Por otro lado, la probabilidad de que la cadena pase por el estado j si partió de i EN ALGÚN MOMENTO (TRANSICIÓN) se va a notar por $\boldsymbol{f_{ij}}$

De modo que:

$$\boldsymbol{f_{ij}} = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f_{ij}^{(n)}} = \boldsymbol{P(N_{ij} < \infty)} = F_{ij}(1)$$

Relación entre $\boldsymbol{f_{ij}^{(n)}}$ y $P_{ij}^{(n)}$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f_{ij}^{(k)}} \cdot P_{jj}^{(n-k)} \ \forall i \neq j$$

Nº medio de etapas o transiciones requeridas para pasar de i a j

$$E(N_{ij}) = F'_{ij}(1) = \sum_{\forall n} f_{ij}^{(n)}$$

Nº medio de veces que la cadena pasa por j partiendo de i a lo largo de toda su evolución

$$E(Y_{ij}) = F'_{ij}(1) = \sum_{\forall n} P_{ij}^{(n)}$$

Clases comunicantes. Estados y clases recurrentes y no recurrentes.

Clasificación de estados (relaciones dos a dos)

Estados accesibles

El estado i se comunica con el estado j (j es accesible para i)

$$i \rightarrow j$$

Si para algún valor entero n (número de etapas) se cumple que

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \ <=> f_{ij} > 0$$

Estados comunicantes

Los estados i y j se intercomunican entre si (son mutuamente accesibles)

$$i <\approx> j$$

Si se cumple que

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \ \ y \ P_{ji}^{(n)} > 0 \ <=> f_{ij} > 0 \text{ y } f_{ji} > 0$$

Estados no accesibles

Los estados i y j no son accesibles entre si

$$i <\not\approx> j$$

Si se cumple que

$$P_{ij}^{(n)} = 0 \ \ y \ P_{ji}^{(n)} = 0$$

$$\text{Y } f_{ij} = 0 \text{ y } f_{ji} = 0$$

Clasificación de los estados (para cada estado)

Estados sin retorno

Un estado i es sin retorno cuando no se puede volver a él una vez se abandona.

$P_{ii}^{(n)} = 0$ para cualquier n.

Estados transitorios

Son transitorios aquellos estados por los que se pasa por ellos al menos alguna vez.

i es transitorio si $f_{ii} < 0 <=> P_{ii}^{(1)} < \infty$

$E(Y_{ii}) < \infty$ → el nº medio de veces **que la cadena pasa** por i partiendo de i a lo largo de toda su evolución, converge.

Estados recurrentes

Son recurrentes cuando se vuelve a ellos.

i es recurrente si $f_{ii} = 1 <=> P_{ii}^{(1)} < \infty$

Si $E(N_{ii}) < \infty$ es recurrente positivo y si $E(N_{ii}) = \infty$ es recurrente nulo.

Donde $E(N_{ii})$—→Nº medio de **etapas o transiciones requeridas** para saliendo de i volver a i.

Estados absorbentes

Un estado es absorbente es aquel por el que una vez se cae en él, ya no se puede salir.

i es absorbente si $f_{ii}^{(1)} = 1$.

Consecuencias

1) Si i es recurrente y j es accesible para i) i→j
    a. j es recurrente
    b. $f_{ij} = 1$
    c. $f_{ji} = 1$
2) Si i es recurrente y j es transitorio, $f_{ij} = 0$ =>una vez que se llega a un recurrente ya no se vuelve a un transitorio.
3) Dos estados son equivalentes si $f_{ij} = f_{ji} = 1$

Descomposición de la cadena

Se define una partición en clases de equivalencia entre los estados de la cadena y se divide en dos conjuntos, T para los transitorios y R para los recurrentes, la matriz de transición queda como :

$$\text{IP}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} P_{11} & .. & P_{1m} & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ P_{n1} & .. & P_{nm} & 0 & .. & 0 \\ \hline & A & & & B & \end{array}\right)$$

La matriz queda como:

R	T
A	B

R es el cuadrante de estados recurrentes que son comunicantes entre sí en todas las transiciones distintas a la diagonal y no comunicantes en las transiciones de la diagonal.

Si sólo hay un estado recurrente, a largo plazo se acaba en él

Por otro lado, si desde los estados de una clase se accede únicamente a los estados de esa clase, es un subconjunto cerrado(i→j)

Si desde los estados de una clase hay intercomunicación sólo con los estados de esa clase, será irreductible (i < -- > j)

Si es cerrado e irreductible es una subcadena, pudiendo eliminarse el resto de estados.

Si todos los estados se comunican entre sí, la cadena es irreductible y cuando una cadena es irreductible y posee un número finito de estados, la cadena tendrá todos sus estados recurrentes.

Bibliografía

Estadística para actuarios / Manuel López Cachero, Juan López de la Manzanara Barbero
Publicación: Madrid : Editorial MAPFRE

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 28. Cadenas de Markov de parámetro continuo. Estudio del proceso de vida y muerte.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Cadenas de Markov de parámetro continuo.

Los procesos estocásticos pueden depender de instantes anteriores, procesos con memoria. Lo que caracteriza a un proceso de Markov es quetiene poca memoria, y que los valores del presente no dependen del pasado, únicamente del momento o instante inmediatamente anterior. Como se ha indicado antes:

Sean $\varsigma_{t_1}, \varsigma_{t_2}, \dots, \varsigma_{t_n},, n \in \mathbb{N}$ para el conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$ si que $\varsigma_{t_n/t_1,t_2,\dots,t_n} = \varsigma_{t_n/t_{n-1}}$ es un proceso de Markov.

$$F_{t_n/t_1,t_2,\dots,t_n}\left(x_{n/x_1,x_2,\dots,x_n}\right) = F_{t_n/t_{n-1}}\left(x_{n/x_{n-1}}\right)$$

Se clasifican en:

- Cadenas de Markov: Procesos discretos en tiempo discreto
- Procesos de Markov: procesos discretos en tiempo continuo (de saltos)

Procesos de markov parámetro continuo

Sea χ_t un proceso discreto en tiempo continuo se dice que es un proceso de Markov o cadena de markov de parámetro continuo, si

$$P\{\chi_{t_n} = j \middle| \chi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \chi_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, \chi_{t_1} = i_1\} = P\{\{\chi_{t_n} = j \middle| \chi_{t_{n-1}} = i\}$$

$$t_n \epsilon\, T$$

Es un proceso sin memoria, únicamente depende del estado inmediatamente anterior.

Probabilidades de transición

Por ser probabilidades se cumplirá que:

$$P_{ij}(t) \geq 0$$

$$\sum_{j \in E} P_{ij}(t) = 1$$

$$IP(t) = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & \cdot\cdot & P_{1m}(t) \\ \dots & \dots \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot & \dots \\ P_{n1}(t) & \dots & P_{nm}(t) \end{pmatrix}$$

Son estacionarias.

<u>Propiedades de la matriz de transición</u>

1) $IP(t) = \mathrm{I} ==> \begin{cases} P_{ii}(0) = 1 \\ P_{ij}(0) = 0 \end{cases}$ (I es la matriz identidad)
2) $P_{ij}(t) > 0$ (no negativas)

<u>Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov</u>

$$IP(t+s) = IP(t) + IP(s)$$

$$P_{ij} = \sum_{k \,\epsilon\, E} P_{ik}(t)\, P_{kj}(s)$$

Distribuciones marginales

$$P(t) = (P\{\chi_t = 1\}, P\{\chi_t = 2\}, \ldots.)$$

**Similar a $\mathbf{P}^{(n)}$ en las cadenas

Los estados siguen siendo discretos. Lo que cambia respecto de las cadenas, es que en lugar de hablar de etapas (n) el tiempo es un parámetro continuo.

Distribución inicial

$$P(t) = P(0) \cdot IP(t)$$

Distribuciones n-dimensionales

$$P = \{\chi_{t_1} = j, \chi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \chi_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \ldots, \chi_{t_1} = i_1\} =$$

$$P = \{\chi_{t_1} = i_1\} P\{\chi_{t_2} = i_2 \mid \chi_{t_1} = i_1\} \ldots.. =$$

$$= P_{i_1}(t_1) \cdot P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdot \ldots \cdot P_{i_1 i_2}(t_n - t_{n-1})$$

Estas últimas probabilidades son de la m,atriz de transición.

Propiedades analíticas de la matriz de transición.

1) $P_{ij}(t)$ es continua
2) $P_{ii}(t) > 0$
3) $Si\ P_{ij}(t_0) > 0 ==> P_{ij}(t) > 0$ (Acumula para cualquier $t > t_0$)
4) $P_{ij}(t)$ es derivable en t=0 y cumple que:
   a. $P'_{ii}(0) < 0$ a mayor transcurso de tiempo la probabilidad de seguir en el mismo estado decrece
   b. $P'_{ij}(0) > 0$ si $i \neq j$
   c. $\sum_{j \in E} P'_{ij}(0) = 1$

E es el conjunto discreto de estados.

Ecuaciones diferenciales del proceso de Markov

Se mide la velocidad con la que se pasa de un estado a otro en intervalos muy pequeños.

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} P'_{ik}(t)\, P'_{kj}(0)$$

$$IP'(t) = IP(t) IP'(0)$$

O también,

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} P'_{ik}(0)\, P'_{kj}(t)$$

$$IP'(t) = IP'(0)IP(t)$$

Como resultado

$$IP(t) = e^{IP'(0)\cdot t}$$

Nota:

$$\frac{IP'(t)}{IP(t)} = Ln\, IP(t)\ \frac{1}{IP'(0)}$$

Aplicando exponencial a los dos lados se obtiene lo anterior.

Matricialmente se expresa como:

$$IP(t) = e^{IP'(0)\cdot t} = H\, e^{Jt} H^{-1}$$

1) Valores propios:
   $\mathbb{Q}$ Es la matriz fundamental del proceso.
   $$\mathbb{Q} = IP'(0)$$

   Su diagonal son negativos, el resto de la matriz son positivos y la suma por filas es igual a cero.

   Los valores de λ se obtienen de la igualdad
   $$|\mathbb{Q} - \lambda \mathrm{I}| = 0$$
   a. Clacular el Jacobiano. Matriz de diagonal valores de λ
   b. e^{Jt} matriz diagonal de $e^{\lambda_k t}$ ($\lambda_k$de la diagonal de J)

2) Vectores propios:
   $$(\mathbb{Q} - \lambda \mathrm{I})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\begin{pmatrix} \cdot\cdot \\ V_1 \\ \cdot\cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot\cdot \\ V_2 \\ \cdot\cdot \end{pmatrix}\cdot\cdot\begin{pmatrix} \cdot\cdot \\ V_k \\ \cdot\cdot \end{pmatrix} = H$$

   Tantos vectores columnas como λ

3) Inversa de H
4) $H^{-1} = \frac{1}{|H|} Adj\ (H^t)$
5) **$\boldsymbol{IP(t) = H\, e^{Jt}\, H^{-1}}$**

Estudio del proceso de vida y muerte

Son procesos de Markov en los que sólo se pueden realizar transiciones a estados contiguos.

$$E_{n-1} <-- \; E_n --> E_{n+1}$$

El conjunto de estados es: $E = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ discreto.

Casos particulares son los procesos de nacimiento (o vida) y muerte. La transición se establece por tasas.

Procesos de nacimiento: aquellos en los que desde E_n sólo puedes ir a E_{n+1}. Su tasa de transición se nota como $\lambda_n(t)$

Procesos de muerte: Son aquellos en los que desde E_n sólo puedes ir a E_{n-1}. Su tasa de transición se nota como $\mu_n(t)$.

Considerando un intervalo de tiempo tal que $[t, t + \Delta t]$ en este intervalo únicamente se puede realizar una transición (no se puede hacer más de una transición), y que la población en el momento t es de n individuos ($X_t = n$) se va a tener que:

$$P(Nacimiento\ en\ [t, t + \Delta t] | X_t = n) = \lambda_n(t)\Delta t$$

$$P(Muerte\ en\ [t, t + \Delta t] | X_t = n) = \mu_n(t)\Delta t$$

Siendo la porbabilidad de que en t haya n individuos,

$$P(X_t = n) = P_n(t)$$

Entonces,

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)P(ninguna\ transición\ (t, t + \Delta t)|X_t = n) +$$

$$P_{n-1}(t)P(un\ nacimiento\ (t, t + \Delta t)|X_t = n - 1) +$$

$$P_{n+1}(t)P(una\ muerte\ (t, t + \Delta t)|X_t = n + 1) =$$

$$P_n(t)\big(1 - (\lambda_n(t)\Delta t + \mu_n(t)\Delta t)\big) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}(t)\Delta t + P_{n+1}\mu_{n+1}(t)\Delta t$$

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_n(t)(-\lambda_n(t)\Delta t - \mu_n(t)\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda_n(t)\Delta t + P_{n+1}\mu_n(t)\Delta t$$

Si $\Delta t \text{—}\!\!\rightarrow 0$ lo anterior es la derivada (ecuación diferencial) con el siguiente resultado:

Si $n \geq 1$

$$P'_n(t) = -P_n(t)\big(\lambda_n(t) + \mu_n(t)\big) + P_{n-1}(t)\lambda_n(t) + P_{n+1}\mu_n(t)$$

Si $n = 1$ únicamente puede producirse el fallecimiento

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda_0(t) + P_1(t)\mu_1(t)$$

Casos particulares

<u>Procesos homogéneos</u>

No dependen de t, únicamente dependen de n

$$\lambda_n(t) = \lambda_n$$

$$\mu_n(t) = \mu_n$$

Si $n \geq 1$

$$P'_n(t) = -P_n(t)(\lambda_n + \mu_n) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}\mu_n$$

Si $n = 1$ únicamente puede producirse el fallecimiento

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda_0 + P_1(t)\mu_1$$

<u>Procesos de Poisson</u>

Son procesos de nacimiento puro, no hay muerte.

$$\lambda_n(t) = \lambda \equiv cte$$

Es constante, no depende ni de t ni de n

$$\mu_n(t) = 0$$

Si $n \geq 1$

$$P'_n(t) = -P_n(t)(\lambda) + P_{n-1}(t)\lambda$$

Si $n = 1$ únicamente puede producirse el fallecimiento

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda$$

En este caso

$$\frac{P'_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda => \; P_0(t) = C\, e^{-\lambda\, t}$$

Condición inicial $P_0(t) = 1 => \; C\, e^{-\lambda\, t} = 1 => \; P_0(t) = \; e^{-\lambda\, t}$

En general

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda\, t}}{n!}$$

Esto es, un modelo de Poisson de parámetro λt.

<u>Proceso de Yule</u>

$$\lambda_n(t) = \lambda n$$

Es constante, no depende ni de t ni de n

$$\mu_n(t) = 0$$

Si $n \geq 2$

$$P'_n(t) = -P_n(t)(\lambda n) + P_{n-1}(t)\lambda(n-1)$$

$$P'_0(t) = 0$$

$$P'_1(t) = -P_1(t)\lambda$$

Procesos no homogéneos

Procesos no homogéneo de Poisson

$$\lambda_n(t) = \lambda(t)$$

No depende de n

$$\mu_n(t) = 0$$

$$P'_n(t) = -\lambda(t)P_n(t) + \lambda(t)P_{n-1}(t)$$

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda(t)$$

Procesos no homogéneo de Polýa

$$\lambda_n(t) = \frac{a+h}{b+t}$$

$$\mu = 0$$

$$P'_n(t) = -P_n(t)\lambda_n(t) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}(t)$$

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda_0(t)$$

$$P_0(t) = \left(\frac{a+h}{b+t}\right)^a$$

Si $t \longrightarrow \infty$, $P_0(t) \longrightarrow 0$

Bibliografía

Estadística para actuarios / Manuel López Cachero, Juan López de la Manzanara Barbero
Publicación: Madrid : Editorial MAPFRE

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 29. Procesos de eliminación. Generalidades. Procesos de nacimiento y muerte. Características generales. Casos particulares de interés. Diagrama de Lexis.

.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Procesos de eliminación. Generalidades. Procesos de nacimiento y muerte. Características generales

Son procesos de Markov en los que sólo se pueden realizar transiciones a estados contiguos.

$$E_{n-1} <-- \ E_n --> E_{n+1}$$

El conjunto de estados es: $E = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ discreto.

Casos particulares son los procesos de nacimiento (o vida) y muerte. La transición se establece por tasas.

Procesos de nacimiento: aquellos en los que desde E_n sólo puedes ir a E_{n+1}. Su tasa de transición se nota como $\lambda_n(t)$

Procesos de muerte: Son aquellos en los que desde E_n sólo puedes ir a E_{n-1}. Su tasa de transición se nota como $\mu_n(t)$.

Considerando un intervalo de tiempo tal que $[t, t + \Delta t]$ en este intervalo únicamente se puede realizar una transición (no se puede hacer más de una transición), y que la población en el momento t es de n individuos ($X_t = n$) se va a tener que:

$$P(Nacimiento\ en\ [t, t + \Delta t] | X_t = n) = \lambda_n(t)\Delta t$$

$$P(Muerte\ en\ [t, t + \Delta t] | X_t = n) = \mu_n(t)\Delta t$$

Siendo la probabilidad de que en t haya n individuos,

$$P(X_t = n) = P_n(t)$$

Entonces,

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)P(ninguna\ transición\ (t, t + \Delta t)|X_t = n) +$$

$$P_{n-1}(t)P(un\ nacimiento\ (t, t + \Delta t)|X_t = n - 1) +$$

$$P_{n+1}(t)P(una\ muerte\ (t, t + \Delta t)|X_t = n + 1) =$$

$$P_n(t)\big(1 - (\lambda_n(t)\Delta t + \mu_n(t)\Delta t)\big) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}(t)\Delta t + P_{n+1}\mu_{n+1}(t)\Delta t$$

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_n(t)(-\lambda_n(t)\Delta t - \mu_n(t)\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda_n(t)\Delta t + P_{n+1}\mu_n(t)\Delta t$$

Si $\Delta t \dashrightarrow 0$ lo anterior es la derivada (ecuación diferencial) con el siguiente resultado:

Si $n \geq 1$

$$P'_n(t) = -P_n(t)\big(\lambda_n(t) + \mu_n(t)\big) + P_{n-1}(t)\lambda_n(t) + P_{n+1}\mu_n(t)$$

Si $n = 1$ únicamente puede producirse el fallecimiento

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda_0(t) + P_1(t)\mu_1(t)$$

Casos particulares

Procesos homogéneos

No dependen de t, únicamente dependen de n

$$\lambda_n(t) = \lambda_n$$

$$\mu_n(t) = \mu_n$$

Si $n \geq 1$

$$P'_n(t) = -P_n(t)(\lambda_n + \mu_n) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}\mu_n$$

Si $n = 1$ únicamente puede producirse el fallecimiento

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda_0 + P_1(t)\mu_1$$

Procesos de Poisson

Son procesos de nacimiento puro, no hay muerte.

$$\lambda_n(t) = \lambda \equiv cte$$

Es constante, no depende ni de t ni de n

$$\mu_n(t) = 0$$

Si $n \geq 1$

$$P'_n(t) = -P_n(t)(\lambda) + P_{n-1}(t)\lambda$$

Si $n = 1$ únicamente puede producirse el fallecimiento

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda$$

En este caso

$$\frac{P'_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda => \ P_0(t) = C\, e^{-\lambda\, t}$$

Condición inicial $P_0(t) = 1 => \ C\, e^{-\lambda\, t} = 1 => \ P_0(t) = \ e^{-\lambda\, t}$

En general

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda\, t}}{n!}$$

Esto es, un modelo de Poisson de parámetro λt.

Proceso de Yule

$$\lambda_n(t) = \lambda n$$

Es constante, no depende ni de t ni de n

$$\mu_n(t) = 0$$

Si $n \geq 2$

$$P'_n(t) = -P_n(t)(\lambda n) + P_{n-1}(t)\lambda(n-1)$$

$$P'_0(t) = 0$$

$$P'_1(t) = -P_1(t)\lambda$$

Procesos no homogéneos

Procesos no homogéneo de Poisson

$$\lambda_n(t) = \lambda(t)$$

No depende de n

$$\mu_n(t) = 0$$

$$P'_n(t) = -\lambda(t)P_n(t) + \lambda(t)P_{n-1}(t)$$

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda(t)$$

Procesos no homogéneo de Polýa

$$\lambda_n(t) = \frac{a+h}{b+t}$$

$$\mu = 0$$

$$P'_n(t) = -P_n(t)\lambda_n(t) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}(t)$$

$$P'_0(t) = -P_0(t)\lambda_0(t)$$

$$P_0(t) = \left(\frac{a+h}{b+t}\right)^a$$

Si $t \longrightarrow \infty$, $P_0(t) \longrightarrow 0$

Diagrama de Lexis

En las ciencias sociales la dimensión temporal es esencial dado que sobre el mismo y en base al mismo, los fenómenos demográficos se mueven, varía, evolucionan, etc.

Para el estadista, demógrafo o economista es fundamental conocer la estructura por edades de las personas que componen la población. Para un actuario (de vida) una clasificación en grupos demográficos en los que no se tenga en cuenta la edad, no tiene sentido alguno.

En primer lugar se debe distinguir entre tiempo biométrico y tiempo físico.

- El tiempo biométrico hace referencia a la medida de la vida, esto es, a la edad, de las personas que componen el colectivo de estudio.
- El tiempo físico hace referencia a la época que se está viviendo, a una fecha determinada, a un periodo concreto.

Por otro lado, en demografía, se pueden distinguir tres dimensiones temporales, a saber:

- Tiempo cronológico (calendario): se refiere al periodo o momento en el que se observa el fenómeno o fenómenos demográficos (fecha o periodo).
- Tiempo en el sentido de la Duración, y como tal se estudia el tiempo que transcurre desde el evento o fenómeno demográfico hasta el momento en el que se hace el estudio del mismo.
- Líneas de vida. Para entrar en este concepto se va a definir previamente dos conceptos más: cohortes y generación.
    - Se usan las cohortes para definir grupos de personas sobre las que se da un hecho demográfico común, vivido en el mismo periodo (personas que han contraído matrimonio en el año 1995, personas que emigraron en el año 1940, etc..).
    - La generación es un caso particular de la cohorte en la que se tiene en cuenta el grupo de individuos nacidos el mismo año (hecho demográfico: nacimiento).

La línea de vida se refiere a la cohorte de pertenencia de un individuo (generalmente la generación, pero si se estudian otros fenómenos demográficos, se consideran líneas de vida desde el momento del nacimiento de estos hechos, por ejemplo, matrimonio). Es interesante conocer que en otros países a las cohortes que no se corresponden con la generación de nacimientos, se les denomina promoción (promoción de matrimonios del 94, promoción de licenciados del 2018, etc..).

La dimensión temporal se define como tiempo-duración, siendo la edad lo más frecuente pero no el único hecho que se da. La edad es el tiempo-duración que tiene su origen en el nacimiento.

Por tanto se puede expresar la cohorte como un conjunto de líneas de vida (una para cada individuo de la población).

IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

Cohorte+ Duración= Calendario

Problemas de la identidad fundamental: Generalmente se toma la edad como una variable de tipo discreto (siendo en realidad una variable de tipo continuo). Esto es, se toman edades enteras y por tanto la igualdad anterior presenta el problema de tener que definir el momento en el que se está realizando la identidad para poder determinar si se incluye o no la edad cumplida en el año de calendario que se esté tomando.

Así, en el año de calendario 2017, una persona que cumple los años en abril, nacida en 1977, tendrá 39 años a principio de año y 40 al final del mismo.

De este modo:

El 1/01/2017: 1977+39=2016

El 31/12/2017: 1977+40=2017

Esto da lugar a muchas confusiones, por lo que siempre hay que tener muy claro el momento en el que se está haciendo el cálculo de la edad.

Las edades pueden ser expresadas en:

- Años cumplidos (nº de años enteros vividos y cumplidos desde el nacimiento)
- Años iniciados (nº de años que se han iniciado tras el nacimiento)
- Edad redondeada al aniversario más próximo
- Mediante intervalos
- Como diferencia entre el año actual y el de su nacimiento.

Generalmente se usarán hipótesis para las edades no enteras, siendo frecuente la hipótesis de uniformidad (toda la población produce el hecho demográfico a mitad de año) u otro tipo de ajustes a modelos e interpolaciones.

Efectivos, flujos y cohortes

- Stocks: recuentos de efectivos en un momento temporal concreto (foto fija). Corte trasversal.
- Efectivos son aquellos que responden a la característica o hecho demográfico de estudio (nacidos, casados, muertos, migrantes..)
- Flujos (acontecimientos demográficos): Afectan siempre a un periodo de tiempo y no a un instante, fecha o momento concreto. Vinuesa (pág 32) cita a Leguina el cuál clasifica los flujos en Aniversarios cuando los hechos se expresan en edades exactas careciendo de amplitud en la duración y los flujos en sentido estricto, flujos básicos como los nacimientos, muertes, migraciones, matrimonios a lo largo de un periodo.

Los flujos pueden ser a su vez:

- Renovables: cuando se pueden experimentar varias veces a lo largo de la existencia (matrimonio, migración, maternidad, ..). No obstante algunos de ellos pueden clasificarse jurídicamente de forma que se convierta en no renovable un hecho renovable: p.ej primeras nupcias
- No renovable: El hecho más ejemplificador es la muerte.
- Ineludibles o fatales: cuando se desconoce el momento en el que ocurrirá pero se sabe que ocurrirá (la muerte)
- Irreversibles: Una vez que ocurre no pueden volver a darse. La maternidad es renovable pero es irreversible, se causa con el primer hijo y se mantiene de por vida. Y de nuevo la muerte es el hecho irreversible más evidente.

Vistos todos estos conceptos, se procede a explicar el diagrama de Lexis.

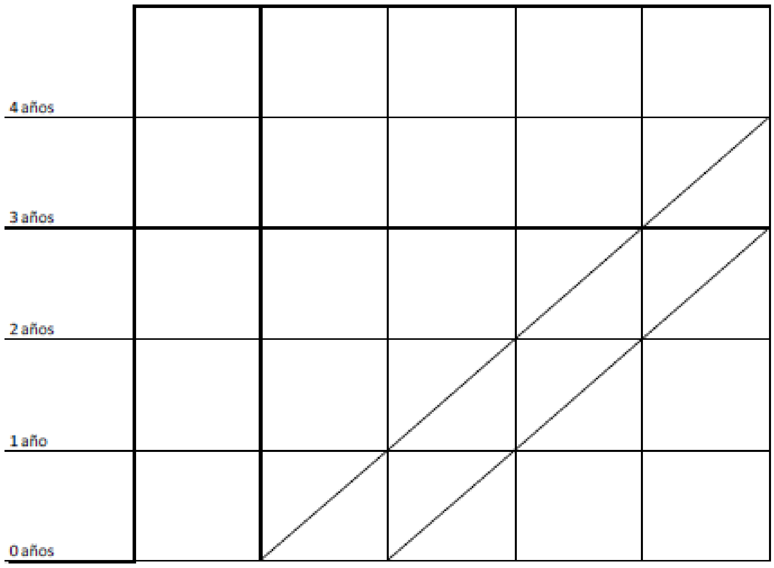
La lógica de este diagrama está basada en la representación de un individuo entre los dos puntos que mejor delimitan al mismo respecto de su tiempo: su nacimiento y su muerte. Pressat indica que "*la presentación de los fenómenos demográficos se sistematiza en el diagrama de Lexis en el que se combinan los intervalos transcurridos (o edades que son los intervalos transcurridos desde el nacimiento) y las fechas*."

El diagrama de Lexis queda pues como una retícula con igual medida en el ancho y en el largo.

- El eje vertical representa los intervalos, generalmente EDADES. DURACIÓN.
- El eje horizontal representa las fechas, que dependerán de la ubicación temporal del fenómeno que se está estudiando. CALENDARIO

La unidad de medida en ambos ejes debe ser la misma.

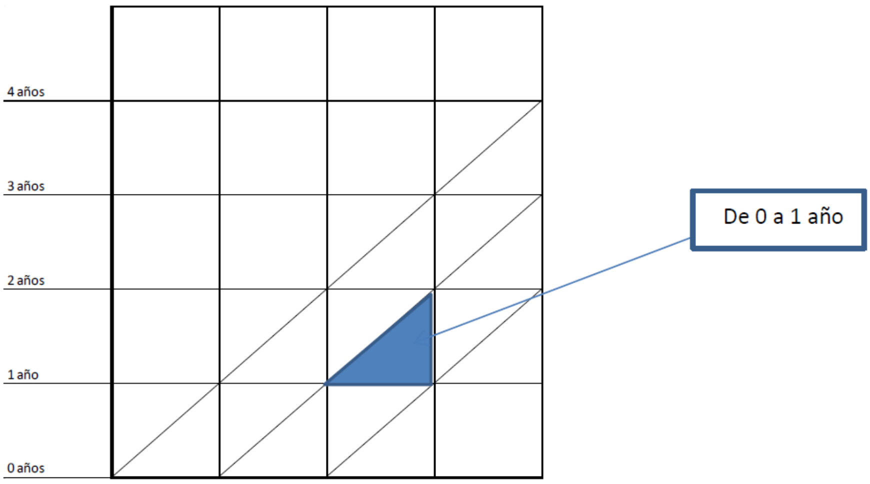
Líneas de vida: Diagonales



Flujos: Superficies:

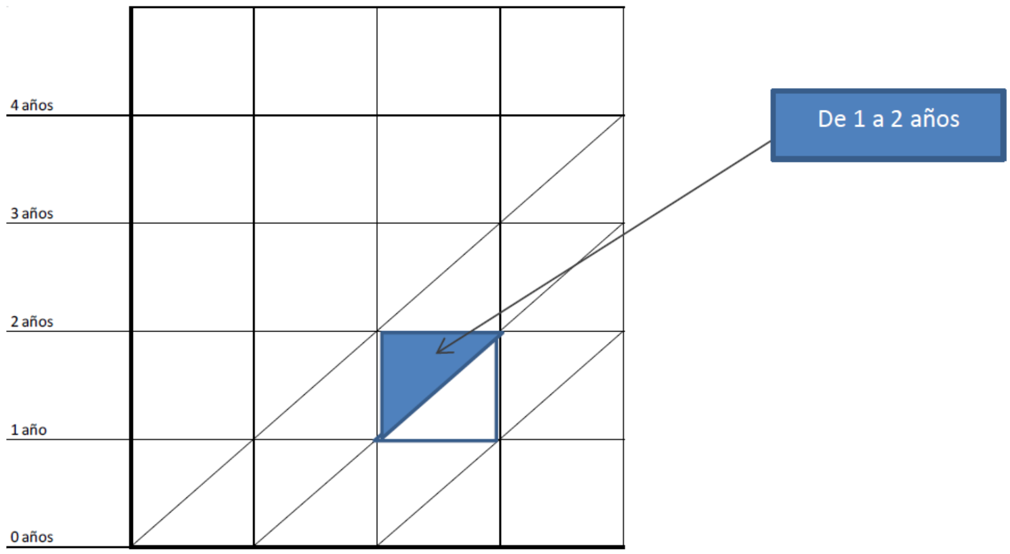
1) **Nacidos en el Año 20x2 que cumplen (tienen, van teniendo) 1 año en el año 20x3**

1 generación, 1 año, una edad



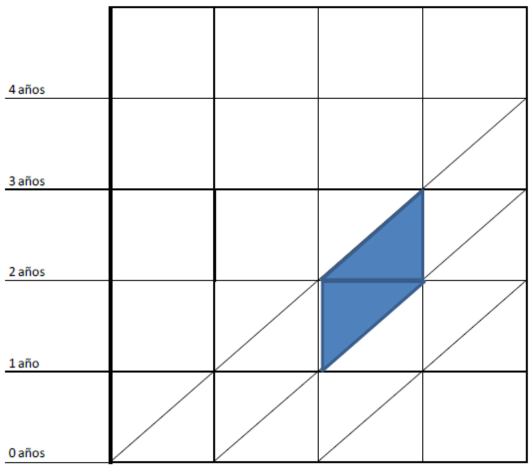
2) **Nacidos en el año 20x1 que cumplen dos años en el 20x3**

1 generación, un año, una edad



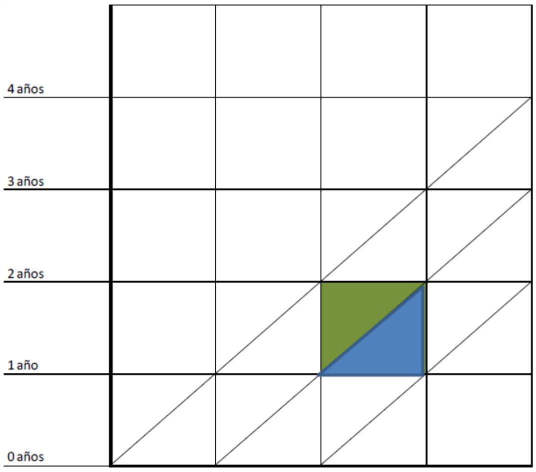
3) **Nacidos en el año 20x1 que tienen en el año 20x3 1 año y dos años(una generación, dos edades distintas en el mismo año de calendario, los cumplidos y los que cumplirán ese año)**

1 año, una generación, dos edades



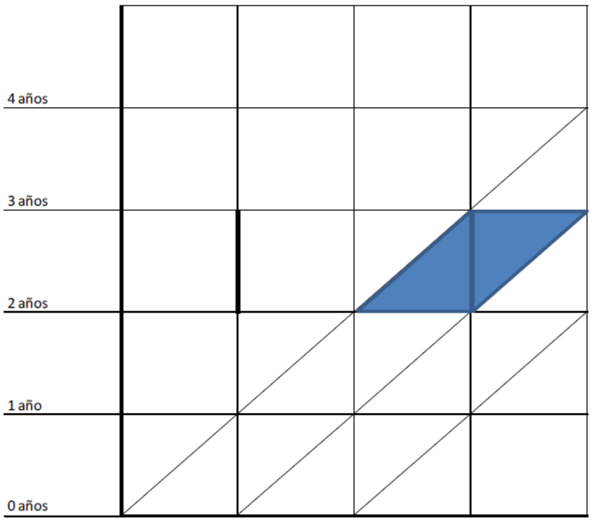
4) **Nacidos en el año 20x1 y 20x2 que cumplen un año en el año 20x3 (dos generaciones- trasversal)**

Dos generaciones, un año, una edad

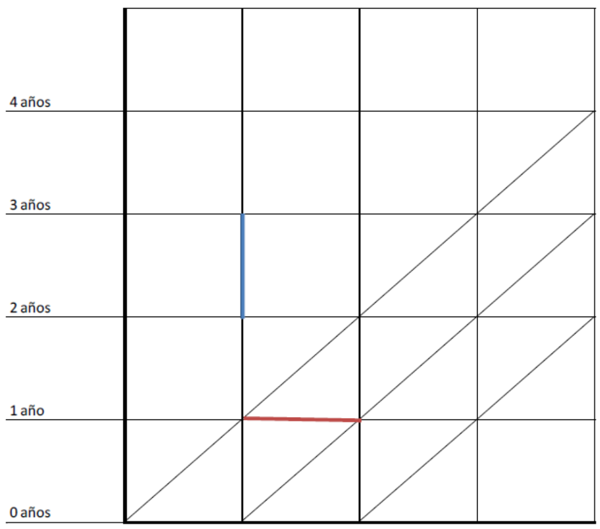


5) **Nacidos en el año 20x1 que cumplen dos años de edad (afecta a dos años de calendario)**

Una generación, una edad, dos años de calendario



Stocks:



Stocks:
Línea roja: Total de personas que cumplen un año de edad en el año 20x2.

Líneas horizontales (aniversario): coetáneas. son aniversarios, conjuntos de observaciones coetáneas

Línea azul: perpendicular al eje de coordenadas. Población total con dos años en el inicio del año 20x2.

Líneas verticales: contemporáneas

Tipos de análisis de los fenómenos demográficos

<u>Análisis longitudinal:</u> Estudia Un fenómeno demográfico en UNA cohorte a lo largo del tiempo. Se requieren largas series de tiempo y esperar, en ocasiones, a que se agoten todas las líneas de vida. Lo que hace de este análisis que sea poco práctico en la realidad. De hacerlo se suele tomar la información de forma retrospectiva.

<u>Análisis trasversal</u>: Estudia la ocurrencia de UN fenómeno demográfico, durante un periodo de tiempo (por ejemplo un año), involucrando al conjunto de cohortes. Cohorte ficticia: Es un conjunto construido bajo el supuesto de comportamientos similares con datos de las distintas cohortes del análisis trasversal. Esto permite que se hagan cálculos de tipo longitudinal sin esperar a que el fenómeno se dé de forma completa.

Intensidad de un fenómeno demográfico (en una cohorte)

Intensidad: fenómeno demográfico del número total de acontecimientos que afectan a una cohorte en relación al colectivo inicial. Se suele tomar como la frecuencia relativa o número medio de acontecimientos por individuo de la cohorte.

¿Cuál será la intensidad de la mortalidad?

Es 1, ya que todos los individuos de una generación acaban muriendo.

Si la intensidad y el calendario de un fenómeno cualquiera no varían respecto del tiempo, se dice que el fenómeno es Estacionario.

Bibliografía

Demografía. Análisis y proyecciones. Autor: Vinuesa Angulo, Julio; Editorial: Síntesis

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 30. Rentas actuariales: Capitalización y actualización actuarial. Capital diferido. Definición y propiedades. Símbolos de conmutación.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Rentas actuariales: Capitalización y actualización actuarial.

Una renta actuarial es una distribución de capitales financiero-aleatorios en la que el vencimiento de los términos amortizativos depende de la probabilidad de supervivencia de una persona (a la que se llama “cabeza”) o grupo de cabezas.

Al ser capitales financiero-aleatorios están sujetos al principio de subestimación de capitales futuros (por la parte financiera) y son aleatorios, sujetos a la probabilidad de supervivencia de la cabeza o grupo de cabezas. Por este motivo hay autores (Vilar Zanón, Heras y Gil Fana) que las denominan rentas vitalicias, por estar sujetas a la vida. Otros autores como Andrés de Pablo o Rafael Moreno dejan el término vitalicias a las rentas de duración ilimitada, si bien en relación a este punto y dado que la vida está limitada, todas las rentas son ciertamente temporales.

En este tema se usará el término vitalicio cuando la renta sea hasta el final de la vida (como el segundo grupo de autores).

Las rentas actuariales tienen las aplicaciones en prestaciones, cuando el capital garantizado se recibe en forma de renta, o como contraprestaciones, en el cálculo de las primas.

De forma sucinta se indica aquí la clasificación de las rentas:

1) En cuanto a su duración:
    a. Ilimitadas o vitalicias: cuando su duración tiene como único límite la edad límite actuarial (que se denominará omega, ω). Por ejemplo una prestación de jubilación.
    b. Temporales. Cuando su duración se limita a un periodo de tiempo concreto, por ejemplo una pensión de orfandad hasta cumplir 25 años.

2) En cuanto a su valoración:
    a. Inmediatas: el punto de valoración coincide con el inicio de la renta
    b. Diferidas: el punto de valoración es posterior al origen de la renta.

3) En cuanto al vencimiento de sus términos:
    a. Posptagable: El vencimiento es a final del periodo de maduración.
    b. Prepagable: el vencimiento es al inicio del periodo de maduración.

4) En cuanto a sus términos:
    a. Constante: Sus términos no varían a lo largo del tiempo $C_k = C$
    b. Variable: Sus términos varían a lo largo del tiempo
        i. En progresión aritmética:
            1. $C_k = C + (k-1)h$ pospagable
            2. $C_k = C + kh$ prepagable

ii. En progresión geométrica:
   1. $C_k = C\, q^{k-1}$ pospagable
   2. $C_k = C\, q^k$ prepagable

5) En cuanto a la definición de la variable aleatoria.
   a. Discretas
   b. Continuas

Capital diferido. Definición y propiedades.

El capital diferido se trata de garantizar un capital asegurado en caso de supervivencia a un periodo de n años. Este concepto se utiliza en la ciencia actuarial para explicar y expresar, a partir del mismo, los conceptos actuariales.

En un capital diferido los elementos son:

- C: la cuantía del capital es un elemento cierto.
- El momento de pago, que se dará tras n periodos si la cabeza ha sobrevivido, es también un elemento cierto que se pacta entre las partes.
- La aleatoriedad está en si la cabeza de x años llegará con vida a la edad x+n.

Se está, por tanto, ante una operación financiero-aleatoria simple en la que interviene un factor que conjuga lo financiero y lo estocástico y se denomina factor de actualización actuarial.

Factor de actualización actuarial

Sea T_x la variable aleatoria "vida residual" (o K_x la variable aleatoria número de años hasta la muerte si se está ante un modelo discreto), se va a definir una variable $\mathcal{Z}$ de tal manera que:

$$\mathcal{Z} = f(T_x) = \begin{cases} 0 & T_x \leq n \quad {}_nq_x \\ C\, v^n & T_x > n \quad {}_np_x \end{cases}$$

El valor actual actuarial es el valor esperado de esta variable, esto es:

$$E(\mathcal{Z}) = C\, v^n\, {}_np_x$$

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = e^{-\rho}$$

$**\ e^{-\rho}$ en el caso de que el interés sea de tipo continuo y entonces $\rho = Ln(1+i)$ tanto instantáneo de capitalización financiera.

v^n introduce el aspecto financiero.

${}_np_x$ es la probabilidad de que una cabeza de edad x alcance con vida la edad x+n, introduce el aspecto estocástico.

$$v^n\, {}_np_x = {}_nE_x$$

Se denomina factor de actualización actuarial a ${}_nE_x$ y es por tanto una esperanza.

Como se ha estudiado como esperanza, se indica aquí el valor de la varianza

$$V(\mathcal{Z}) = C\ v^{2n}\ {}_np_x\ \ {}_nq_x$$

Si se obtiene este concepto ${}_nE_x$ desde una visión determinista se puede decir que ${}_nE_x$ es el valor actual de una unidad monetaria que se cobra tras n periodos si la cabeza de edad x sigue con vida al alcanzar la edad x+n, esto es, el concepto de **capital diferido** que se ha visto anteriormente.

Propiedades

${}_nE_x$ en función del tanto instantáneo de mortalidad μ_x

Se puede escribir ${}_np_x$ en función de μ_x

$${}_np_x = e^{-\int_x^{x+n}\mu_t dt}$$

$${}_nE_x = e^{-\int_x^{x+n}\mu_t dt} \cdot e^{-\int_x^{x+n}\rho\, dt} = e^{-\int_x^{x+n}(\mu_t+\rho)dt}$$

Escindibilidad:

${}_nE_x$ es escindible, dado que ${}_np_x$ y v^n son escindibles.

$${}_{s+r}E_x = {}_rE_x\ \ {}_sE_{x+r}$$

Variaciones de ${}_nE_x$ en función de la edad, tipo de interés y periodo

1) $\Delta i \longrightarrow \nabla v^n \rightarrow \nabla {}_nE_x\ ,, \frac{\partial\, {}_nE_x}{\partial i} < 0$
2) $\Delta x \longrightarrow \nabla {}_np_x \rightarrow \nabla {}_nE_x\ ,, \frac{\partial\, {}_nE_x}{\partial x} < 0$ (si $\mu_{x+t} > \mu_x$
3) $\Delta n \longrightarrow \nabla {}_np_x$ y $\nabla v^n \rightarrow \nabla {}_nE_x\ ,, \frac{\partial\, {}_nE_x}{\partial n} < 0$

En el caso del factor de capitalización actuarial $1/{}_nE_x$ las propeidades son las inversas a las anteriores.

Símbolos de conmutación.

Los símbolos de conmutación están en desuso dado que se utilizan para tipos de interés constantes y gracias a las nuevas tecnologías de la información y la posibilidad de trabajar con tipos de interés variables, se va haciendo innecesario el uso de estos símbolos que fueron creados para facilitar los cálculos de rentas y seguros para un tipo de interés dado.

En el cálculo de los denominados "Capitales -Coste" en seguridad social, siendo éstos los valores de las primas únicas para los cálculos del capital coste de las rentas que deben abonar las mutuas en determinados casos de accidente de trabajo o enfermedad profesional cuando se reconoce una pensión de incapacidad permanente o por muerte y supervivencia, se siguen utilizando los símbolos de conmutación en tanto que las bases técnicas siguen usando tipo de interés fijo. En el aseguramiento privado la LOSSEAR (Ley

20/2015 del 14 de julio de Ordenación, Supervisión y Solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras) se dio un periodo de transición de 10 años para que las bases técnicas de las aseguradoras en los cálculos de las provisiones técnicas se pasase el tipo de interés técnico de fijo a variable en función de los tipos de interés de la curva de la EIOPA.

Dicho lo anterior, se definen aquí los símbolos de conmutación básicos.

Para RENTAS

$$D_x = v^x \, \ell_x$$

Siendo ℓ_x el valor de la cohore para la edad x

Es fácil demostrar que entonces

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

A partir de este símbolo D_x, se puede obtener N_x, como suma de los D_x

$$N_x = \sum_{k=1}^{\omega-1} D_{x+k}$$

A su vez S_x como suma de los N_x

$$S_x = \sum_{k=1}^{\omega-1} N_{x+k}$$

Para SEGUROS

En este caso, el dato de la cohorte que se usa es d_x (defunciones)

$$C_x = v^{x+1} \, d_x$$

Si se considera que la muerte se produce a mitad de año:

$$\hat{C}_x = v^{x+1/2} \, d_x$$

Análogamente a lo que se ha hecho con las rentas, se busca el símbolo que representa la suma de C_x

$$M_x = \sum_{k=1}^{\omega-1} C_{x+k}$$

Si se considera que la muerte se produce a mitad de año:

$$\widehat{M}_x = v^{1/2} \, M_x$$

Y para finalizar

$$R_x = \sum_{k=1}^{\omega-1} M_{x+k}$$

$$\hat{R}_x = v^{1/2} \, R_x$$

Bibliografía

Matemática de los seguros de vida · Heras Martínez, Antonio · Vilar Zanón, José Luis · Fundación MAPFRE Estudios

Matemática de los seguros de vida Autores: Rafael Moreno Ruiz, Eduardo Trigo Martínez, Olga Gómez Pérez-Cacho Editores: Pirámide

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 31. Rentas constantes sobre una cabeza. Rentas prepagables y pospagables. Rentas inmediatas, diferidas, temporales y mixtas.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Rentas constantes sobre una cabeza. Rentas prepagables y pospagables. Rentas inmediatas, diferidas, temporales y mixtas.

Una renta actuarial es una distribución de capitales financiero-aleatorios en la que el vencimiento de los términos amortizativos depende de la probabilidad de supervivencia de una persona (a la que se llama “cabeza”) o grupo de cabezas.

Al ser capitales financiero-aleatorios están sujetos al principio de subestimación de capitales futuros (por la parte financiera) y son aleatorios, sujetos a la probabilidad de supervivencia de la cabeza o grupo de cabezas. Por este motivo hay autores (Vilar Zanón, Heras y Gil Fana) que las denominan rentas vitalicias, por estar sujetas a la vida. Otros autores como Andrés de Pablo o Rafael Moreno dejan el término vitalicias a las rentas de duración ilimitada, si bien en relación a este punto y dado que la vida está limitada, todas las rentas son ciertamente temporales.

En este tema se usará el término vitalicio cuando la renta sea hasta el final de la vida (como el segundo grupo de autores).

Las rentas actuariales tienen las aplicaciones en prestaciones, cuando el capital garantizado se recibe en forma de renta, o como contraprestaciones, en el cálculo de las primas.

Dentro de las distintas clasificaciones que se pueden estudiar para las rentas actuariales, las rentas constantes son aquellas en las que sus términos no varían a lo largo del tiempo, a diferencia de las que son variables:

Clasificación de rentas en cuanto a sus términos:

a. Constante: Sus términos no varían a lo largo del tiempo $C_k = C$

b. Variable: Sus términos varían a lo largo del tiempo

    i. En progresión aritmética:
        1. $C_k = C + (k-1)h$ pospagable
        2. $C_k = C + kh$ prepagable
    ii. En progresión geométrica:
        1. $C_k = C\, q^{k-1}$ pospagable
        2. $C_k = C\, q^{k}$ prepagable

Para estudiar las rentas constantes se va a suponer que $C_k = C = 1$ de forma quelos valores actuales actuariales se obtendrán multiplicando el valor de un C distinto a 1 por el valor unitario de la renta.

En este tema se van a ver los siguientes tipos de renta:

Rentas constantes vitalicias (ilimitadas), inmediatas y prepagables

Como suma de capitales diferidos, esta renta se puede expresar como

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kE_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Esto es, un capital de 1 unidad monetaria que va a recibir (o ser entregado por) la cabeza de edad x anualmente desde que cumple la edad x hasta su fallecimiento, valorada en el momento de cumplir x años.

Es ilimitada porque se valora hasta el año inmediatamente anterior a ω. Se considera que ω es la edad límite, edad a la que nadie llega, es el infinito actuarial. Es inmediata porque se comienza a recibir (o pagar) desde la propia edad x, y es prepagable porque sus términos vencen en el extremo inferior del periodo de maduración.

También se pueden estudiar como el valor esperado del valor actual de una renta financiera:

$\mathcal{Z}$	K_x	Probabilidad
$\ddot{a}_{\overline{0}\|i} = 1$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$\ddot{a}_{\overline{1}\|i}$	1	${}_{1/}q_x$
$\ddot{a}_{\overline{2}\|i}$	2	${}_{2/}q_x$
..	..	..
$\ddot{a}_{\overline{\omega-x-1}\|i}$	$\omega - x - 1$	${}_{\omega-x-1/}q_x$

$$P\left(\mathcal{Z} = \ddot{a}_{\overline{k}|i}\right) = {}_{k/}q_x$$

$$E(\mathcal{Z}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k}|i} \; {}_{k/}q_x = \ddot{a}_x$$

Teniendo en cuenta que

$$\ddot{a}_{\overline{k+1}|i} - \ddot{a}_{\overline{k}|i} = (1+i)^{-k}$$

Se prueba que:

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k}|i} \; {}_{k/}q_x = \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kE_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Rentas constantes vitalicias (ilimitadas), inmediatas y pospagables

Como suma de capitales diferidos, esta renta se puede expresar como

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_kE_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Esto es, un capital de 1 unidad monetaria que va a recibir (o ser entregado por) la cabeza de edad x anualmente desde que cumple la edad x+1 hasta su fallecimiento, valorada en el momento de cumplir x años.

Es ilimitada porque se valora hasta el año inmediatamente anterior a ω. Se considera que ω es la edad límite, edad a la que nadie llega, es el infinito actuarial, por eso aquí la parte de arriba del sumatorio es igual al caso anterior.

Es inmediata porque se comienza a recibir (o pagar) desde la propia edad x, y es prepagable porque sus términos vencen en el extremo superior del periodo de maduración (cuando cumple x+1 recibirá el primer término)

Para relacionarlo con la renta financiera se tiene en cuenta el mismo razonamiento que se ha seguido en el primer punto y se llega a:

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k|}i} \; {}_{k/}q_x = \ddot{a}_x - 1$$

Rentas constantes vitalicias (ilimitadas), diferidas y prepagables

Como suma de capitales diferidos, esta renta se puede expresar como

$$ {}_{d/}\ddot{a}_x = \sum_{k=d}^{\omega-x-1} {}_kE_x = \frac{N_{x+d}}{D_x}$$

Esto es, un capital de 1 unidad monetaria que va a recibir (o ser entregado por) la cabeza de edad x anualmente desde que cumple la edad x+d hasta su fallecimiento, valorada en el momento de cumplir x años.

Es ilimitada porque se valora hasta el año inmediatamente anterior a ω. Se considera que ω es la edad límite, edad a la que nadie llega, es el infinito actuarial. Es diferida porque se comienza a recibir (o pagar) no desde la propia edad x, sino d periodos después, y es prepagable porque sus términos vencen en el extremo inferior del periodo de maduración.

Su relación con la renta financiera es igual a lo explicado en los puntos anteriores modificando los sumatorios en cada caso.

Rentas constantes vitalicias (ilimitadas), diferidas y pospagables

Como suma de capitales diferidos, esta renta se puede expresar como

$$ {}_{d/}a_x = \sum_{k=d+1}^{\omega-x-1} {}_kE_x = \frac{N_{x+d+1}}{D_x}$$

Esto es, un capital de 1 unidad monetaria que va a recibir (o ser entregado por) la cabeza de edad x anualmente desde que cumple la edad x+d+1 hasta su fallecimiento, valorada en el momento de cumplir x años.

Es ilimitada porque se valora hasta el año inmediatamente anterior a ω. Se considera que ω es la edad límite, edad a la que nadie llega, es el infinito actuarial. Es diferida porque se comienza a recibir (o pagar) no desde la propia edad x, sino d+1 periodos después, y es pospagable porque sus términos vencen en el extremo superior del periodo de maduración.

Su relación con la renta financiera es igual a lo explicado en los puntos anteriores modificando los sumatorios en cada caso.

Rentas constantes temporales, inmediatas y prepagables

Como suma de capitales diferidos, esta renta se puede expresar como

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Esto es, un capital de 1 unidad monetaria que va a recibir (o ser entregado por) la cabeza de edad x anualmente desde que cumple la edad x hasta que cumple la edad x+n, valorada en el momento de cumplir x años.

Es temporal porque se valora hasta la edad x+n. Es inmediata porque se comienza a recibir (o pagar) desde la propia edad x, y es prepagable porque sus términos vencen en el extremo inferior del periodo de maduración.

En el caso de ponerse en función de la renta financiera aquí cambia un aspecto y es que se le añade un sumando sobre la probabilidad de sobrevivir:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k|i}}\ {}_{k/}q_x + {}_np_x\ \ddot{a}_{\overline{k|i}}$$

Rentas constantes temporales, inmediatas y pospagables

Como suma de capitales diferidos, esta renta se puede expresar como

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} {}_kE_x = \frac{N_x - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Esto es, un capital de 1 unidad monetaria que va a recibir (o ser entregado por) la cabeza de edad x anualmente desde que cumple la edad x hasta que cumple la edad x+n, valorada en el momento de cumplir x años.

Es temporal porque se valora hasta la edad x+n. Es inmediata porque se comienza a recibir (o pagar) desde la propia edad x, y es pospagable porque sus términos vencen en el extremo superior del periodo de maduración.

En el caso de ponerse en función de la renta financiera aquí cambia un aspecto y es que se le añade un sumando sobre la probabilidad de sobrevivir:

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{\overline{k|i}}\ {}_{k/}q_x + {}_np_x\ a_{\overline{k|i}}$$

Rentas constantes mixtas prepagables: temporales y diferidas

Como suma de capitales diferidos, esta renta se puede expresar como

$${}_{d/}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=d}^{n-1} {}_kE_x = \frac{N_{x+d} - N_{x+d+n}}{D_x}$$

Esto es, un capital de 1 unidad monetaria que va a recibir (o ser entregado por) la cabeza de edad x anualmente desde que cumple la edad x+d hasta que cumple la edad x+n, valorada en el momento de cumplir x años.

Es temporal porque se valora hasta la edad x+n. Es diferida porque se comienza a recibir (o pagar) no desde la propia edad x, sino d periodos después, y es prepagable porque sus términos vencen en el extremo inferior del periodo de maduración.

Su relación con la renta financiera es igual a lo explicado en los puntos anteriores modificando los sumatorios en cada caso.

Rentas constantes mixtas pospagables: temporales y diferidas

Como suma de capitales diferidos, esta renta se puede expresar como

$$ {}_{d/}a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=d}^{n} {}_{k}E_x = \frac{N_{x+d} - N_{x+d+n+1}}{D_x} $$

Esto es, un capital de 1 unidad monetaria que va a recibir (o ser entregado por) la cabeza de edad x anualmente desde que cumple la edad x+d hasta que cumple la edad x+n, valorada en el momento de cumplir x años.

Es temporal porque se valora hasta la edad x+n. Es diferida porque se comienza a recibir (o pagar) no desde la propia edad x, sino d periodos después, y es pospagable porque sus términos vencen en el extremo superior del periodo de maduración.

Su relación con la renta financiera es igual a lo explicado en los puntos anteriores modificando los sumatorios en cada caso.

Rentas prepagables y pospagables.

Se han visto en el desarrollo del primer epígrafe, se ve aquí la relación entre las rentas prepagables y las pospagables, en términos de capital unitario:

$$ a_x = \ddot{a}_x - 1 $$

Por otro lado se pueden obtener unas y otras con **<u>expresiones recursivas:</u>**

$$ \ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1} $$

$$ a_x = v \cdot p_x + v \cdot p_x \cdot a_{x+1} = (1 + a_{x+1})(v \cdot p_x) $$

Relaciones con los seguros

$$ \ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} $$

Donde A_x es el seguro de vida entera y $d = 1 - \frac{1}{1+i}$

Por su parte:

$$ a_x = \frac{1 - (1 + i)A_x}{i} $$

Rentas inmediatas, diferidas, temporales y mixtas.

Se han visto en el desarrollo del primer epígrafe, se ve aquí la relación entre las rentas

Descomposición de renta inmediata en temporal y diferida

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + {}_{d/}\ddot{a}_x$$

$$a_x = a_{x:\overline{n|}} + {}_{n/}a_x$$

Para una misma edad y un mismo periodo de temporalidad-diferimiento.

Renta diferida como combinación lineal de dos inmediatas

Como resultado de lo anterior:

$${}_{d/}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$${}_{d/}a_x = a_x - a_{x:\overline{n|}}$$

Y también

$${}_{d/}a_x = {}_dE_x \; a_{x+d}$$

Bibliografía

Matemática de los seguros de vida · Heras Martínez, Antonio · Vilar Zanón, José Luis · Fundación MAPFRE Estudios

Matemática de los seguros de vida Autores: Rafael Moreno Ruiz, Eduardo Trigo Martínez, Olga Gómez Pérez-Cacho Editores: Pirámide

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 32. Rentas sobre una cabeza variables en progresión aritmética y geométrica. Estudio de las inmediatas, diferidas y temporales pospagables.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Rentas sobre una cabeza variables en progresión aritmética y geométrica.

Una renta actuarial es una distribución de capitales financiero-aleatorios en la que el vencimiento de los términos amortizativos depende de la probabilidad de supervivencia de una persona (a la que se llama "cabeza") o grupo de cabezas.

Al ser capitales financiero-aleatorios están sujetos al principio de subestimación de capitales futuros (por la parte financiera) y son aleatorios, sujetos a la probabilidad de supervivencia de la cabeza o grupo de cabezas. Por este motivo hay autores (Vilar Zanón, Heras y Gil Fana) que las denominan rentas vitalicias, por estar sujetas a la vida. Otros autores como Andrés de Pablo o Rafael Moreno dejan el término vitalicias a las rentas de duración ilimitada, si bien en relación a este punto y dado que la vida está limitada, todas las rentas son ciertamente temporales.

En este tema se usará el término vitalicio cuando la renta sea hasta el final de la vida (como el segundo grupo de autores).

Las rentas actuariales tienen las aplicaciones en prestaciones, cuando el capital garantizado se recibe en forma de renta, o como contraprestaciones, en el cálculo de las primas.

Dentro de las distintas clasificaciones que se pueden estudiar para las rentas actuariales, las rentas constantes son aquellas en las que sus términos no varían a lo largo del tiempo, a diferencia de las que son variables:

Clasificación de rentas en cuanto a sus términos:

a. Constante: Sus términos no varían a lo largo del tiempo $C_k = C$

b. Variable: Sus términos varían a lo largo del tiempo

    i. En progresión aritmética:
        1. $C_k = C + (k-1)h$ pospagable
        2. $C_k = C + kh$ prepagable
    ii. En progresión geométrica:
        1. $C_k = C\ q^{k-1}$ pospagable
        2. $C_k = C\ q^k$ prepagable

Por tanto se van a estudiar los casos de rentas variables en progresión aritmética y geométrica, con los casos concretos del siguiente epígrafe.

Estudio de las inmediatas, diferidas y temporales pospagables.

Progresión aritmética

Inmediata (pospagable)

En el caso de la progresión aritmética, como se indicaba en la introducción, se suma un término fijo en cada anualidad, de forma que las cuantías son, en el caso pospagable:

C, C+h, C+2h, ..., C+(k-1)h

Siendo C+(k-1)h el término general.

La notación para llegar al valor actual actuarial, dado que no se va a trabajar con rentas unitarias por tener un crecimiento aritmético, va a ser:

$(VaC)_x$ siguiendo la notación de Heras, Vilar Zanón y Gil-Fana, aunque también se puede encontrar en obras como las de Rafael Moreno, la nomenclatura $(Va\div)_x$

$$(VaC)_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} C_k \ {}_k p_x \ v^k = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} C_k \ {}_k E_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} (C+(k-1)h) \ {}_k E_x$$

Donde h es la razón de la progresión aritmética.

Esta expresión no es más que la suma de capitales diferidos con cuantías que crecen o decrecen (en función del signo de h) en progresión aritmética. Si en algún momento, por el signo de la h, la cuantía es negativa, al no tener sentido, se entiende que la renta deja de existir al vencimiento.

Como planteamiento agregado se tiene:

$\mathcal{Z}$	K_x	Probabilidad
$A_{\overline{(C,h)0\rvert \imath}} = 0$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$A_{\overline{(C,h)1\rvert \imath}}$	1	${}_{1/}q_x$
$A_{\overline{(C,h)2\rvert \imath}}$	2	${}_{2/}q_x$
..	..	..
$A_{\overline{(C,h)\omega-x-1\rvert \imath}}$	$\omega-x-1$	${}_{\omega-x-1/}q_x$

El valor actual actuarial es el valor esperado de la variable $\mathcal{Z} = f(K_x)$

$$E(\mathcal{Z}) = (VaC)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} A_{\overline{(C,h)k\rvert \imath}} \ {}_{k/}q_x = 0 + \sum_{k=1}^{\omega-x-1} A_{\overline{(C,h)k\rvert \imath}} \ {}_{k/}q_x$$

Dando el mismo resultado que el expresado como suma de capitales diferidos.

Este $(VaC)_x$ se puede poner como suma de valores actuales actuariales de dos rentas constantes, una inmediata y el resto diferidas.

$$(VaC)_x = C\ a_x + h \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_{k/}a_x$$

En símbolos de conmutación:

1) $C\ a_x = C\ \frac{N_{x+1}}{D_x}$
2) $h\sum_{k=0}^{\omega-x-1}\ _{k/}a_x = h\sum_{k=1}^{\omega-x-1}(k-1)\,_kE_x = h\sum_{k=1}^{\omega-x-1}(k-1)\frac{D_{x+k}}{D_x} =$

$$\frac{h}{D_x}\sum_{k=1}^{\omega-x-1}(k-1)D_{x+k} = \frac{h}{D_x}[D_{x+2} + 2D_{x+3} + 3D_{x+4} + \cdots + (\omega - x - 2)D_{\omega-1}] =$$

$$= \frac{h}{D_x}[(D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \cdots + D_{\omega-1}) + (D_{x+3} + D_{x+4} + \cdots + D_{\omega-1}) + (\dots) + D_{\omega-1}] =$$

$$\frac{h}{D_x}[(N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \cdots + N_{\omega-1})] = \frac{h}{D_x}(S_{x+2})$$

Por tanto,

$$(VaC)_x = C\ a_x + h\sum_{k=1}^{\omega-x-1}\ _{k/}a_x = C\ \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{h}{D_x}(S_{x+2})$$

Caso particular "Increasing" h=C=1

En este caso $C_k = C\ \cdot\ k$

$$(VaC)_x = (Ia)_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} k\ \cdot\ \ _kE_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

Diferida (pospagable)

Una renta vitalicia (ilimitada) diferida d periodos sobre una cabeza de edad x es aquella que se paga o recibe mientras la cabeza se mantiene con vida a partir de un momento de tiempo d periodos después de la edad x. Al ser pospagable el primer término se paga/recibe al cumplir la edad x+d+1, y donde los términos progresas en razón aritmética de valor h.

Aplicando la expresión general anteriormente vista

$$d/(VaC)_x = \sum_{k=d+1}^{\omega-x-1} C_k\ \ _kp_x\ \ v^k = \sum_{k=d+1}^{\omega-x-1} C_k\ \ _kE_x = \sum_{k=d+1}^{\omega-x-1}(C + (k - d - 1)h)\ \ _kE_x$$

$$d/(VaC)_x = C\ \frac{N_{x+d+1}}{D_x} + \frac{h}{D_x}(S_{x+d+2})$$

Temporal (pospagable)

Una renta actuarial temporal inmediata y pospagable sobre una cabeza de edad x es aquella que se paga/recibe mientras la cabeza permanece con vida hasta un momento determinado n periodos después de la edad x, y cuyos términos vencen en los extremos superiores de los periodos de maduración, progresando 8crecimiento o decrecimiento) en progresión aritmética de razón h.

$$(VaC)_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} C_k \;\; {}_kp_x \;\; v^k = \sum_{k=1}^{n} C_k \;\; {}_kE_x = \sum_{k=1}^{n} (C + (k-1)h) \;\; {}_kE_x$$

$$(VaC)_{x:\overline{n|}} = C\,\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{h}{D_x}(S_{x+2} - S_{x+n+1} - (n-1)N_{x+n+1})$$

Mixta (diferida y temporal)

En el caso de que sea diferida y temporal

$$d/(VaC)_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=d+1}^{d+n} C_k \;\; {}_kp_x \;\; v^k = \sum_{k=d+1}^{d+n} C_k \;\; {}_kE_x = \sum_{k=d+1}^{d+n} (C + (k-d-1)h) \;\; {}_kE_x$$

$$d/(VaC)_{x:\overline{n|}} = C\,\frac{N_{x+d+1} - N_{x+d+n+1}}{D_x} + \frac{h}{D_x}(S_{x+d+2} - S_{x+d+n+1} - (n-1)N_{x+d+n+1})$$

Progresión geométrica

En este tipo de rentas la variación se produce con una razón multiplicativa, q=1+r, de modo que:

$$C, C\,q, C\,q^2, \ldots, Cq^{k-1}$$

Se indica Cq^{k-1} porque el estudio se hace sobre las rentas pospagables (k=1,2,...,w-x-1).

Cq^{k-1} es el término general

Inmediata

Una renta vitalicia, ilimitada, inmediata, pospagable (los vencimientos en los extremos superiores de los periodos de maduración), sobre una cabeza de edad x y que varía en progresión geométrica de razón q, valorada a la edad x.

La notación es $(VaC(q))_x$

$$(VaC(q))_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} C_k \;\; {}_kE_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} Cq^{k-1} \;\; {}_kE_x = C\sum_{k=1}^{\omega-x-1} q^{k-1} \;\; {}_kE_x = C\ {}^{q}a_x$$

Siendo ${}^{q}a_x$ el valor de la renta unitaria (C=1).

Para facilitar el cálculo se suele hacer un cambio en el tipo de interés:

$${}^{q}a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} q^{k-1} \;\; {}_kE_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} q^{k-1} \;\; {}_kE_x = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\omega-x-1} q^k \;\; v^k \;\; {}_kp_x =$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\omega-x-1} (qv)^k \;\; {}_kp_x$$

Ahora se puede establecer que $qv = v'$

$$v' = \frac{1+i}{q} - 1$$

De modo que:

$$^{q}a_x = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\omega-x-1} (v')^k \;\; {}_kp_x = \frac{1}{q}\,\frac{N'_{x+1}}{D'_x}$$

Diferida

En este caso la renta se empieza a pagar/recibir a partir del punto d de diferimiento, por tanto el término general es Cq^{k-d-1}

$$d/(VaC(q))_x = \sum\nolimits_{k=d+1}^{\omega-x-1} C_k \;\; {}_kp_x \;\; v^k = \sum\nolimits_{k=d+1}^{\omega-x-1} Cq^{k-d-1} \;\; {}_kp_x \;\; v^k = C \;\; {}_{d/}^{\;q}a_x$$

Haciendo los cambios anteriores,

$$qv = v'$$

$$v' = \frac{1+i}{q} - 1$$

se puede expresar como:

$${}_{d/}^{\;q}a_x = \frac{1}{q^{d+1}}\,\frac{N'_{x+d+1}}{D'_x}$$

Temporal

$$(VaC(q))_{x:\overline{n|}} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} C_k \;\; {}_kp_x \;\; v^k = C \; {}^{q}a_{x:\overline{n|}}$$

$${}^{q}a_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{q}\,\frac{N'_{x+1} - N'_{x+n+1}}{D'_x}$$

Mixta (diferida y temporal)

$$d/(VaC(q))_{x:\overline{n|}} = \sum\nolimits_{k=d+1}^{n} C_k \;\; {}_kp_x \;\; v^k = C \;\; {}_{d/}^{\;q}a_{x:\overline{n|}}$$

$${}_{d/}^{\;q}a_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{q^{d+1}}\,\frac{N'_{x+d+1} - N'_{x++d+n+1}}{D'_x}$$

Bibliografía

Matemática de los seguros de vida · Heras Martínez, Antonio · Vilar Zanón, José Luis · Fundación MAPFRE Estudios

Matemática de los seguros de vida Autores: Rafael Moreno Ruiz, Eduardo Trigo Martínez, Olga Gómez Pérez-Cacho Editores: Pirámide

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 33. Rentas fraccionarias. Rentas continuas. Relaciones con las anuales. Expresiones aproximadas.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Rentas fraccionarias.

En la técnica aseguradora se emplean dos términos al fraccionar primas:

- Fraccionadas: las bases de cálculo coinciden con los periodos de cobertura y las fracciones de la prima anual no tienen poder liberatorio. La corrección que sufren es, como máximo, por el tipo de interés aplicado en el aplazamiento.
- Fraccionarias: Este concepto conlleva una adaptación de las bases de cálculo actuarial a los periodos de la operación. Las fracciones aquí sí tienen poder liberatorio ya que la fracción se corresponde con el riesgo en la misma y al tipo de interés técnico de dicha fracción.

En el caso de rentas fraccionarias, dado que las bases de cálculo no suelen estar disponibles para periodos diferentes del año, la solución técnica es reducir la operación a valores equivalentes.

Aproximaciones

Existen distintas aproximaciones, aquí se van a estudiar dos, pero existen otras bajo Taylor, Woolhouse (a partir de Euler-McLaurin), equivalentemente Lubbock, etc..

Linealidad de los Dx

Bajo esta hipótesis se obtienen expresiones aproximadas muy utilizadas en la práctica, para los valores actuales actuariales de las rentas fraccionarias.

Se debe tener en cuenta que la hipótesis de linealidad se hace sobre las Dx y no sobre la cohorte lx, ya que en ese caso la hipótesis se haría bajo la uniformidad de los fallecimientos.

Suponiendo un fraccionamiento de m periodos intranuales:

$$a_x^{m)} = \frac{1}{m} v^{1/m} {}_{1/m}p_x + \frac{1}{m} v^{2/m} {}_{2/m}p_x + \cdots$$

$$= \frac{1}{m} {}_{\frac{1}{m}}E_x + \frac{1}{m} {}_{\frac{2}{m}}E_x + \cdots + \frac{1}{m} {}_{\frac{m}{m}}E_x + \frac{1}{m} {}_{1+\frac{m}{m}}E_x + \cdots$$

$$= \frac{1}{m} \left(\frac{D_{x+\frac{1}{m}}}{D_x} + \frac{D_{x+\frac{2}{m}}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+1+\frac{1}{m}}}{D_x} + \cdots \right) =$$

$$\sum\nolimits_{p=0}^{\omega-x-1} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m} \frac{D_{x+p+\frac{k}{m}}}{D_x} \right) =$$

$$\frac{1}{mD_x} \sum\nolimits_{p=0}^{\omega-x-1} \left(\sum_{k=1}^{m} D_{x+p+\frac{k}{m}} \right)$$

Aplicando la hipótesis de linealidad en un periodo p cualquiera y bajo

$$f(x+h) \approx f(x) + h[f(x+1) - f(x)]$$

Tal que, si h=k/m y dando valores a k (partes de m)

$$D_{x+p+\frac{k}{m}} \approx D_{x+p} + \frac{k}{m}(D_{x+p+1} - D_{x+p})$$

Sustituyendo en la anterior expresión:

$$a_x^{m)} = \frac{N_x}{D_x} + \frac{m+1}{2m} = \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m} = a_x + 1 - \frac{m+1}{2m} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Rentas diferidas

$$_{n/}a_x^{m)} = {}_{n/}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$$

$$_{n/}\ddot{a}_x^{m)} = {}_{n/}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$$

Rentas temporales

$$a_{\overline{x:n|}}^{m)} = a_{\overline{x:n|}} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{m)} = \ddot{a}_{\overline{x:n|}} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$$

Rentas mixtas

$$_{r/}a_{\overline{x:n|}}^{m)} = {}_{r/}a_{\overline{x:n|}} + \frac{m-1}{2m}({}_rE_x - {}_{r+n}E_x)$$

$$_{r/}\ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{m)} = {}_{r/}\ddot{a}_{\overline{x:n|}} - \frac{m-1}{2m}({}_rE_x - {}_{r+n}E_x)$$

Rentas variables en progresión geométrica

Aproximación de Woolhouse

En estas rentas, la expresión general de las cuantías c_k que se fraccionan aritmética y uniformemente es:

$$c_k = c\ q^{k-1}$$

$$k = 1, 2,3, \dots, r.., \omega - x - 1$$

q es la razón de la progresión, la cuál puede expresarse en función de la tasa g de crecimiento o decrecimiento.

$$q = 1 + g$$

Inmediata

$$^{q}a_x^{m)} = {}^{q}a_x\left(1 + \frac{m-1}{2m}g\right) + \frac{m-1}{2m}$$

$$^{q}\ddot{a}_x^{m)} = {}^{q}\ddot{a}_x\left(1 + \frac{m-1}{2m}\frac{q}{1+g}\right) - \frac{m-1}{2m}\frac{1}{1+g}$$

Rentas diferidas

$$_{n/}^{\;q}a_x^{m)} = {}_nE'_x\left[{}^{q}a_{x+n}\left(1 + \frac{m-1}{2m}g\right) + \frac{m-1}{2m}\right]$$

$$_{n/}^{\;q}\ddot{a}_x^{m)} = {}_nE'_x\left[{}^{q}\ddot{a}_{x+n}\left(1 - \frac{m-1}{2m}\frac{g}{1+g}\right) - \frac{m-1}{2m}\frac{1}{1+g}\right]$$

Rentas temporales

$$^{q}a_{\overline{x:n|}}^{m)} = \left[a_{\overline{x:n|}}\left(1 + g\frac{m-1}{m}\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE'_x)$$

$$^{q}\ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{m)} = \left[\ddot{a}_{\overline{x:n|}}\left(1 - \frac{m-1}{2m}\frac{g}{1+g}\right)\right] - \frac{m-1}{2m}\frac{1}{1+g}(1 - {}_nE'_x)$$

La segunda aproximación es a partir de la fórmula de Mc Laurin que por estar relacionada con el siguiente epígrafe de rentas continuas, se expone a continuación.

Rentas continuas. Relaciones con las anuales. Expresiones aproximadas.

A partir del concepto de renta continua, suponiendo que la cabeza recibe o paga bajo este supuesto infinitesimal y uniforme, una unidad monetaria anual mientras viva. La expresión del valor medio o esperanza matemática (su valor actual actuarial) de la renta es una variable aleatoria definida en el campo de los números reales positivos.

La renta actuarial continua es

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_tp_x\ dt$$

Mientras que la financiera

$$\bar{a}_{\overline{t|}i} = \int_0^{t} e^{-\delta t}\ dz = \frac{1-v^t}{\delta}$$

$$\delta = Ln(1+i)$$

$$v^t = e^{-\delta t}$$

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}i}\, g_x(t)\ dt$$

Con $g_x(t)$ función de densidad de $G_x(t)$ que es la función de distribución de la edad de muerte de una persona de edad x (¬Función de distribución truncada de edad de muerte de un recién nacido).

En función del tanto instantáneo de mortalidad

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_x\ dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds}\ dt$$

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^t \delta+\mu_{x+s}\, ds}\ dt$$

Que satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} - (\delta + \mu_x)\bar{a}_x + 1 = 0$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{d\,{}_tp_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) = \frac{l'_{x+t}}{l_x} - \frac{l_{x+t}l'_x}{{l_x}^2}$$

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = \int_0^\infty \frac{l'_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t}\ dt - \frac{l'_x}{l_x}\int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t} dt$$

Resolviendo por partes:

$$\int_0^\infty \frac{l'_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t}\ dt = -1 + \delta\bar{a}_x$$

$$\frac{l'_x}{l_x}\int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t} dt = -\mu_x\bar{a}_x$$

Luego,

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = -1 + \bar{a}_x(\delta + \mu_x)$$

Que se resuelve con el desarrollo de McLaurin

$$\bar{a}_x \approx a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\delta + \mu_x)$$

Si se toma h=1/m

$$\bar{a}_x = a_x^{m)} + \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}(\delta + \mu_x)$$

Igualando y despejando se llega a la siguiente expresión para renta fraccionaria inmediata y pospagable:

$$a_x^{m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x)$$

Bibliografía

Matemática de los seguros de vida · Heras Martínez, Antonio · Vilar Zanón, José Luis · Fundación MAPFRE Estudios

Matemática de los seguros de vida Autores: Rafael Moreno Ruiz, Eduardo Trigo Martínez, Olga Gómez Pérez-Cacho Editores: Pirámide

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 34. Rentas sobre varias cabezas. Inmediatas, diferidas, temporales y mixtas: Rentas de duración hasta la disolución y/o extinción del grupo. Caso general. Sustitución de una cabeza o varias por términos ciertos.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Dado un conjunto de capitales y un intervalo cerrado [t0, tn], en el que se ha efectuado una partición en tantos subintervalos como capitales, se denomina "renta" en sentido financiero al ente formado por ambos conjuntos asociados biyectivamente.

Cabe detallar los siguientes conceptos:

- Términos de la renta: capitales que la componen;
- Períodos de maduración: cada uno de los subintervalos temporales;
- Duración de la renta: $t_n - t_0$;
- Origen de la renta: t_0, inicio del primer período de maduración;
- Final de la renta: t_n, cuando concluye el último período de maduración.

Las rentas se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios:

- A su aleatoriedad: ciertas (financieras), en que conocemos a priori todos los términos de la renta y sus períodos de maduración; o aleatorias (actuariales), en que no conocemos uno o varios de esos componentes, peor sí su distribución de probabilidad.
- A la amplitud y frecuencia de los períodos de maduración: continuas o discretas.
- A la cuantía de los términos: constantes o variables.
- A la duración de la renta: temporales o perpetuas.
- Al momento de vencimiento de los capitales: prepagables o pospagables.
- Al momento de valoración: inmediatas, diferidas o anticipadas.

En este tema, nos centramos en la valoración de rentas actuariales referidas a grupos de personas, formados por dos o más individuos. Podemos distinguir dos tipos de grupos:

- Grupos que se extinguen al primer fallecimiento (disolución): el grupo permanece vivo mientras están vivos todos los miembros del grupo.
- Grupos que se extinguen al último fallecimiento (extinción): el grupo permanece vivo mientras hay al menos un miembro que sigue con vida. El grupo se extingue con el fallecimiento de todos sus miembros.

Las probabilidades de vida y muerte del grupo están relacionadas con las probabilidades de vida y muerte de cada uno de sus miembros, siendo el fallecimiento de los miembros fenómenos aleatorios estocásticos e independientes.

2. Grupos que se extinguen al primer fallecimiento (disolución)

Resulta útil definir el factor de actualización actuarial asociado a un período t para el grupo que se extingue al primer fallecimiento:

$$ {}_tE_u = E(Z) = V^t \ {}_tP_u $$

Siendo:

- $u = x_1, x_2, \dots, x_h$ el grupo, que permanece vivo mientras estén vivos todos sus miembros.
- Z una variable aleatoria que toma el valor Vt si la vida residual del grupo supera t, y 0 si la vida residual del grupo es igual o inferior a t.
- ${}_tP_u = {}_tP_{x_1, x_{2,} \dots x_h} = {}_tP_{x_1} \ {}_tP_{x_2} \cdots \ {}_tP_{x_h}$ por ser fenómenos probabilísticamente independientes

Este factor de actualización actuarial cumple la propiedad de escindibilidad, dado que V^t y ${}_tP_u$ son escindibles en el tiempo:

$$ {}_tE_u = {}_tE_{x_1, x_{2,} \dots x_h} = {}_sE_{x_1 x_2 \dots x_h} \ {}_tE_{x_{1+s,} x_{2+s} \dots x_{h+s}} $$

Vamos, pues, con las rentas anuales sobre un grupo que se disuelve (o muere al primer fallecimiento):

Renta anual vitalicia (ilimitada), inmediata, prepagable

$$ (V\ddot{a}C)_u = \sum_{k=0}^{w-x-1} C_k \ {}_kE_u $$

Renta anual vitalicia (ilimitada), inmediata, pospagable

$$ (VaC)_u = \sum_{k=1}^{w-x-1} C_k \ {}_kE_u $$

Renta anual temporal, inmediata, prepagable

$$ (V\ddot{a}C)_{u:n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \ {}_kE_u $$

Renta anual temporal, inmediata, pospagable

$$ (VaC)_{u:n} = \sum_{k=1}^{n} C_k \ {}_kE_u $$

Renta anual vitalicia (ilimitada), diferida, prepagable

$$ {}^{d/}(V\ddot{a}C)_u = \sum_{k=d}^{w-x-1} C_k \ {}_kE_u $$

Renta anual vitalicia (ilimitada), diferida, pospagable

$$ {}^{d/}(VaC)_u = \sum_{k=d+1}^{w-x-1} C_k \ {}_kE_u $$

Renta anual temporal, diferida, prepagable

$$^{d/}(V\ddot{a}C)_{u:n} = \sum_{k=d}^{n+d-1} C_k \; {}_kE_u$$

Renta anual temporal, diferida, pospagable

$$^{d/}(VaC)_{u:n} = \sum_{k=d+1}^{n+d} C_k \; {}_kE_u$$

3. Grupos que se extinguen al último fallecimiento (extinción)

De nuevo, comenzamos con el factor de actualización actuarial, que notaremos como:

$${}_tE_{\overline{u}} = E(Z) = V^t \; {}_tP_{\overline{u}}$$

Siendo:

- $\overline{u} = \overline{x_1, x_2, \dots, x_h}$ el grupo, que permanece vivo hasta que han perecido todos sus miembros.
- ${}_tP_{\overline{u}} = Z^{(1)} - Z^{(2)} + Z^{(3)} - Z^{(4)} + \cdots + (-1)^{h-1} Z^{(h)}$ donde $Z^{(h)}$ representa la suma de las probabilidades para t años correspondientes a los $\binom{h}{k}$ grupos que están formados por k individuos y que se extinguen al último fallecimiento.
- También: ${}_tP_{\overline{u}} = 1 - \; {}_tq_{\overline{u}} = 1 - \; {}_tq_{x_1} \; {}_tq_{x_2} \cdots \; {}_tq_{x_h}$

La valoración de las rentas anuales para estos grupos:

Renta anual vitalicia (ilimitada), inmediata, prepagable

$$(V\ddot{a}C)_{\overline{u}} = \sum_{k=0}^{w-x-1} C_k \; {}_kE_{\overline{u}}$$

Renta anual vitalicia (ilimitada), inmediata, pospagable

$$(VaC)_{\overline{u}} = \sum_{k=1}^{w-x-1} C_k \; {}_kE_{\overline{u}}$$

Renta anual temporal, inmediata, prepagable

$$(V\ddot{a}C)_{\overline{u}:n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \; {}_kE_{\overline{u}}$$

Renta anual temporal, inmediata, pospagable

$$(VaC)_{\overline{u}:n} = \sum_{k=1}^{n} C_k \; {}_kE_{\overline{u}}$$

Renta anual vitalicia (ilimitada), diferida, prepagable

$$^{d/}(V\ddot{a}C)_{\overline{u}} = \sum_{k=d}^{w-x-1} C_k\ {}_kE_{\overline{u}}$$

Renta anual vitalicia (ilimitada), diferida, pospagable

$$^{d/}(VaC)_{\overline{u}} = \sum_{k=d+1}^{w-x-1} C_k\ {}_kE_{\overline{u}}$$

Renta anual temporal, diferida, prepagable

$$^{d/}(V\ddot{a}C)_{\overline{u}:n} = \sum_{k=d}^{n+d-1} C_k\ {}_kE_{\overline{u}}$$

Renta anual temporal, diferida, pospagable

$$^{d/}(VaC)_{\overline{u}:n} = \sum_{k=d+1}^{n+d} C_k\ {}_kE_{\overline{u}}$$

4. Sustitución de una cabeza o varias por términos ciertos

La valoración de rentas sobre grupos resulta de especial relevancia en el caso de las rentas de supervivencia. En este tipo de rentas, el grupo (o cabeza) recibe una renta cuando otra cabeza fallece o cuando el grupo se disuelve o extingue según las condiciones acordadas.

En los casos típicos de viudedad (cuando el grupo se disuelve por fallecimiento de una de las dos cabezas) el superviviente recibe una renta de supervivencia que suele ser ilimitada.

En los casos de orfandad se da la posibilidad de recibir una renta de supervivencia si el hijo o los hijos sobreviven al grupo formado por sus padres (que puede disolverse si muere uno de los progenitores o extinguirse si mueren los dos).

Dentro de esta casuística del ámbito de las rentas de supervivencia, existe un tipo de seguro llamado subrogación o amortización de préstamos, consistente en una renta pagadera a partir del prestatario de edad X y hasta el término de n años, que suele coincidir con el período del préstamo. Este es un claro ejemplo de cómo sustituimos una cabeza (o más bien, la edad de la cabeza beneficiaria de la renta de supervivencia) por un término cierto (el número de años que quedan para que el préstamo quede amortizado).

Sea una renta pagadera a la cabeza y una vez fallecida la cabeza x:

$$a_{x/y} = a_y - a_{xy}$$

Con:

$$a_{xy} = \sum_{k=0}^{w-x-1} V^k \ {}_tP_{xy} = \sum_{k=0}^{w-x-1} \ {}_tE_{xy}$$

$${}_tP_{xy} = \sum_{k=0}^{w-x-1} \ {}_tP_x \ {}_tP_y$$

$$a_y = \sum_{k=0}^{w-x-1} V^k \ {}_tP_y = \sum_{k=0}^{w-x-1} \ {}_tE_y$$

Si sustituimos x por el término cierto $\overline{n}|$ (x muere en n):

$$a_{\overline{n}|/y} = a_y - a_{y:n} = {}^{n/}a_y$$

O, si sustituimos y por el término cierto $\overline{n}|$ (x muere a la edad que sea, pero el pago de la renta llegará hasta que y tenga n (este es el típico seguro de subrogación):

$$a_{x/\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|i} - a_{x:n}$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 35. Rentas de supervivencia simple: Inmediatas, diferidas, temporales y mixtas. Caso de varias cabezas aseguradas y beneficiarias. Rentas de supervivencia compuesta.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Rentas de supervivencia simple: Inmediatas, diferidas, temporales y mixtas.

Por rentas de supervivencia se entiende a aquel producto del seguro de vida por el cuál una o varias personas reciben una renta si sobreviven al fallecimiento de otra u otras. Teóricamente están más cerca al concepto de seguro pero por razones de cálculo técnico se suelen incluir en el estudio de rentas.

Planteamiento determinista (estático) de las rentas simples:

- ➔ Dos cabezas de edades x e y
- ➔ El hecho causante será: si "x" fallece, "y" recibe una renta vitalicia de una unidad monetaria.

El planteamiento determinista o estático coincide con el estocástico o dinámico si en este último usamos la esperanza matemática de la variable Z que asocia a cada suceso (pasar de Estado=vivo a Estado=muerto) en cada uno de los momentos, un valor numérico que va a ser el valor actual de la pensión o renta a favor de "y". Dado que finalmente coinciden en resultado, se estudia en este tema únicamente el planteamiento determinista.

Inmediata

Bajo los supuestos anteriores, si la renta es inmediata, dicha renta se denomina renta de supervivencia de x sobre y se denota:

$$a_{x/y}$$

Interviniendo en su formulación, por tanto, la probabilidad de fallecimiento de x y la de supervivencia de y.

$$a_{x/y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_tq_x \; {}_tp_y$$

Teniendo en cuenta que ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$

$$a_{x/y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left(1 - {}_tp_x\right) \; {}_tp_y = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left({}_tp_y - {}_tp_y \, {}_tp_x\right)$$

Véase que

$${}_tp_y \, {}_tp_x = {}_tp_{xy}$$

Si separamos los términos, se puede escribir como:

$$a_{x/y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_tp_y - \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_tp_{xy} = a_y - a_{xy}$$

$${}_tp_y > {}_tp_{xy} \;\Rightarrow a_y - a_{xy} > 0$$

Un ejemplo típico de estas rentas son los seguros de viudedad.

Temporal

En el supuesto anterior, si se condiciona el fallecimiento de x a que éste se produzca antes del momento n, esto es, para que y cobre el seguro temporal el fallecimiento de x debe producirse antes de n periodos y además la cabeza y únicamente cobrará la renta en tanto no se haya cubierto completamente los n periodos. Esto es, se da una doble temporalidad:

- La de x, que debe fallecer antes de llegar a n
- La de y que sólo recibe la renta desde el fallecimiento de x hasta n

En n concluye la cobertura del riesgo.

$$_{/n}a_{x/y} = \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_tq_x \ {}_tp_y$$

Teniendo en cuenta que ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$

$$_{/n}a_{x/y} = \sum_{t=1}^{n} v^t \left(1 - {}_tp_x\right) \ {}_tp_y = \sum_{t=1}^{n} v^t \left({}_tp_y - {}_tp_y \, {}_tp_x\right)$$

Véase que

$${}_tp_y \, {}_tp_x = {}_tp_{xy}$$

Si separamos los términos, se puede escribir como:

$$_{/n}a_{x/y} = \sum_{t=1}^{n} v^t \ \ {}_tp_y - \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_tp_{xy} = a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}}$$

$${}_tp_y > {}_tp_{xy} \ \Rightarrow a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}} > 0$$

Ejemplo típico de este tipo de rentas es el seguro de orfandad, que se paga si fallece el progenitor pero antes de que el beneficiario cumpla 25 años (por ejemplo) y en dicho caso, cobra la renta hasta que llegue a esa edad.

Diferida

El beneficiario “y” percibirá la renta vitalicia a partir de un periodo h+1 si el asegurado “x” fallece a partir de ese periodo h+1.

Un ejemplo de este tipo de seguros son los seguros dotales, en los que se asegura a los hijos a partir de los 18 años, (h=18) esto es, percibiendo la renta pospagable a partir de cumplir los 19.

$$_{h/}a_{x/y} = \sum_{t=h+1}^{\infty} v^t \ {}_tq_x \ {}_tp_y$$

Teniendo en cuenta que ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$

$$_{h/}a_{x/y} = \sum_{t=h+1}^{\infty} v^t \left(1 - {}_tp_x\right) \ {}_tp_y = \sum_{t=h+1}^{\infty} v^t \left({}_tp_y - {}_tp_y \, {}_tp_x\right)$$

Véase que

$$ {}_tp_y\,{}_tp_x = {}_tp_{xy} $$

Si separamos los términos, se puede escribir como:

$$ {}_{h/}a_{x/y} = \sum_{t=h+1}^{\infty} v^t \ {}_tp_y - \sum_{t=h+1}^{\infty} v^t \ {}_tp_{xy} = {}_{h/}a_y - {}_{h/}a_{xy} $$

$$ {}_tp_y > {}_tp_{xy} \ \Rightarrow {}_{h/}a_y - {}_{h/}a_{xy} > 0 $$

Otra forma de ver la renta diferidas es de forma recursiva:

$$ {}_{h/}a_{x/y} = v^h \ {}_hp_x \ a_{x+h} $$

$$ {}_hE_x = v^h \ {}_hp_x $$

$$ {}_{h/}a^1_{x/y} = {}_hE_{xy} \ a_{x+h\ /y+h} $$

$$ {}_hE_x = v^h \ {}_hp_{xy} $$

$$ a_{x+h\ /y+h} = a_{y+h} + a_{x+h:y+h} $$

$$ {}_{h/}a^1_{x/y} = {}_hE_{xy}[a_{y+h} + a_{x+h:y+h}] $$

Este método tiene más aplicaciones en la práctica actuarial.

Ejemplo típico: viudedad de pasivos cuando fallece después de la edad de jubilación.

Mixta (temporal y diferida)

Si el seguro dotal únicamente cubre el periodo universitario, se puede estudiar una renta de supervivencia temporal y diferida.

$$ {}_{h/n}a_{x/y} = \sum_{t=h+1}^{n} v^t \ {}_tq_x \ \ {}_tp_y $$

Teniendo en cuenta que ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$

$$ {}_{h/n}a_{x/y} = \sum_{t=h+1}^{n} v^t \ (1 - {}_tp_x) \ \ {}_tp_y = \sum_{t=1}^{n} v^t \ ({}_tp_y - {}_tp_y\,{}_tp_x) $$

Véase que

$$ {}_tp_y\,{}_tp_x = {}_tp_{xy} $$

Si separamos los términos, se puede escribir como:

$$ {}_{h/n}a_{x/y} = \sum_{t=1}^{n} v^t \ \ {}_tp_y - \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_tp_{xy} = {}_{h/}a_{y:\overline{n|}} - {}_{h/}a_{xy:\overline{n|}} $$

$$ {}_tp_y > {}_tp_{xy} \ \Rightarrow {}_{h/}a_{y:\overline{n|}} - {}_{h/}a_{xy:\overline{n|}} > 0 $$

Caso de varias cabezas aseguradas y beneficiarias: Rentas de supervivencia compuesta.

Planteamiento determinista (estático) de las rentas compuestas:

- ➔ Dos cabezas de edades x e y aseguradas y una cabeza de edad z beneficiaria
- ➔ El hecho causante será:
  - A primer fallecimiento: si “x” o “y” fallecen, z recibe una renta vitalicia de una unidad monetaria.
  - Extinción del grupo asegurado: z recibe una renta vitalicia de una unidad monetaria si el grupo se extingue (cuando fallecen x e y, o al segundo fallecimiento si los fallecimientos no se producen de forma simultánea)

Renta de asociada al primer fallecimiento (disolución del grupo)

Bajo los supuestos anteriores, si la renta es inmediata, dicha renta se denomina renta de disolución del grupo xy sobre z (o renta al primer fallecimiento) se denota:

$$a_{xy/z}$$

Interviniendo en su formulación, por tanto, la probabilidad de fallecimiento de “x” o la de “y” y la supervivencia de la de “z”

$$a_{xy/z} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \ {}_tq_{xy} \ {}_tp_z$$

$${}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_{xy}$$

$$a_{xy/z} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left(1 - {}_tp_{xy}\right) \ {}_tp_z = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left({}_tp_z - {}_tp_z \, {}_tp_{xyz}\right)$$

Véase que

$${}_tp_z \, {}_tp_{xyz} = {}_tp_{xyz}$$

Si se separan los términos, se puede escribir como:

$$a_{x/y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \ \ {}_tp_z - \sum_{t=1}^{\infty} v^t \ {}_tp_{xyz} = a_z - a_{xyz}$$

$${}_tp_z > {}_tp_{xyz} \ \Rightarrow a_z - a_{xyz} > 0$$

Modificando oportunamente los límites de los sumatorios se obtienen las variantes temporal, diferida y mixta.

Renta asociada al segundo fallecimiento (extinción del grupo)

Bajo los supuestos iniciales, si la renta es inmediata, dicha renta se denomina renta de extinción del grupo xy sobre z (o renta al segundo fallecimiento) se denota:

$$a_{\overline{xy}/z}$$

Interviniendo en su formulación, por tanto, la probabilidad de fallecimiento de "x" y la de "y" y la supervivencia de la de "z"

$$a_{\overline{xy}/z} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; {}_tq_{\overline{xy}} \;\; {}_tp_z$$

$${}_tq_{\overline{xy}} = 1 - {}_tp_{\overline{xy}}$$

$$a_{\overline{xy}/z} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left(1 - {}_tp_{\overline{xy}}\right) \;\; {}_tp_z$$

Véase que

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}$$

Dado que ${}_tp_{\overline{xy}}$ es la unión de dos sucesos que tienen una intersección común por la probabilidad de una muerte simultánea.

Por tanto

$$a_{\overline{xy}/z} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left(1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_{xy}\right) \;\; {}_tp_z$$

$$a_{\overline{xy}/z} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \;\; {}_tp_z - \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left({}_tp_x \, {}_tp_z\right) \;\; - \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left({}_tp_y \, {}_tp_z\right) \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left({}_tp_{xy} \, {}_tp_z\right)$$

$$a_{\overline{xy}/z} = a_z - [a_{xz} + a_{yz} - a_{xyz}]$$

Modificando oportunamente los límites de los sumatorios se obtienen las variantes temporal, diferida y mixta.

Bibliografía

Matemática de los seguros de vida · Heras Martínez, Antonio · Vilar Zanón, José Luis · Fundación MAPFRE Estudios

Matemática de los seguros de vida Autores: Rafael Moreno Ruiz, Eduardo Trigo Martínez, Olga Gómez Pérez-Cacho Editores: Pirámide

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 36. Seguro de un capital de cuantía constante, pagadero en el instante de ocurrir un hecho. Seguros de un capital de cuantía variable. Seguro de vida entera. Seguro temporal. Seguro diferido.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Seguro de un capital de cuantía constante, pagadero en el instante de ocurrir un hecho.

Los seguros de capital son aquellos en los que se acuerda un capital en el caso de que se produzca el acontecimiento determinado en póliza.

Una clasificación sucinta de éstos sería en función del riesgo.

- Seguros de supervivencia: Cuando el acontecimiento asegurado es que se sobreviva a cierto momento de tiempo, cuando vence la póliza.
- Seguros para el caso de fallecimiento. Cubre la contingencia de fallecimiento si el asegurado o el grupo asegurado fallecen o se disuelven o extinguen dentro de periodo de la póliza. En este caso la cuantía es cierta.
    - Seguro de vida entera: se cubre de forma vitalicia y por tanto se sabe que el seguro va a ser pagado desconociendo el momento en el que se producirá tal hecho.
    - Seguro temporal: la cobertura únicamente se da durante un periodo de tiempo, la aleatoriedad viene tanto por el momento de ocurrencia como por si el acontecimiento ocurre o no.
- Seguros mixtos o combinados en los que se cubre la contingencia de vida y la de fallecimiento sobre la misma cabeza o grupo.
- Seguros de muerte-supervivencia requieren el fallecimiento de una cabeza y la supervivencia del beneficiario (rentas de supervivencia)
- En cualquiera de las modalidades se puede dar la posibilidad de diferir el inicio de la cobertura.

En cualquiera de los casos se puede sustituir el acontecimiento de fallecimiento por el de invalidez usando sus propias tablas y por tanto probabilidades (pero con misma formulación).

Seguro de vida entera de cuantía constante (C=1)

$f(K_x)$	$K_x = k$	$P(K_x = k)$
$v^{1/2}$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$v^{1+1/2}$	1	${}_{1/}q_x$
$v^{2+1/2}$	2	${}_{2/}q_x$
…	…	..
$v^{\omega-x-1+1/2}$	$\omega - x - 1$	${}_{\omega-x-1/}q_x$

La esperanza de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $Z = f(K_x)$, siendo K_x número de años enteros cumplidos a partir de la edad x, es el valor actual actuarial que se denomina Seguro de vida Entera a capital constante.

$$E[f(K_x)] = A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1/2}\ {}_{k/}q_x$$

En símbolos de conmutación (ver tema al respecto)

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{C_{x+k}}{D_x} = \frac{C_x + C_{x+1} + .. + C_{\omega-1}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

Para poder hacer uso de las tablas el tiempo se considera discreto y se hace por tanto, necesario el establecimiento de hipótesis sobre si el momento del fallecimiento se produce a mitad de año (uniforme), al final o en función de algún otro modelo. En la práctica actuarial la hipótesis utilizada es la de fallecimiento uniforme suponiendo el pago del capital asegurado a mitad de año.

Diferido

Lo anterior se ha explicado para un caso de seguro inmediato. En el caso de diferimiento la cobertura no tiene efecto hasta que el asegurado haya alcanzado en su caso la edad x+d, surtiendo efecto a partir de dicha fecha. Existe la posibilidad de que la entidad no tenga que satisfacer capital alguno, si el asegurado fallece antes de la edad x+d (es lo que se denomina periodo de carencia).

Si, como antes, se considera el tiempo en forma discreta y bajo la hipótesis de uniformidad:

$$f(K_x) = \begin{cases} 0 \quad si\ K_x < d & {}_{/d}q_x \\ v^{K_x+1/2} \quad si\ K_x \geq d & {}_{k/}q_x \end{cases}$$

Su valor esperado es:

$$E[f(K_x)] = {}_{d/}A_x = \sum_{k=d}^{\omega-x-1} v^{k+1/2}\ {}_{k/}q_x = \frac{M_{x+d}}{D_x}$$

En virtud de la propiedad de escindibilidad respecto del tiempo:

$${}_{d/}A_x = {}_dE_x\ A_{x+d}$$

Temporal

Con el mismo razonamiento que se ha realizado en los anteriores epígrafes:

$$f(K_x) = \begin{cases} 0 \quad si\ K_x > n & {}_{/d}q_x \\ v^{K_x+1/2} \quad si\ K_x \leq n & {}_{k/}q_x \end{cases}$$

Se cobrará el seguro si el acontecimiento asegurado se produce entre la edad x y la edad x+n.

$$E[f(K_x)] = A^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1/2}\ {}_{k/}q_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Temporal y diferido (mixto)

$$E[f(K_x)] = {}_{d/}A^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=d}^{n-1} v^{k+1/2}\ {}_{k/}q_x = \frac{M_{x+d} - M_{x+n+d}}{D_x}$$

$${}_{d/}A^1_{x:\overline{n|}} = A^1_{x+d:\overline{n|}}\ {}_{d}E_x$$

Seguros de un capital de cuantía variable.

En este caso se asegura un capital C en un momento en el que el asegurado tiene la edad x, incrementándose este capital C cada k año que el asegurado sobreviva a la edad x+k.

Así el término general será

$$C_{K_x}$$

Y el valor esperado de la función de años enteros que define el valor actual actuarial del seguro es, en término general:

$$E[f(K_x)] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_{k_x+1}\ \ v^{k+1/2}\ \ {}_{k/}q_x$$

Ahora se va a estudiar cómo quedan cada uno de los 3 seguros (vida entera, temporal y diferido) en los casos en los que la variabilidad de los términos siga una progresión aritmética o geométrica.

Seguro de vida entera.

Progresión aritmética

$$C_{K_x} = C + kh$$

$f(K_x)$	$K_x = k$	$P(K_x = k)$
$C\ v^{1/2}$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$(C+h)v^{1+1/2}$	1	${}_{1/}q_x$
$(C+2h)v^{2+1/2}$	2	${}_{2/}q_x$
…	…	..
$(C+(\omega-x-1)h)v^{\omega-x-1+1/2}$	$\omega - x - 1$	${}_{\omega-x-1/}q_x$

$$E[f(K_x)] = (VA \div)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (C+kh)v^{k+1/2}\ \ {}_{k/}q_x$$

En símbolos de conmutación (ver tema correspondiente) es:

$$E[f(K_x)] = (VA \div)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (C + kh)v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$$(VA \div)_x = C\frac{M_x}{D_x} + h\frac{R_{x+1}}{D_x}$$

Caso particular "Increasing" C=h=1

$$(IA \div)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (1 + k)v^{2+1/2} \quad v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$$(IA \div)_x = \frac{M_x}{D_x} + \frac{R_{x+1}}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}$$

Progresión geométrica

$$C_{K_x} = Cq^k$$

$f(K_x)$	$K_x = k$	$P(K_x = k)$
$C\ v^{1/2}$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$(Cq\ )v^{1+1/2}$	1	${}_{1/}q_x$
$(Cq^2)v^{2+1/2}$	2	${}_{2/}q_x$
…	…	..
$(Cq^{\omega-x-1})v^{\omega-x-1+1/2}$	$\omega - x - 1$	${}_{\omega-x-1/}q_x$

$$E[f(K_x)] = (VA \div\div)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (Cq^k)v^{k+\frac{1}{2}} \quad {}_{k/}q_x =$$

$$= C \sum_{k=0}^{\omega-x-1} q^k \quad v^{k+\frac{1}{2}} \;{}_{k/}q_x =$$

$$C\ {}^{q}A_x$$

Dado que

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} q^k \quad v^{k+\frac{1}{2}} \;{}_{k/}q_x = {}^{q}A_x$$

$$E[f(K_x)] = (VA \div\div)_x = C \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (q^k) v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

Para facilitar su cálculo se hace el cambio de tipo de interés

$$(VA \div\div)_x = \frac{1}{q^{1/2}} \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (q\ v)^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$$v' = vq \implies i' = \frac{1+i}{q} - 1$$

En símbolos de conmutación (ver tema correspondiente) y con el nuevo tipo de interés, es:

$$(VA \div\div)_x = C \frac{1}{q^{1/2}} \frac{M'_x}{D'_x}$$

Seguro temporal.

Progresión aritmética

$$C_{K_x} = C + kh$$

$f(K_x)$	$K_x = k$	$P(K_x = k)$
$C\ v^{1/2}$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$(C+h)v^{1+1/2}$	1	${}_{1/}q_x$
$(C+2h)v^{2+1/2}$	2	${}_{2/}q_x$
…	…	..
$(C+(n-1)h)v^{n-1+1/2}$	$n-1$	${}_{n-1/}q_x$

$$E[f(K_x)] = (VA \div)^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} (C+kh)v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

En símbolos de conmutación (ver tema correspondiente) es:

$$E[f(K_x)] = (VA \div)^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} (C + kh) v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$$(VA \div)^{1}_{x:\overline{n|}} = C \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + h \frac{R_{x+1} - R_{x+n} - (n-1)M_{x+n}}{D_x}$$

Caso particular "Increasing" C=h=1

$$(IA \div)^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + k) v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$$(IA \div)_x = \frac{R_x - R_{x+n} - (n)M_{x+n}}{D_x}$$

Progresión geométrica

$$C_{K_x} = Cq^k$$

$f(K_x)$	$K_x = k$	$P(K_x = k)$
$C\, v^{1/2}$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$(Cq\,)v^{1+1/2}$	1	${}_{1/}q_x$
$(Cq^2)v^{2+1/2}$	2	${}_{2/}q_x$
…	…	..
$(Cq^{n-1})v^{n-1+1/2}$	$n-1$	${}_{n-1/}q_x$

$$E[f(K_x)] = (VA \div\div)^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} (Cq^k) v^{k+\frac{1}{2}} \quad {}_{k/}q_x =$$

$$= C\sum_{k=0}^{n-1} q^k \quad v^{k+\frac{1}{2}} \quad {}_{k/}q_x =$$

$$C\ {}^{q}A_x$$

Dado que

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k \quad v^{k+\frac{1}{2}} \quad {}_{k/}q_x = {}^{q}A_x$$

$$E[f(K_x)] = (VA \div\div)^1_{x:\overline{n|}} = C\sum_{k=0}^{n-1}(q^k)v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

Para facilitar su cálculo se hace el cambio de tipo de interés

$$(VA \div\div)^1_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{q^{1/2}}\sum_{k=0}^{n-1}(q\ v)^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$$v' = vq \implies i' = \frac{1+i}{q} - 1$$

En símbolos de conmutación (ver tema correspondiente) y con el nuevo tipo de interés, es:

$$(VA \div\div)^1_{x:\overline{n|}} = C\frac{1}{q^{1/2}}\frac{M'_x - M'_{x+n}}{D'_x}$$

Seguro diferido.

Progresión aritmética

$$C_{K_x} = C + kh$$

$f(K_x)$	$K_x = k$	$P(K_x = k)$
$C\ v^{1/2}$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$(C+h)v^{1+1/2}$	1	${}_{1/}q_x$
$(C+2h)v^{2+1/2}$	2	${}_{2/}q_x$
…	…	..
$(C+(\omega-x-1-d)h)v^{\omega-x-d-1+1/2}$	$\omega - x - 1$	${}_{\omega-x-1/}q_x$

$$E[f(K_x)] = {}_{d/}(VA \div)_x = \sum_{k=d}^{\omega-x-1}(C+kh)v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

En símbolos de conmutación (ver tema correspondiente) es:

$$E[f(K_x)] = {}_{d/}(VA \div)_x = \sum_{k=d}^{\omega-x-1} (C+kh)v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$${}_{d/}(VA \div)_x = C\,\frac{M_{x+d}}{D_x} + h\,\frac{R_{x+d+1}}{D_x}$$

Caso particular "Increasing" C=h=1

$${}_{d/}(IA \div)_x = \sum_{k=d}^{\omega-x-1} (1+k)v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$${}_{d/}(IA \div)_x = \frac{M_{x+d}}{D_x} + \frac{R_{x+1+d}}{D_x} = \frac{R_{x+d}}{D_x}$$

Progresión geométrica

$$C_{K_x} = Cq^k$$

$f(K_x)$	$K_x = k$	$P(K_x = k)$
$C\,v^{1/2}$	0	${}_{0/}q_x = q_x$
$(Cq\,)v^{1+1/2}$	1	${}_{1/}q_x$
$(Cq^2)v^{2+1/2}$	2	${}_{2/}q_x$
…	…	..
$(Cq^{\omega-x-d-1})v^{\omega-x-1+1/2}$	$\omega - x - 1$	${}_{\omega-x-1/}q_x$

$$E[f(K_x)] = {}_{d/}(VA \div\div)_x = \sum_{k=d}^{\omega-x-1} (Cq^k)v^{k+\frac{1}{2}} \quad {}_{k/}q_x =$$

$$= C \sum_{k=d}^{\omega-x-d-1} q^k \quad v^{k+\frac{1}{2}} \ {}_{k/}q_x =$$

$$C \ {}^{q}_{/d}A_x$$

Dado que

$$\sum_{k=d}^{\omega-x-1} q^k \quad v^{k+\frac{1}{2}} \ {}_{k/}q_x = {}^{q}_{/d}A_x$$

$$E[f(K_x)] = {}_{d/}(VA \div\div)_x = C \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (q^k) v^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

Para facilitar su cálculo se hace el cambio de tipo de interés

$$(VA \div\div)_x = \frac{1}{q^{1/2}} \sum_{k=d}^{\omega-x-1} (q\ v)^{k+1/2} \quad {}_{k/}q_x$$

$$v' = vq \implies i' = \frac{1+i}{q} - 1$$

En símbolos de conmutación (ver tema correspondiente) y con el nuevo tipo de interés, es:

$$(VA \div\div)_x = C \frac{1}{q^{1/2}} \frac{M'_{x+d}}{D'_x}$$

Bibliografía

Matemática de los seguros de vida · Heras Martínez, Antonio · Vilar Zanón, José Luis · Fundación MAPFRE Estudios

Matemática de los seguros de vida Autores: Rafael Moreno Ruiz, Eduardo Trigo Martínez, Olga Gómez Pérez-Cacho Editores: Pirámide

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 37. Seguro sobre varias cabezas. Seguro diferido y temporal. Seguro pagadero a la disolución del grupo. Seguro pagadero a la extinción del grupo. Caso general. Seguros de supervivencia.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Seguro sobre varias cabezas.

El objeto de estudio de este tema es la metodología de valoración de capitales actuariales referidos a un grupo de personas formados por dos o más individuos.

El fenómeno aleatorio del que depende el rendimiento de un capital actuarial está aquí asociado a la muerte o supervivencia del grupo.

En este sentido hay que distinguir entre:

- Grupos que se extinguen al primer fallecimiento (Como lo denominan Heras, Vilar Zanón, Gil-Fana y otros como Rafael Moreno) o disolución de grupo (como lo denominan M. Ayuso, Rojo et al)→ El grupo deja de existir cuando muerte alguno de sus miembros.
- Grupos que se extinguen con el último fallecimiento (para M. Ayuso, Rojo et al es la extinción en sentido estricto)→ se entiende que el grupo permanece vivo mientras permanece con vida al menos uno de sus miembros.

Por tanto, la muerte y supervivencia del grupo dependen de la muerte y supervivencia de cada uno de sus miembros y puede darse una abultada casuística.

La construcción de estos modelos estocásticos puede hacerse a partir de los modelos descritos para una única cabeza o individuo, tanto si se estudia la disolución o la extinción en sentido estricto, simplemente se debe tener en cuenta las probabilidades de muere y supervivencia de forma conjunta (ver temas relacionados). Se trabaja con las hipótesis de que son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas (no existe contagio, las distribuciones de probabilidad son todas iguales para una misma).

Caso general

Supóngase un capital asegurado que se paga al final del año de extinción de un grupo u.

La variable aleatoria de número de años completos hasta la extinción del grupo será K_u.

Bajo la metodología de un capital unitario (C=1) el valor actual (financiero) representado por una variable que será denominada $\mathcal{Z}$, definida como:

$$\mathcal{Z} = v^{K_u+1}$$

$$K_u = 0,1,2, \dots,$$

El caso general para vida entera tiene la siguiente esperanza matemática:

$$E(\mathcal{Z}) = A_u = \sum_{k=0}^{\infty} P(K_u = k) v^{K_u+1}$$

Donde $P(K_u = k)$ es la probabilidad de que el grupo se extinga a los k años.

A_u es el valor actual actuarial, esto es, la prima única.

Seguro diferido y temporal.

En el caso temporal

$$E(\mathcal{Z}) = A^{1}_{u:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} P(K_u = k) v^{K_u+1}$$

Y en el caso diferido

$$_{d/}A_u = \sum_{k=d}^{\infty} P(K_u = k) v^{K_u+1}$$

Seguro pagadero a la disolución del grupo.

1) $u = xy$ Dos cabezas de edades x e y
   a. Se extingue al primer fallecimiento (caso de disolución)
   b. Seguro de capital unitario al final del año de disolución
      Partiendo del caso general:

$$E(\mathcal{Z}) = A_u = \sum_{k=0}^{\infty} P(K_u = k) v^{K_u+1}$$

La probabilidad en este caso es:

$$P(K_u = k) = {}_{k/}q_{xy} = {}_{k}p_{xy} \cdot q_{x+k,y+k}$$

Luego el seguro queda como:

$$A_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k}p_{xy} \cdot q_{x+k,y+k}\, v^{k+1}$$

2) $u = xy$ Dos cabezas de edades x e y
   a. Seguro <u>mixto:</u>
      i. Si u se disuelve antes de n años se paga un capital unitario al final del año de fallecimiento
      ii. Si u vive n años más, sobreviviendo al momento n, se paga un capital unitario..

$$A_{xy:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k}p_{xy} \cdot q_{x+k,y+k}\, v^{k+1} + v^{n}\, {}_{n}p_{xy}$$

$$A_{xy:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}q_{xy}\, v^{k+1} + v^{n}\, {}_{n}p_{xy}$$

La primera parte, el primer sumando, es el seguro temporal de un grupo que se extingue al primer fallecimiento (disolución).

$$A^1_{\widehat{xy}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_{xy} \cdot q_{x+k,y+k} \; v^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}q_{xy} \; v^{k+1}$$

Y el segundo sumando se corresponde con un capital diferido en caso de supervivencia del grupo:

$$v^n \; {}_np_{xy}$$

Seguro pagadero a la extinción del grupo. Caso general.

El caso general

$$A_{\overline{u}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \; P(K_u = k)$$

$$P(K_u = k) = {}_{k/}q_{\overline{u}}$$

Dependiendo de la composición del grupo se tendrán distintas soluciones, se explican aquí algunas relevantes a partir de las cuáles se puede llegar a cualquier otra combinación sin demasiada dificultad:

1) $u = \overline{xy}$ Dos cabezas de edades x e y
   a. Se extingue al último fallecimiento (caso de extinción estricta)
   b. Seguro de capital unitario al final del año de disolución

$$A^1_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k/}q_{\overline{xy}} \; v^{k+1}$$

Teniendo en cuenta que:

$${}_{k/}q_{\overline{xy}} = ({}_{k/}q_x + {}_{k/}q_y - {}_{k/}q_{xy})$$

Se puede escribir:

$$A^1_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} ({}_{k/}q_x + {}_{k/}q_y - {}_{k/}q_{xy}) \; v^{k+1}$$

En función de los seguros temporales sobre cada una de las cabezas y del seguro de disolución del grupo de dos cabezas:

$$A^1_{\overline{xy}:\overline{n|}} = A^1_{x:\overline{n|}} + A^1_{y:\overline{n|}} - A^1_{\widehat{xy}:\overline{n|}}$$

2) $u = \frac{2}{xyzh}$ cuatro cabezas de edades x, y, z y h que se extinguen al tercer fallecimiento (r=3).

a. n=2 fallecimientos, m= 4 cabezas ➔ r=m-n+1=4-2+1=3

$$A_{\overline{xyzh}}^{2} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k/}q_{\overline{xyzh}}^{2} \; v^{k+1}$$

Teniendo en cuenta las relaciones vistas aquí (y en temas anteriores) se puede escribir como:

$$A_{\overline{xyzh}}^{2} = A_{xy} + A_{xz} + A_{xh} + A_{yz} + A_{yh} + A_{zh} - 2A_{xyz} - 2A_{xyh} - 2A_{xzh} - 2A_{yhz} + 3A_{xyzh}$$

3) $u = \overline{xyz}$ Seguro de extinción (último fallecimiento). Se paga un capital unitario al final del año de extinción.

Teniendo en cuenta que:

$$P(K_{u} = k) = {}_{k/}q_{\overline{xyz}} = ({}_{k/}q_{x} + {}_{k/}q_{y} + {}_{k/}q_{z} - {}_{k/}q_{xy} - {}_{k/}q_{xy} - {}_{k/}q_{xy} + {}_{k/}q_{xyz})$$

$$A_{\overline{xyz}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \; {}_{k/}q_{\overline{xyz}}$$

$$A_{\overline{xyz}} = A_{x} + A_{y} + A_{z} - A_{xy} - A_{xz} - A_{yz} + A_{xyz}$$

Seguros de supervivencia.

Seguro de supervivencia en sentido estricto

Se denomina seguro de supervivencia de x sobre y al seguro que corresponde al valor actual actuarial de un capital unitario pagadero a y en caso de que x fallezca sujeto a la supervivencia de y.

$$A_{xy}^{1} = \sum_{t=1}^{\infty} v^{t} \; {}_{t-1/}q_{xy}^{1} \approx \sum_{t=1}^{\infty} v^{t} \; {}_{t-1/}q_{x} \cdot {}_{t-\frac{1}{2}}p_{y}$$

$${}_{t-1/}q_{x} = {}_{t-1}p_{x} - {}_{t}p_{x}$$

$${}_{t-1/}q_{xy}^{1} \approx {}_{t-1/}q_{x} \cdot {}_{t-\frac{1}{2}}p_{y}$$

$$_{t-\frac{1}{2}}p_y \approx \frac{1}{2}({}_{t-1}p_y + {}_{t}p_y)$$

$$A_{xy}^1 \approx \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{t=1}^{\infty} v^t({}_{t-1}p_x - {}_{t}p_x\ )({}_{t-1}p_y - {}_{t}p_y) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\infty} v^t({}_{t-1}p_{xy} + {}_{t}p_{xy}) + ({}_{t-1}p_x \cdot {}_{t}p_y - {}_{t}p_x \cdot {}_{t-1}p_y) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_{t-1/}q_x + {}_{t-1}p_x \cdot {}_{t}p_y - {}_{t}p_x \cdot {}_{t-1}p_y$$

Si se multiplica y divide por p_{x-1} y p_{y-1}

$$\tfrac{1}{2}\left[\textstyle\sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_{t-1/}q_x + \tfrac{1}{p_{x-1}}\textstyle\sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_{t-1}p_{x-1,y} - \tfrac{1}{p_{y-1}}\textstyle\sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_{t-1}p_{y-1,x}\ \right]=$$

$$\frac{1}{2}[A_{xy} + \frac{a_{x-1,y}}{p_{x-1}} - \frac{a_{y-1,x}}{p_{y-1}}]$$

La principal diferencia de A_{xy}^1 respecto de A_{xy} es que en este caso no hay cambio de roles (es x quien muere y es y la persona beneficiaria).

Para hacer este seguro en su modalidad temporal o diferida basta con modificar los límites de los sumatorios.

Seguro de supervivencia en sentido amplio

En este caso se trata de un valor actual actuarial pagadera a un tercero en caso de que el grupo se extinga (al último) por el fallecimiento de x, esto significa que existe un orden de fallecimiento. Es decir, debe fallecer primero y, posteriormente debe fallecer x, que es el momento de extinción, y un tercer beneficiario que no interviene en la fórmula, recibe el pago del seguro.

La diferencia con el anterior es precisamente la exigencia de este orden de fallecimientos.

$$A_{xy}^2 = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_{t-1/}q_{xy}^2$$

La probabilidad de que el grupo se extinga en el año t falleciendo x en segundo lugar:

$${}_{t-1/}q_{xy}^2 = {}_{t-1/}q_x - {}_{t-1/}q_{xy}^1$$

Por su parte, como antes:

$${}_{t-1/}q_x = {}_{t-1}p_x - {}_{t}p_x$$

Y también

$${}_{t-1/}q_x = {}_{t-1/}q_{xy}^1 + {}_{t-1/}q_{xy}^2$$

Haciendo los cambios oportunos en el sumatorio, teniendo en cuenta estas igualdades, se puede poner este seguro en función de los vistos anteriormente.

$$A_{xy}^2 = A_x - A_{xy}^1$$

Bibliografía

Matemática de los seguros de vida · Heras Martínez, Antonio · Vilar Zanón, José Luis · Fundación MAPFRE Estudios

Matemática de los seguros de vida Autores: Rafael Moreno Ruiz, Eduardo Trigo Martínez, Olga Gómez Pérez-Cacho Editores: Pirámide

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 38. Supervivencia sobre varias cabezas. Grupos que se extinguen al primer fallecimiento. Grupos que se extinguen al último fallecimiento. Grupos que se extinguen a un fallecimiento determinado. Orden de fallecimiento.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

En el ámbito de los seguros, puede ser necesario estudiar el comportamiento biométrico de grupos formados por varios individuos o cabezas de distintas edades. Es en estas situaciones en las que interesa calcular probabilidades de supervivencia o fallecimiento conjuntas para todos o parte de los individuos que conforman el grupo.

Al aceptar la hipótesis de independencia entre cabezas, los cálculos se reducen a los correspondientes para cada individuo. Por ejemplo, si tenemos tres cabezas de edades *x*, *y* y *z*, su probabilidad conjunta de supervivencia será:

$$p_{xyz} = p_x p_y p_z$$

Cuando se estudian varias vidas, aparte de los sucesos de supervivencia y de fallecimiento, también interesa conocer las probabilidades de los sucesos siguientes:

- Extinción: se produce cuando ocurre el último fallecimiento, es decir, cuando han fallecido todas las cabezas del grupo; y
- Disolución, cuando ocurre el primer fallecimiento.

2. Probabilidades para dos vidas

Supongamos que tenemos dos cabezas, de edades *x* e *y*. Veamos cómo definimos las probabilidades temporales, diferidas y mixtas del grupo conformado por estas dos cabezas.

Probabilidades temporales

Son probabilidades referentes al comportamiento de la parece (x,y) durante los próximos n años. Hablaremos de edades enteras.

El estudio de la supervivencia para un grupo formado por dos individuos estará determinado por las posibles combinaciones de la supervivencia y fallecimiento de ambas cabezas.

Probabilidad de supervivencia conjunta: ${}_np_{x,y}$

Es la probabilidad de que el grupo sobreviva n años adicionales o, lo que es lo mismo, la probabilidad de que este grupo no se disuelva en n años:

$${}_np_{xy} = {}_np_x \, {}_np_y$$

Probabilidad de no extinción: ${}_np_{\overline{xy}}$

Se trata de la probabilidad de que, al menos, una de las dos cabezas sobreviva n años más:

$${}_np_{\overline{xy}} = {}_np_{\underset{xy}{(1)}} = {}_np_x \, {}_nq_y + {}_nq_x \, {}_np_y + {}_np_x \, {}_np_y = {}_np_x\left(1 - {}_np_y\right) + \left(1 - {}_np_x\right) {}_np_y + {}_np_{xy}$$

$$= {}_np_x + {}_np_y - {}_np_{xy}$$

Probabilidad de disolución y no extinción en n años: ${}_n\boldsymbol{p}_{\overset{[1]}{xy}}$

Esta es la probabilidad de que exactamente una cabeza sobreviva n años:

$${}_n\mathrm{p}_{\overset{[1]}{\mathrm{xy}}} = {}_np_x\,{}_nq_y + {}_nq_x\,{}_np_y = {}_np_{\overline{xy}} - {}_np_{xy}$$

Probabilidad de extinción dentro de los n años siguientes: ${}_nq_{\overline{xy}}$

Esta es la probabilidad de que el grupo se extinga, es decir, que las dos cabezas fallezcan dentro de los próximos n años:

$${}_nq_{\overline{xy}} = {}_nq_x\,{}_nq_y = (1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y) = 1 - ({}_np_x + {}_np_y - {}_np_{xy}) = 1 - {}_np_{\overline{xy}}$$

Si se quiere tener en cuenta quién es el causante de la extinción, repartiremos la responsabilidad de la extinción del grupo entre los dos miembros del grupo. Se nota y calcula de la siguiente manera (poniendo el 2 encima de la x, si ha sido x la causante, o encima de la y, si ha sido y, y asumiendo equiprobabilidad):

$${}_nq_{\overline{\overset{2}{x}\,y}} = {}_nq_{\overline{x\,\overset{2}{y}}} = \frac{1}{2}\,{}_nq_x\,{}_nq_y$$

Probabilidad de disolución dentro de los n años siguientes: ${}_nq_{x,y}$

Recogerá la probabilidad de que, al menos, una de las dos cabezas fallezca en los n años siguientes:

$${}_nq_{xy} = 1 - {}_np_{xy}$$

Si se quiere tener en cuenta quién es el causante de la disolución, repartiremos la responsabilidad de la misma entre los dos miembros del grupo. Se nota y calcula de la siguiente manera (asumimos equiprobabilidad):

$${}_nq_{\overset{1}{x}\,y} = \frac{1}{2}\,{}_nq_x\left(1 + {}_np_y\right)$$

$${}_nq_{x\,\overset{1}{y}} = \frac{1}{2}\,{}_nq_y\left(1 + {}_np_x\right)$$

Probabilidades diferidas

Estas probabilidades estudian sucesos que ocurren una vez transcurrido un cierto número de años. Se calculan de acuerdo con las reglas de cálculo de probabilidades. Veamos algunos ejemplos:

Probabilidad de disolución al cabo de un año: ${}_{1/}q_{xy}$

Esta probabilidad recoge la probabilidad de que la primera cabeza en fallecer lo haga en el segundo año de vida del grupo:

$${}_{1/}q_{xy} = {}_{1/}q_x\,{}_2p_y + {}_2p_x\,{}_{1/}q_y + {}_{1/}q_x\,{}_{1/}q_y = p_{xy} - {}_2p_{xy}$$

Probabilidad de extinción al cabo de un año: ${}_{1/}q_{\overline{xy}}$

Esta es la probabilidad de que el último fallecimiento se produzca a lo largo del segundo año:

$$ {}_{1/}q_{\overline{xy}} = {}_{1/}q_x \, {}_1q_y + {}_1q_x \, {}_{1/}q_y + {}_{1/}q_x \, {}_{1/}q_y = p_{\overline{xy}} - {}_2p_{\overline{xy}} $$

Probabilidad de supervivencia conjunta diferida m años: ${}_{m/}p_{xy}$

También se puede llamar probabilidad de no disolución y no extinción diferida m años. Es la probabilidad de que ambas cabezas sobrevivan hasta cumplir x+m e y+m, respectivamente, y posteriormente sobrevivan un año más:

$$ {}_{m/}p_{xy} = {}_{m+1}p_{xy} $$

Probabilidad de no extinción diferida m años: ${}_{m/}p_{\overline{xy}}$

Es la probabilidad, diferida m años, de no extinción del grupo, es decir, de que ambas cabezas sobrevivan m años, y en el siguiente no fallezcan ambos:

$$ {}_{m/}p_{\overline{xy}} = {}_mp_{xy}\left(p_{x+m}q_{y+m} + q_{x+m}p_{y+m} + p_{x+m}p_{y+m}\right) = {}_mp_{xy}\,p_{\overline{x+m,y+m}} $$

Probabilidad diferida m años de disolución del grupo: ${}_{m/}q_{xy}$

Recoge la probabilidad de que la disolución (el fallecimiento de la primera cabeza) se produzca en el año m+1:

$$ {}_{m/}q_{xy} = {}_{m/}q_x \, {}_{m+1}p_y + {}_{m+1}p_x \, {}_{m/}q_y + {}_{m/}q_x \, {}_{m/}q_y = {}_mp_{xy} - {}_{m+1}p_{xy} $$

Si queremos ver la probabilidad de disolución por causa de la cabeza x al cabo de m años:

$$ {}_{m/}q_{\overset{1}{x}\,y} = {}_{m+1}p_x \, {}_{m/}q_y + \frac{1}{2}\, {}_{m/}q_x \, {}_{m/}q_y = \frac{1}{2}\, {}_{m/}q_x\left({}_mp_y + {}_{m+1}p_y\right) $$

Probabilidad diferida m años de extinción del grupo: ${}_{m/}q_{\overline{xy}}$

El último fallecimiento del grupo se produce en el año m+1-ésimo:

$$ {}_{m/}q_{\overline{xy}} = {}_mp_{\overline{xy}} - {}_{m+1}p_{\overline{xy}} $$

Si queremos ver la probabilidad de extinción por causa de la cabeza x al cabo de m años:

$$ {}_{m/}q_{\overline{\overset{2}{x}\,y}} = {}_{m/}q_x \, {}_mq_y + \frac{1}{2}\, {}_{m/}q_x \, {}_{m/}q_y = {}_{m/}q_x\left[1 - \frac{1}{2}\left({}_mp_y + {}_{m+1}p_y\right)\right] $$

Probabilidades temporales y diferidas (mixtas)

Estas probabilidades mixtas generalizan las probabilidades anteriores. Vamos a ver los ejemplos más usuales.

Probabilidad de supervivencia conjunta diferida m años y temporal n años: $_{m/n}p_{xy}$

$$_{m/n}p_{xy} = {}_{m+n}p_{xy}$$

Probabilidad de que sobreviva al menos una cabeza diferida m y temporal n años

Es la probabilidad de no disolución y no extinción diferida m años y temporal n años:

$$_{m/n}p_{\overline{xy}} = {}_{m+n}p_x\,{}_m p_y + {}_{m+n}p_y\,{}_m p_x - {}_{m+n}p_{xy} = {}_m p_{xy}\ {}_n p_{\overline{x+m,y+m}}$$

Probabilidad de disolución del grupo diferida m y temporal n años

$$_{m/n}q_{xy} = {}_m p_{xy} - {}_{m+n}p_{xy}$$

Si es por causa de x:

$$_{m/n}q_{\overset{1}{x}\,y} = \frac{1}{2}\,{}_{m/n}q_x\left({}_m p_y + {}_{m+n}p_y\right)$$

Probabilidad de extinción del grupo diferida m y temporal n años

El último fallecimiento se produce entre el año m y el año m+n:

$$_{m/n}q_{\overline{xy}} = {}_m p_{\overline{xy}} - {}_{m+n}p_{\overline{xy}}$$

Si es por causa de x:

$$_{m/n}q_{\overset{2}{\overline{x\ y}}} = {}_{m/n}q_x\left[1 - \frac{1}{2}\left({}_m p_y + {}_{m+n}p_y\right)\right]$$

3. Probabilidades para tres vidas

Sin considerar el orden

Probabilidad de supervivencia conjunta: $_n p_{xyz}$

Es la probabilidad de que el grupo sobreviva n años adicionales o, lo que es lo mismo, la probabilidad de que este grupo no se disuelva en n años (probabilidad de no disolución):

$$_n p_{xyz} = {}_n p_x\ {}_n p_y\ {}_n p_z$$

Probabilidad de que exactamente una sobreviva n años más

$$\begin{aligned} {}_n p_{\underset{xyz}{[1]}} &= {}_n p_x\ {}_n q_y\ {}_n q_z + {}_n q_x\ {}_n p_y\ {}_n q_z + {}_n q_x\ {}_n q_y\ {}_n p_z \\ &= {}_n p_x + {}_n p_y + {}_n p_z - 2\,{}_n p_{xy} - 2\,{}_n p_{xz} - 2\,{}_n p_{yz} + 3\,{}_n p_{xyz} \end{aligned}$$

Probabilidad de que exactamente dos sobrevivan n años más

$$_n p_{\underset{xyz}{[2]}} = {}_n p_{xy}\ {}_n q_z + {}_n p_{xz}\ {}_n q_y + {}_n p_{yz}\ {}_n q_x = {}_n p_{xy} + {}_n p_{yz} + {}_n p_{xz} - 3\,{}_n p_{xyz}$$

Probabilidad de extinción en n años (ninguna sobrevive n años)

$${}_{n}q_{\overline{xyz}} = {}_{n}q_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}q_{z} = 1 - {}_{n}p_{x} - {}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{z} + {}_{n}p_{xy} + {}_{n}p_{xz} + {}_{n}p_{yz} - {}_{n}p_{xyz}$$

La suma de estas cuatro probabilidades tiene que dar 1.

Probabilidad de que al menos una sobreviva n años más (no extinción)

$${}_{n}p_{\underline{\overset{(1)}{xyz}}} = {}_{n}p_{xyz} + {}_{n}p_{xy}\,{}_{n}q_{z} + {}_{n}p_{xz}\,{}_{n}q_{y} + {}_{n}p_{yz}\,{}_{n}q_{x} + {}_{n}p_{x}\,{}_{n}q_{\overline{yz}} + {}_{n}p_{y}\,{}_{n}q_{\overline{x\ }} + {}_{n}p_{z}\,{}_{n}q_{\overline{x\ }}$$

$$= {}_{n}p_{\overline{xyz}} = 1 - {}_{n}q_{\overline{xyz}}$$

Probabilidad de que al menos dos sobrevivan n años más

$${}_{n}p_{\underline{\overset{(2)}{xyz}}} = {}_{n}p_{xyz} + {}_{n}p_{xy}\,{}_{n}q_{z} + {}_{n}p_{x}\ \ {}_{n}q_{y} + {}_{n}p_{y}\ \ {}_{n}q_{x} = {}_{n}p_{xy} + {}_{n}p_{x}\ \ + {}_{n}p_{yz} - 2\,{}_{n}p_{xyz}$$

Probabilidad de que al menos una fallezca en un período de n años (disolución)

$${}_{n}q_{xyz} = {}_{n}q_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}q_{z} + {}_{n}p_{x}\,{}_{n}q_{\overline{yz}} + {}_{n}p_{y}\,{}_{n}q_{\overline{x\ }} + {}_{n}p_{z}\,{}_{n}q_{\overline{x\ }} + {}_{n}q_{x}\,{}_{n}p_{yz} + {}_{n}q_{y}\,{}_{n}p_{xz}$$

$$+ {}_{n}q_{z}\,{}_{n}p_{xy} = 1 - {}_{n}p_{xyz}$$

Probabilidad de que sobreviva máximo una persona en un período de n años

$${}_{n}p_{\overline{xyz}}1 = {}_{n}p_{\underline{\overset{[0]}{xyz}}} + {}_{n}p_{\underline{\overset{[1]}{xyz}}} = {}_{n}q_{\overline{xyz}} + {}_{n}p_{\underline{\overset{[1]}{xyz}}} = 1 - {}_{n}p_{\underline{\overset{(2)}{xyz}}}$$

Probabilidad de que sobrevivan máximo dos personas en un período de n años

$${}_{n}p_{\overline{xyz}}2 = {}_{n}p_{\underline{\overset{[0]}{xyz}}} + {}_{n}p_{\underline{\overset{[1]}{xyz}}} + {}_{n}p_{\underline{\overset{[2]}{xyz}}} = 1 - {}_{n}p_{xyz}$$

Considerando el orden

Si consideramos el orden o el causante de la disolución o extinción:

Probabilidad de que el grupo se disuelva por el fallecimiento de x en n años

$${}_{n}q_{\overset{1}{x}\ y\ z} = {}_{n}q_{x}\,{}_{n}p_{yz} + \frac{1}{2}\,{}_{n}q_{x}\left({}_{n}q_{y}\,{}_{n}p_{z} + {}_{n}p_{y}\,{}_{n}q_{z}\right) + \frac{1}{3}\,{}_{n}q_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}q_{z}$$

$$= \frac{1}{6}\,{}_{n}q_{x}(2 + {}_{n}p_{y} + {}_{n}p_{z} + 2\,{}_{n}p_{yz})$$

Probabilidad temporal n años de que fallezca en primer lugar y y luego x

$${}_{n}q_{\overset{2}{x}\ \overset{1}{y}\ z} = \frac{1}{2}\,{}_{n}q_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}p_{z} + \frac{1}{6}\,{}_{n}q_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}q_{z} = \frac{1}{6}\,{}_{n}q_{\overline{xy}}(1 + 2\,{}_{n}p_{z})$$

Probabilidad de que x fallezca en segundo lugar en n años

$${}_{n}q_{\overset{2}{x}\ y\ z} = \frac{1}{3}\,{}_{n}q_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}q_{z} + \frac{1}{2}\,{}_{n}q_{x}\left({}_{n}q_{y}\,{}_{n}p_{z} + {}_{n}p_{y}\,{}_{n}q_{z}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\,{}_{n}q_{x}(2 + {}_{n}p_{y} + {}_{n}p_{z} - 4\,{}_{n}p_{yz})$$

4. Probabilidades para m vidas

Igual que hemos visto para el caso de grupos de dos y tres cabezas, el estudio de la supervivencia, o no, de un grupo de m cabezas pasa por definir las probabilidades que podemos llamar fundamentales, que son:

- Probabilidad de supervivencia conjunta: ${}_np_{x_1x_2\ldots x_m} = {}_np_{x_1}\,{}_np_{x_2}\cdots{}_np_{x_m} = \prod_{i=1}^{m} {}_np_{x_i}$
- Probabilidad temporal de disolución: ${}_nq_{x_1x_2\ldots x_m} = 1 - {}_np_{x_1x_2\ldots x_m} = 1 - \prod_{i=1}^{m} {}_np_{x_i}$
- Probabilidad temporal de extinción: ${}_nq_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = {}_nq_{x_1}\,{}_nq_{x_2}\cdots{}_nq_{x_m} = \prod_{i=1}^{m} {}_nq_{x_i}$
- Probabilidad temporal de no extinción: ${}_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = 1 - {}_nq_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}$

El problema que podemos encontrarnos es que el número de probabilidades a calcular puede llegar a ser muy alto dependiendo del número de cabezas que integren el grupo, ya que el número de probabilidades va a ser 2^m. Por ello, se recurre a la construcción del llamado operador actuarial Z (también lo podemos encontrar como operadores actuariales o actuarianos), que nos permite calcular dichas probabilidades de forma sencilla, en caso de que todos los integrantes tengan la misma función de supervivencia.

Supongamos, para situarnos, que estamos trabajando con un grupo de m individuos de la misma edad y queremos calcular la probabilidad de que exactamente r personas de dicho grupo sobrevivan n años más:

$$ {}_np_{\underset{xx\ldots x}{[r]}} = C_m^r\left({}_np_x\right)^r\left(1 - {}_np_x\right)^{m-r} $$

Siendo C_m^r las posibles combinaciones de m elementos tomados de r en r.

Esta combinatoria se complica cuando los individuos son de distintas edades. Es aquí cuando aparece el operador actuarial Z, que se define como:

- $Z^0 = 1$
- $Z^1 = {}_np_{x_1} + {}_np_{x_2} + \ldots + {}_np_{x_m} = \sum_{i=1}^{m} {}_np_{x_i} \rightarrow$ la suma de todas las probabilidades individuales de supervivencia
- $Z^2 = {}_np_{x_1x_2} + {}_np_{x_1x_3} + \ldots + {}_np_{x_{m-1}x_m} = \sum_{i<j}^{m} {}_np_{x_ix_j} \rightarrow$ la suma de todas las probabilidades de supervivencia de todas las parejas
- $Z^3 = \sum_{i<j<k}^{m} {}_np_{x_ix_jx_k} \rightarrow$ la suma de todas las probabilidades de supervivencia de todos los tríos
- …
- $Z^m = {}_np_{x_1x_2\ldots x_m} \rightarrow$ la probabilidad de supervivencia conjunta
- $Z^{m+h} = 0\ \forall h > 0$

Se puede comprobar que:

- ${}_np_{\underset{x_1x_2\ldots x_m}{[r]}} = Z^r - (r+1)Z^{r+1} + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}Z^{r+2} - \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}Z^{r+3} + \ldots = \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}}$

- ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{(r)} = {}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[r]} + {}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[r+1]} + \ldots + {}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[m]} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r}$

Algunas probabilidades de interés:

- Probabilidad temporal de supervivencia conjunta: ${}_{n}p_{x_1x_2\ldots x_m} = Z^m$
- Probabilidad temporal de extinción: ${}_{n}q_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = \frac{1}{1+Z}$
- Probabilidad temporal de no extinción: ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}} = \frac{Z}{1+Z}$
- Probabilidad temporal de que sobrevivan al menos r personas: ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{(r)} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r}$
- Probabilidad temporal de que sobrevivan exactamente r personas: ${}_{n}p_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[r]} = \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}}$
- Probabilidad temporal de disolución o de que fallezca, al menos, una persona: ${}_{n}q_{x_1x_2\ldots x_m} = 1 - Z^m$

Para estos cálculos, podemos desarrollar $(1+Z)^{-(r+1)}$ por el desarrollo en serie de MacLaurin, que aproxima la función $(1+x)^{-k}$ como:

$$(1+x)^{-k} = 1 - kx + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 - \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Pongamos un ejemplo:

Tenemos un grupo formado por 4 individuos de edades x, y, z y v. Calcular la probabilidad de que exactamente dos de los cuatro individuos sobrevivan cuatro años más:

$$\begin{aligned} {}_{4}p_{\overline{xyzv}}^{[2]} &= \frac{Z^2}{(1+Z)^3} = Z^2(1 - 3Z + 6Z^2) = Z^2 - 3Z^3 + 6Z^4 \\ &= {}_{4}p_{xy} + {}_{4}p_{xz} + {}_{4}p_{xv} + {}_{4}p_{yz} + {}_{4}p_{yv} + {}_{4}p_{zv} - 3({}_{4}p_{xyz} + {}_{4}p_{xyv} + {}_{4}p_{yzv} \\ &\quad + {}_{4}p_{xzv}) - 6\,{}_{4}p_{xyzv} \end{aligned}$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 39. La prima: concepto y diferencia con otros precios. Cálculo y clases. Bases técnicas y tarifas. Concepto de prima o cuota pura. Principios de indivisibilidad, invariabilidad y suficiencia de la prima. Prima única y prima periódica. Aplicación a diversos tipos de seguros.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Prima: concepto y diferencia con otros precios

La prima es el precio de la garantía que ofrece el asegurador al asegurado, la cual consiste en la cobertura del riesgo y, en caso de siniestro, en el pago de una indemnización, de un capital o de cualquier otra prestación convenida en el contrato.

La prima tiene un doble aspecto:

- Jurídico: es un requisito fundamental del contrato la contraprestación que corresponde al tomador a cambio de la prestación del asegurador. Esto deriva del hecho de que el contrato de seguro tiene carácter bilateral, lo cual implica que existen obligaciones para cada una de las partes contratantes. Desde este punto de vista, la prima se puede definir como el precio de la garantía que presta el asegurador; y

- Técnico: la prima sirve para que el asegurador pueda crear el fondo con el que ha de pagar los siniestros. Bajo esta perspectiva, la prima se puede definir como como el valor actual de la obligación del asegurador en el momento del contrato.

En la fijación del precio de un seguro se dan determinadas características especiales que difieren de las causas que determinan la fijación de los precios de venta en general. Entre estas características podemos destacar las siguientes:

- Los ingresos preceden a los gastos, se valora actuarialmente a priori por estimación del riesgo.
- El precio no se atiene a la capacidad adquisitiva del comprador o asegurado, sino que es esencialmente técnico.
- Los precios en el seguro se mantienen inalterables durante largo tiempo, sobre todo en el seguro de vida, y no admiten las oscilaciones rápidas a que se hallan sujetos los precios diarios en ciertas mercancías.
- El número de compradores o asegurados no es susceptible de ampliación a voluntad, ya que no es fácil crear artificialmente las necesidades a que responde el seguro.

La prima debe cuantificarse con sujeción a determinados criterios maestros, reunir ciertas condiciones o estar revestida de algunos atributos que permitan que cumpla mejor su función como presupuesto técnico del seguro:

- Adecuación: La prima debe ser adecuada, lo que se traduce en: suficiencia, reflejo del valor probabilístico de cada riesgo e inclusión de un margen razonable a modo de compensación por el riesgo especulativo al que se somete al capital de la aseguradora. Por ello, se hace necesaria la vigilancia del supervisor sobre las bases estadísticas que sustentan las primas y sobre la observancia práctica de éstas.

- Equidad: la prima no debe ser injustamente discriminatoria, sino equitativa: cada asegurado debe contribuir al importe global de las pérdidas y gastos que cada ramo genere a la mutualidad/entidad en proporción a la clase, subclase, especie y magnitud económica de su propio riesgo. Por eso las tarifas suelen agrupar los riesgos conforme a su grado de homogeneidad y asignar a cada grupo la tasa correspondiente a la probabilidad más o menos uniforme de pérdida. Con lo cual se busca la equidad y la justicia distributiva en la cuantificación de la tasa y, por ende, de la prima en la evaluación de cada uno de los riesgos individualmente considerados.

- No exceso: la prima no puede ser origen de una utilidad desproporcionada para el asegurador del riesgo respectivo. La prima muy onerosa conspira contra el razonable desarrollo comercial de la institución y favorece su desprestigio.
- Accesibilidad: la prima debe ser accesible, lo que implica:
  - Que debe tener un tope que permita a la mayoría de la población acogerse al seguro;
  - Que debe calcularse de tal modo que haga posible la transferencia de una cuota de los costos de los seguros de alto riesgo al resto de la población asegurada; y
  - Que alguna forma de subsidio procedente de un mecanismo extraño al seguro sea utilizada para compensar la prima actuarialmente calculada cuando se la presuma inaccesible. Todo ello sin menoscabo de la suficiencia y de la equidad de que debe hallarse revestida.
- Estabilidad: La inestabilidad de la prima conspira contra la buena imagen de la institución, entorpece la previsión presupuestal de las empresas aseguradas y origina desconcierto en el mercado. "La estabilidad significa que la modificación de la tasa solo puede hacerse cuando la tendencia (positiva o negativa) de la experiencia implique un impacto de tal intensidad que la torne necesaria". Este mismo atributo de la estabilidad es el que hace aconsejable un cierto margen de seguridad en la concepción de las tarifas.
- Flexibilidad: la prima también debe ser flexible, es decir, fácilmente adaptable a las circunstancias sobrevinientes que, en un sentido u otro, influyan en la peligrosidad del riesgo asegurado.
- Prevención: La prima debe ser preventiva. Debe constituirse en un mecanismo de estímulo a la prevención de las pérdidas (esto se ve muy claro en los sistemas bonus-malus, pues el asegurado se ve incentivado a prevenir el siniestro).

2. Cálculo y clases

Cálculo

Para calcular la prima deben valorarse dos elementos fundamentales:

- El riesgo.
- El presupuesto de gastos de la empresa (producción y administración).

Cuando se trata de seguros sobre la vida, también son importantes las tablas de mortalidad y los tipos de interés.

Valoración del riesgo

Cuanto mayor sea la probabilidad de que el riesgo se transforme en siniestro, y cuanto más graves puedan ser las consecuencias de este, tanto más aumentará el importe de la prima.

Por medio de la valoración del riesgo, se estima la probabilidad de siniestro y su intensidad probable, de cuya evaluación conjunta resulta la prima pura.

En la determinación de la prima comercial deben tenerse en cuenta los siguientes elementos: tasa de mortalidad, tipos de interés, tasas de caídas (permanencia o salida de la cartera), recargos de seguridad, gastos de gestión interna y gastos de gestión externa y recargos para beneficios.

Presupuesto de gastos de la empresa

Los gastos de funcionamiento de la empresa, distintos de los correspondientes al pago de siniestros, hacen que la prima pura sea insuficiente para el desarrollo completo de la entidad y que a aquella haya que agregar una serie de recargos.

Clases

Por un lado, vamos a clasificar la prima atendiendo a los costes a los que hace frente y, por otro, atendiendo a la periodicidad de la prima. Así:

Atendiendo a los costes a los que hace frente

Cuando hablamos de la prima, podemos estar hablando de:

- Prima pura: esperanza matemática de la variable aleatoria "Coste siniestral";
- Prima recargada: prima pura incrementada en los recargos de seguridad y para beneficio (si bien en seguros de vida suele existir un único recargo que engloba a los dos y que suele establecerse de modo implícito en la prima pura);
- Prima de inventario: prima recargada más los gastos de gestión interna. Asumiremos que los gastos de gestión interna imputables a la póliza son un porcentaje α del capital asegurado, produciéndose al comienzo de cada año mientras la póliza esté vigente; o
- Prima comercial: prima de inventario más los gastos de gestión externa. Asumiremos que estos gastos de gestión externa son un porcentaje β de la primera prima comercial, que se corresponde con la comisión descontada, y un porcentaje γ de cada prima comercial, correspondiente a otras comisiones periódicas y a otros gastos de adquisición.

Atendiendo a la periodicidad de la prima

Tendremos:

- Prima pura: el tomador efectúa un único pago al formalizarse el contrato
- Prima periódica: el pago de las primas se efectúa de modo escalonado, permitiendo un desembolso periódico (anual o con otra periodicidad). A su vez, estas primas pueden ser:

- Natural (cubre el riesgo dentro de cada uno de los períodos) o nivelada (se establece una prima relativamente constante, por lo que los primeros años la prima supera el riesgo cubierto; esto permite la creación de una reserva que compensa el posterior desequilibrio en que prima < riesgo; se suele emplear en riesgos individuales).
- Fraccionada (permite el pago de la prima en fracciones del período anual, a cambio de un recargo por fraccionamiento; no tienen carácter liberatorio) o fraccionaria (se calcula la prima natural para la subdivisión del período, por lo que sí tienen carácter liberatorio).
- Fija (las sociedades a prima fija calculan la prima en función de los siniestros estimados y la cobran al principio del período de cobertura, liberando a los socios asegurados de pago adicionales) o no fija (las mutuas y cooperativas a prima variable están fundadas en el principio de ayuda recíproca, calculando la prima a posteriori, en función de los siniestros acaecidos).
- Vitalicia (el asegurado paga prima hasta su fallecimiento) o temporal (el pago de la prima se limita a un cierto intervalo).
- Constante (la cuantía de la prima no varía con el tiempo) o variable (la cuantía varía con el tiempo).

3. Bases técnicas y tarifas

Se denomina “bases técnicas” al estudio actuarial que recoge los elementos que sirven de base para el cálculo de las primas de tarifa.

De acuerdo con el artículo 94 de la Ley de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras (LOSSEAR), las tarifas de primas deberán ser suficientes, según hipótesis actuariales razonables, para permitir a la entidad aseguradora satisfacer el conjunto de las obligaciones derivadas de los contratos de seguro y, en particular, constituir las provisiones técnicas adecuadas.

En el cálculo de las tarifas, dentro del ámbito de aplicación de la Directiva 2004/113/CE, del Consejo (traspuesta en Ley Orgánica 3/2007 de 22 de marzo, para la igualdad efectiva de hombres y mujeres), por la que se aplica el principio de igualdad de trato entre hombres y mujeres en el acceso a bienes y servicios y su suministro, no podrán establecerse diferencias de trato entre mujeres y hombres en las primas y prestaciones de las personas aseguradas cuando las mismas consideren el sexo como factor de cálculo. En ningún caso los costes relacionados con el embarazo y el parto justificarán diferencias en las primas y en las prestaciones de las personas consideradas individualmente.

Las condiciones contractuales y modelos de pólizas, las tarifas de primas y las bases técnicas no estarán sujetas a autorización administrativa ni deberán ser objeto de remisión sistemática a la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones. No obstante, la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones podrá requerir la presentación, siempre que lo entienda pertinente, de las condiciones contractuales, los modelos de pólizas, las tarifas de primas y las bases técnicas de las entidades aseguradoras, así como de los modelos de contratos, primas y cualquier otra documentación relacionada con la actividad reaseguradora, para controlar si respetan los principios actuariales, las disposiciones contenidas en esta ley y sus normas de desarrollo y las reguladoras del contrato de seguro.

El Reglamento de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras (RDOSSEAR) establece cuál es el contenido que debe tener una base técnica, que siempre deberá estar suscrita por un actuario de seguros.

Los apartados serán los siguientes:

- Información genérica. En ella se dará explicación del riesgo asegurable conforme a la póliza respectiva, los factores de riesgo considerados en la tarifa y los sistemas de tarificación utilizados.
- Información estadística sobre el riesgo. Se aportará información sobre la estadística que se haya utilizado, indicando el tamaño de la muestra, las fuentes y método de obtención de esta y el periodo a que se refiera.
- Recargo de seguridad.
- Recargos para gastos de gestión, justificados en función de la organización administrativa y comercial, actual y prevista en la entidad interesada, teniendo en cuenta si se trata de seguros individuales o de grupo. En el ramo de vida, los gastos de adquisición activados no podrán superar para cada póliza el valor de la provisión matemática a prima de inventario del primer ejercicio contabilizada en el pasivo del balance.
- Recargo para beneficio o excedente. Se destinará a remunerar los recursos financieros e incrementar la solvencia dinámica de la empresa.
- Cálculo de la prima. En función de las bases estadísticas y financieras si procede, se establecerá la equivalencia actuarial para fijar la prima pura que corresponda al riesgo a cubrir y a los gastos de gestión de los siniestros. Tomando como base la prima pura y los recargos, se obtendrá la prima de tarifa o comercial. Si se admiten primas fraccionadas y fraccionarias, se justificará la base y el recargo para calcularlas, concretando que estas últimas son liberatorias por el periodo de seguro a que correspondan.
- Cálculo de las provisiones técnicas. Las bases técnicas reflejarán el método elegido para el cálculo de las provisiones técnicas entre los admitidos por el reglamento.

Si, incumpliendo las previsiones de la base técnica durante dos ejercicios consecutivos, los recargos para gastos de gestión son insuficientes para atender los gastos reales de administración y adquisición definidos conforme al Plan de Contabilidad de las entidades aseguradoras, deberá procederse a la adecuación de las bases técnicas.

No será de aplicación lo previsto en el apartado anterior cuando el exceso de gastos sea debido a circunstancias excepcionales y que previsiblemente no vayan a seguir produciéndose en el futuro y así se acredite ante la Dirección General de Seguros.

4. Principios de invariabilidad, indivisibilidad y suficiencia de la prima

Indivisibilidad

La Ley de contrato de seguro de 1980 recoge el principio de indivisibilidad de la prima. El artículo 14 dispone que el tomador del seguro está obligado al pago de la prima en las condiciones estipuladas en la póliza y añade que, si se han pactado primas periódicas, la primera de ellas será exigible una vez firmado el contrato. Como se ve, la prima es exigible con independencia de las vicisitudes que después pueda experimentar el periodo de seguro.

Sin embargo, la propia ley y otras disposiciones contemplan supuestos en que el asegurador tiene que devolver parte de la prima. Entre estos supuestos, cabe destacar:

- En caso de transmisión del objeto asegurado, tanto el asegurador como el adquirente del objeto pueden rescindir el contrato; si el que rescinde es el asegurador, debe restituir la parte de prima correspondiente a la fracción del periodo de seguro que no haya soportado el riesgo.
- En el supuesto de agravación del riesgo durante el curso del contrato, el asegurador puede proponer una modificación del contrato y, si el tomador no la acepta, puede rescindirlo.

Invariabilidad

La prima, además de indivisible, es invariable; no puede modificarse por la voluntad unilateral de una de las partes ni por las variaciones ulteriores del riesgo. No obstante, esta regla de la invariabilidad también tiene excepciones, como las previstas en el artículo 13 de la Ley de contrato de seguro para los casos de disminución del riesgo.

Suficiencia

De acuerdo con la LOSSEAR, las tarifas de primas deberán ser suficientes. Así, las primas deben permitir a la entidad aseguradora satisfacer el conjunto de las obligaciones derivadas de los contratos de seguro y, en particular, constituir las provisiones técnicas adecuadas.

La prima, por tanto, debe ser suficiente para que la entidad pueda constituir el fondo necesario que le permita pagar los siniestros que se vayan produciendo en las pólizas de seguro que tiene contratada la aseguradora. De la misma manera, los recargos que cobre la entidad por gastos de gestión interna y externa deben ser suficientes para hacer frente a los gastos de funcionamiento de la entidad.

5. Prima única y periódica. Aplicación a diversos tipos de seguros

Ya definíamos en el primer apartado los conceptos de prima única y periódica, así como las subclasificaciones de esta última. Procedemos, a continuación, a calcularlas para distintos tipos de seguros.

Prima única

Es aquella que se paga una única vez en el momento de formalización del contrato.

Sean:

- Z = "Valor actual de una modalidad de seguro, dependiente de la edad residual η_x" (sustituiremos η_x por K_x cuando hablemos de edades enteras); y
- Π = "Prima única a pagar"

Entonces, definimos una variable L = "Pérdida del contrato de seguro" como L = Z – Π, que tendrá como esperanza E(L) = E (Z) – Π = 0 → E(Z) = Π. Es decir: el valor actual actuarial del seguro coincide con el de la prima.

Asumiendo capitales unitarios, veamos cómo se calcula para distintos tipos de seguros:

Seguro vida entera – inmediato

$$Z = V^{K_x+\frac{1}{2}}, con\ K_x = 0,1,\dots,\omega - x - 1\ y\ probabilidad\ {}_{k/}q_x$$

La prima para un individuo de edad x:

$$\pi_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} V^{k+\frac{1}{2}}\, {}_{k/}q_x = A_x = \frac{\bar{M}_x}{D_x}$$

Seguro vida entera – diferido

$$\pi_x = {}_{d/}A_x = \frac{\bar{M}_{x+d}}{D_x}$$

Temporal – Inmediato

$$\pi_x = A^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$$

Temporal – Diferido

$$\pi_x = {}_{d/}A^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{\bar{M}_{x+d} - \bar{M}_{x+d+n}}{D_x}$$

Capital diferido

$$\pi_x = {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Mixto simple

$$\pi_x = {}_nE_x + A^1_{\overline{x+n|}}$$

Primas anuales constantes

Vida entera

$$P_x \ddot{a}_x = A_x; P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Temporal

$$P_{x:n} \ddot{a}_{x:n} = A^1_{x:\overline{n|}}; P_{x:n} = \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

Capital diferido

$$P_{x:n} \ddot{a}_{x:n} = A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;1}; P_{x:n} = \frac{A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;1}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

Mixto simple

$$P_{x:n} \ddot{a}_{x:n} = A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;1} = A_{x:\overline{n|}}; P_{x:n} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

Primas anuales variables

Vamos a estudiarlo para un seguro de vida en general, en que tenemos:

- Una cabeza de edad x;
- Un capital de fallecimiento C = {C_1, C_2, ..., $C_{\omega\text{-}x}$} pagadero a final del año de fallecimiento;
- Un capital de supervivencia C' = {C'_1, C'_2, ..., $C'_{\omega\text{-}x}$} prepagable;
- Primas anuales prepagables P = {P_0, P_1, ..., $P_{\omega\text{-}x\text{-}1}$}

De modo que:

$$L = C_{K_x+1} V^{K_x+1} + (V\ddot{a}C')_{K_x+1} - (V\ddot{a}P)_{K_x+1}$$

Donde:

$$(V\ddot{a}C')_n = \sum_{k=0}^{n-1} C'_k V^k$$

$$(V\ddot{a}P)_n = \sum_{k=0}^{n-1} PV^k$$

Como E(L)=0, entonces:

$$(V\ddot{a}P)_x = (VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x$$

Conocidos C y C', hay que determinar los valores de P_0, P_1, ..., $P_{\omega-x-1}$. Veamos cómo hacerlo en los siguientes casos particulares:

Primas variables en progresión geométrica de razón q: P = {P_x, qP_x, q^2P_x, ...}

$$P_x\, {}^{q}\ddot{a}_x = (VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x$$

$$P_x = \frac{(VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x}{{}^{q}\ddot{a}_x}$$

Primas variables en progresión aritmética de razón h: P = {P_x, $(1+h)P_x$, $(1+2h)P_x$, ...} = {P_x, $P_x + hP_x$, $P_x + 2hP_x$, ...}

$$P_x\left(\ddot{a}_x + h_{1/}(I\ddot{a})_x\right) = (V\ddot{a}C)_x + (V\ddot{a}C')_x$$

$$P_x = \frac{(VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x}{\ddot{a}_x + h_{1/}(I\ddot{a})_x}$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 40. Prima de inventario. La prima comercial o de tarifa. Necesidad del recargo. Diversos sistemas de recargos. Primas comerciales en los principales tipos de seguros. Seguros con y sin participación en los beneficios.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

La prima es el precio del servicio que presta el asegurador, bajo cuyo punto de vista debe servir para hacer frente a todos los costes:

- Los derivados de las prestaciones previstas en la póliza (prima pura), y
- Y los correspondientes a la gestión, captación y mantenimiento del negocio. Así, la prima recargada incluye el recargo de seguridad, la de inventario incluye los gastos de gestión interna, y la de tarifa añade los gastos de gestión externa.

2. Recargos

Ya que la prima debe ser suficiente para hacer frente a los costes derivados de las prestaciones, pero también de los derivados de la gestión, captación y mantenimiento del negocio, habrá que sumarle los correspondientes recargos, normalmente estructurados en gastos de gestión interna (ggi) y gastos de gestión externa (gge). Además, siendo la prima pura la esperanza matemática de una determinada variable aleatoria, un mal comportamiento de esta podría resultar en una prima insuficiente. Así, parece razonable la existencia. De una esperanza de beneficio en la actividad aseguradora. Surgen así el recargo de seguridad y el recargo para beneficio, si bien en seguros de vida suele existir un único recargo que engloba a los dos y que suele establecerse de manera implícita en la prima pura:

- La prima pura + recargo de seguridad = prima recargada
- Prima recargada + ggi = prima de inventario
- Prima de inventario + gge = prima comercial

Recargo de seguridad

Si el recargo de seguridad se encuentra establecido implícitamente en las bases de cálculo contenidas en las tablas de mortalidad o en tipos de interés distintos a los reales, hablamos de bases técnicas de primer orden.

Si deseamos conocer el recargo de seguridad implícito como un porcentaje λ de la prima pura real, despejaremos en:

$$P^c = (1 + \lambda)P^r$$

Siendo:

- P^c: la prima calculada conforme a bases de primer orden.
- P^r: prima pura real que resultaría con bases técnicas reales.
- λP^r: el recargo de seguridad implícito.

Aunque es menos frecuente, la prima se puede calcular empleando el tipo de interés y tablas de mortalidad reales (bases técnicas de segundo orden), en cuyo caso el recargo de seguridad debe figurar de forma explícita:

$$P_x^{rec} = (1+\lambda)P_x$$

Fijado el resultado para la póliza o cartera mediante criterios de rentabilidad o solvencia, podemos obtener el recargo de seguridad para cada prima.

Primas de inventario y comercial

Vamos a asumir que:

- Los gastos de gestión interna imputables a la paliza son un porcentaje α del capital asegurado, produciéndose al comienzo de cada año mientras la póliza esté vigente.
- Los gastos de gestión externa son un porcentaje β de la primera prima comercial, que se corresponde a la comisión descontada, y un porcentaje γ de cada prima comercial correspondiente a otras comisiones periódicas y a otros gastos de adquisición.

A partir de aquí deberemos establecer la equivalencia actuarial entre las primas y las prestaciones, gastos de gestión interna y gastos de gestión externa:

La prima de inventario anual puede ser:

- Vitalicia:

$$P'_x \ddot{a}_x = A_x + \alpha \ddot{a}_x ; P'_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \alpha$$

- Temporal:

$${}_nP'_x \ddot{a}_{x:n} = A_x + \alpha \ddot{a}_x$$

La prima comercial anual:

- Vitalicia:

$$P''_x \ddot{a}_x = A_x + \alpha \ddot{a}_x + \beta P''_x + \gamma P''_x \ddot{a}_x$$

- Temporal:

$${}_nP''_x \ddot{a}_{x:n} = A_x + \alpha \ddot{a}_x + \beta\, {}_nP''_x + \gamma\, {}_nP''_x \ddot{a}_{x:n}$$

3. Participación en beneficios

El sistema de participación en beneficios (PB) es frecuente en el negocio de Vida y consiste en un sistema por el que el asegurado participa, de alguna manera, en los beneficios que la entidad obtenga. Existen tres tipos de PB: técnica, financiera y mixta.

PB técnica

Es la que se reparte en función de beneficios provocados por una mortalidad menor a la estimada; es típica de los seguros colectivos a prima natural.

Se define el beneficio como B = P – X, siendo P la prima y X la siniestralidad (colectiva).

El beneficio esperado será, por tanto: E(B) = P – E(X), que será positiva cuando la mortalidad observada sea menor a la estimada en la tarificación.

La PB a favor del colectivo asegurado se define como:

$$PB = \begin{cases} K(P - X) & si\ X < P \\ 0 & si\ X \geq P \end{cases}$$

Siendo K un % de ese beneficio B = P – X

La PB media o esperada:

$$E(PB) = \sum_{X<P} K(P - X) * p(X)$$

Siendo p(X) la probabilidad de cada siniestralidad anual X

En el caso continuo:

$$E(PB) = \int_0^P K(P - X) * f(X)\, dx$$

Siendo f(x) la función de densidad de la siniestralidad anual.

Así, el beneficio neto del asegurador es:

BN = B – PB

Y su valor medio esperado:

$$E(BN) = E(B) - E(PB) = \propto P - \sum_{X<P} K(P - X) * p(X) = \propto P - \propto_1 P$$

Con $\alpha_1 < \alpha$, expresando el valor esperado de la PB como un porcentaje de la prima.

Por tanto:

$$E(BN) = \propto P - \propto_1 P = (\propto - \propto_1)P = \propto_2 P$$

Habitualmente, los asegurados reciben el importe de su PB al pagar la prima de renovación, lo que implica en la práctica una reducción de la misma. Si el pago de la prima es fraccionado, la PB se distribuye aplicándose proporcionalmente a cada fracción de la prima.

Este sistema contribuye a la conservación de la cartera, aspecto importante para poder tomar la hipótesis de homogeneidad y poder aplicar el TCL.

PB financiera

Este tipo de PB es un caso frecuente en los seguros individuales con componente de ahorro (diferidos, mixtos).

El beneficio se determina de la siguiente forma:

- Al final de cada ejercicio, el asegurador establece el inventario de las partidas del activo del balance que intervendrán en el cálculo de los resultados financieros. Este inventario contendrá los siguientes bienes afectos a la cobertura de provisiones matemáticas: tesorería, valores mobiliarios, fondos de inversión inmobiliaria, créditos, inmuebles...
- Se calcula un tanto de utilidad Ut correspondiente al ejercicio t:

$$U_t = \frac{Rendimientos\ del\ período\ (dividendos,\ \ plusvalías\ldots)}{Inversiones\ del\ inventario} = \frac{R_t}{I_t}$$

- El tanto de rentabilidad se calcula como la diferencia entre el tanto de utilidad y el tipo de interés técnico (aunque tomará el valor 0 si el tanto de utilidad es inferior al tipo de interés técnico):

$$r_t = U_t - i$$

- El beneficio financiero total correspondiente al ejercicio t se define como el tanto de rentabilidad por la suma de las provisiones matemáticas correspondientes a las pólizas con derecho a PB:

$$B_t = r_t \sum PM$$

- El beneficio a repartir será $K*B_t$, con K ϵ [0 , 1], que se asigna usualmente a cada asegurado con derecho a PB en proporción a su reserva o PM sobre el total de reservas:

$$PB_i = A_i = \frac{KB_t}{\sum PM} V_i$$

  Siendo V_i la reserva del asegurado i-ésimo.

Esta PB se materializa de alguna de las siguientes formas:

- Reducción de la prima de renovación;
- Aplicación de unporte de la PB a la PM (se aumenta la PM en una cuantía igual a la PB que le corresponde al asegurado); o
- Aplicación de PM como prima única de inventario en un nuevo seguro equivalente al original que la genera.

PB mixta

Esta es la PB por la totalidad de los conceptos. Se define, primero, el beneficio del período t:

$$B_t = P_t'' - X_t - \Delta PTP_t - \Delta RM_t - G_t + IF_t$$

Siendo las siguientes magnitudes netas de reaseguro:

- P''_t: la prima comercial
- X_t: coste siniestral del período
- ΔPTP_t: variación en las provisiones técnicas durante el período
- ΔPM_t: variación del importe de reservas matemáticas durante el período
- G_t: Gastos de gestión efectivos del asegurador
- IF_t: Ingresos netos del período

La PB se calculará como una fracción K de ese beneficio B_t.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 41. Modelos matemáticos para el cálculo de la prima. Teoría de la credibilidad: aplicación a los sistemas de tarificación.

Edición Julio 2025

1. Introducción

El seguro es un mecanismo autoprotector en el que un colectivo solidario, formado por los asegurados, se hace cargo de compensar a sus miembros cuando alguno de ellos sufre un siniestro. El vínculo queda establecido a través de una entidad aseguradora, suscribiendo una póliza y realizando el pago de la correspondiente prima. En la mayoría de productos de seguro, el principal escollo es anticipar cuál es la probabilidad de ocurrencia de un siniestro y, si este se produce, cuál será su magnitud.

Con la excepción de los seguros de vida (o la mayoría de ellos), en los que la indemnización queda fijada en la póliza y el siniestro solo se produce una vez, el resto de seguros admiten que pueda producirse más de un siniestro durante la vigencia de la póliza y, además, existe incertidumbre sobre la cuantía de la indemnización.

El principio básico a la hora de tarificar tales seguros es el de modelizar la frecuencia y la cuantía de los siniestros, para lo que existen multitud de métodos matemáticos que facilitan la tarea:

- Para modelizar la frecuencia, lo más habitual es confiar en una P(l), si bien existen muchas otras distribuciones que pueden encajar: binominal, binomial negativa, etcétera. Además, deberemos servirnos de métodos de estimación de parámetros (MCO, máxima verosimilitud) para terminar de definir la función de distribución de la frecuencia en base a los datos observados (nuestra muestra). También se pueden aplicar a distribuciones mixtas como, por ejemplo, la Poisson-Gamma.
- Para modelizar la severidad, se emplearán distribuciones continuas y mixtas. Las distribuciones continuas más frecuentemente utilizadas serán Gamma, Pareto, b generalizada y Weibull. Además de esta modelización, en la tarificación se deben considerar los límites a incluir en la póliza, posibles franquicias, el papel del reaseguro… los parámetros de las distribuciones también deberán estimarse.

La prima de riesgo vendrá dada por el producto del número de siniestros y la intensidad/severidad modelizados.

Cabe recordar que también existen modelos de pérdidas agregadas, que estiman directamente un coste total por póliza o por cartera.

2. Teoría de la credibilidad

La teoría de la credibilidad es un conjunto de ideas y técnicas destinadas al ajuste sistemático de las primas de los seguros en función de la experiencia de siniestralidad de estos. La necesidad de estos métodos proviene de la existencia de situaciones en las que los datos correspondientes a los grupos de pólizas a tarificar son escasos y por tanto resultan inadecuados para estimar la prima de riesgo. Resulta entonces natural utilizar datos externos y combinarlos con los datos internos para estimar o reajustar las primas.

El procedimiento general es el siguiente: Supongamos que deseamos estimar un parámetro, α . Se puede determinar un estimador $\widehat{\propto_I}$ utilizando exclusivamente los datos internos. Esto resultaría inadecuado si los datos internos fueran escasos. Por otro lado, se podría obtener otro estimador $\hat{\alpha}_E$ utilizando los datos externos. Aunque los datos

externos fueran numerosos, no todos ellos se referirían exactamente al mismo tipo de riesgo (el riesgo podría haber cambiado a lo largo del tiempo, por ejemplo). Se hace necesario obtener un valor intermedio entre el estimador$\hat{\alpha}_E$, basado exclusivamente en los numerosos datos externos, y $\hat{\alpha}_I$,que utiliza los escasos datos internos.

Los teóricos de la credibilidad asignan un factor de credibilidad Z a los datos internos. El factor de credibilidad Z es un número comprendido entre 0 y 1, que es normalmente determinado en función de las experiencias internas y externas. Es próximo a 1 cuando los datos internos son numerosos y próximo a 0 cuando son escasos. Una estimación, basada en la credibilidad, del parámetro α sería:

$$(1-Z)\ \widehat{\propto_E} + Z\ \widehat{\propto_I}$$

En el proceso de asignación de un valor a Z se tiene en cuenta:

- El volumen de datos internos en relación con el de datos externos.
- Las diferencias entre los datos internos y los externos.

Credibilidad total o completa

Sea N la variable aleatoria correspondiente al número de siniestros producidos en una cartera de seguros durante un determinado periodo de tiempo (un año, por ejemplo). Representaremos a la esperanza matemática (o media) de N por n . Es generalmente adecuado suponer que N sigue una distribución de Poisson, en cuyo caso:

$$E(N) = V(N) = n$$

El montante del i-ésimo siniestro será una variable aleatoria X_i. Supongamos que N y X_1, X_2 , ... , X_n son variables aleatorias estocásticamente independientes y que los montantes de los siniestros tienen la misma distribución con medias y varianzas, dadas por: $E(X_i) = m$ y $V(X_i) = \sigma^2$.

Las fórmulas condicionales pueden ser utilizadas para demostrar que la variable aleatoria C = { X_1, X_2 , ... , X_n } correspondiente al coste total de los siniestros durante el periodo considerado tiene por valor probable:

$$E(C) = c = nm$$

y varianza:

$$V(C) = n(\sigma^2 + m^2)$$

La pregunta es: ¿Qué tamaño debe tener la experiencia interna de siniestralidad a efectos de que el asegurador pueda, responsablemente, ignorar la estimación indirecta $\widehat{c_c}$ y basar su análisis únicamente en la información interna que da lugar a C? En otras palabras, ¿cuándo es una experiencia estadística suficientemente grande para poder asignar credibilidad total (Z=1) a su estimación?

El asegurador podría asignar credibilidad total a la estimación C, basada íntegramente en la experiencia propia, si tal estimador se desvía menos de, digamos, un k% del verdadero valor a estimar, con una alta probabilidad γ. Es decir, cuando:

$$p[(1-k)c < C < (1+k)c] = \gamma$$

Luego:

$$p[\frac{-kc}{\sqrt{V(c)}} < \frac{C-c}{\sqrt{V(c)}} < \frac{+kc}{\sqrt{V(c)}}] = \gamma$$

De acuerdo con el Teorema Central del Límite, si la experiencia propia es razonablemente grande, $\frac{C-c}{\sqrt{V(c)}}$ se distribuirá como una N(0,1). Buscando en la tabla de la normal, obtenemos que:

$$\frac{kc}{\sqrt{V(c)}} = y$$

$$\frac{k(nm)}{\sqrt{n(\sigma^2+m^2)}} = \frac{knm}{\sqrt{n}\,\sqrt{\sigma^2+m^2}} = y$$

$$n = \sqrt{n}\sqrt{n} = \frac{y}{k}\frac{\sqrt{n}\,\sqrt{\sigma^2+m^2}}{m}$$

$$n = \left(\frac{y}{k}\right)^2 \frac{\sigma^2+m^2}{m^2} = \left(\frac{y}{k}\right)^2 \left(1+\frac{\sigma^2}{m^2}\right) = n_F$$

Siendo n_F el estándar de credibilidad completa, es decir, el número mínimo de datos internos para poder aplicar un Z=1.

Credibilidad parcial

En muchas situaciones prácticas, la experiencia propia es demasiado pequeña para asignar total credibilidad a los procesos de tarificación internos. Solo es posible trabajar con credibilidad parcial (Z<1), y necesitamos determinar Z para aplicar la fórmula de estimación por credibilidad.

En la fórmula de estimación por credibilidad, $\widehat{c_c}$ es un valor no aleatorio obtenido mediante información externa, y C es una variable aleatoria resultante de la experiencia interna. Si establecemos un principio de fluctuación limitada, de tal forma que el estimador de credibilidad $\widehat{c_Z}$ deba pertenecer a un intervalo de amplitud no superior al rango 2kc correspondiente a un supuesto de total credibilidad con probabilidad γ, entonces se debe verificar que ZC pertenezca al intervalo Zc $\pm$ kc con probabilidad γ. En otras palabras:

$$p[Zc - kc < C < Zc + kc] = \gamma$$

Operando:

$$p[\frac{-kc}{Z\sqrt{V(c)}} < \frac{C-c}{\sqrt{V(c)}} < \frac{+kc}{Z\sqrt{V(c)}}] = \gamma$$

De donde, suponiendo que la experiencia no sea demasiado pequeña, podremos usar la aproximación normal N(0,1) y escribir:

$$\frac{kc}{Z\sqrt{V(c)}} = y$$

De donde:

$$Z = \sqrt{\frac{n}{n_F}}$$

Modelos de Bülhmann y Bülhmann-Straub o modelos de distribución libre

Ambos modelos son el punto de partida de la moderna teoría de credibilidad. El objetivo que persiguen es estimar la prima correspondiente a un asegurado o grupo de asegurados que conforman una póliza en una cartera de seguros, restringiéndose a primas lineales y utilizando MCO.

Lo interesante de estos modelos es que no necesitan establecer hipótesis sobre la distribución de los riesgos individuales o sobre los parámetros de riesgo. Es por ello que también se suelen llamar modelos de distribución libre. El modelo se puede representar en la siguiente matriz:

Años	Pólizas o grupos					
	1	2	...	j	...	k
1	X_{11}	X_{21}	...	X_{j1}	...	X_{k1}
2	X_{12}	X_{22}	...	X_{j2}	...	X_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	X_{1n}	X_{2n}	...	X_{jn}	...	X_{kn}

Representando las columnas v.a. pertenecientes al mismo riesgo (póliza), y las filas v.a. pertenecientes al mismo año.

La función de distribución de la v.a. X_{ij} depende de un parámetro de riesgo θ_{ij} desconocido que describe las características del riesgo en el año i-ésimo del contrato j-ésimo.

Se establecen las siguientes hipótesis:

- Homogeneidad en el tiempo: $\theta_{ij}=\theta_j$ → todas las variables aleatorias pertenecientes a la misma columna tienen la misma distribución de probabilidad;
- Los parámetros θ_j son v.a. independientes, idénticamente distribuidas (iid), con distribución $\Pi(\theta)$;
- Independencia de riesgos (las columnas son independientes entre sí;
- Dado el valor de θ particular de θ_j las v.a. dentro de la columna j son independientes.

Se definen:

- $\mu(\theta_j) = E[X_{ij} \mid \theta_j]$ a la prima de riesgo para la póliza j;
- m = E [P(θ_j)] al valor esperado de todas las primas de riesgo, es decir, a la prima colectiva;
- $a = V[\mu(\theta_j)]$ → varianza de las primas de riesgo, indicador de la heterogeneidad de la cartera.

Modelo de Bülhmann

Su objetivo es calcular la mejor prima lineal: $H[\mu(\theta_j) \mid X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn}]$, dependiente de los datos observados, mediante el método de MCO. Se define, prescindiendo del subíndice j:

- $\mu(\theta) = E[X \mid \theta]$ → prima de riesgo individual;
- $m = E_{Total}[X] = E[\mu(\theta)]$ → prima de riesgo colectiva o valor esperado de todas las primas de riesgo individuales;
- $a = V[\mu(\theta)]$ → varianza de las primas de riesgo individuales (indicador heterogeneidad);
- $s^2 = E[V(X \mid \theta)]$ → medida global de la dispersión de la siniestralidad individual.

Se supone que todas las $X_i \mid \theta$ son iid con media y varianza comunes $\mu(\theta)$ y $\sigma^2(\theta)$.

Partiendo de la aproximación lineal de $H[\mu(\theta) \mid X_1, X_2, \dots, X_n]$, por el método de MCO se obtiene:

$$a + b\bar{X} = a + b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Donde:

$$a = (1-b)m$$

$$b = \frac{n}{n+k}$$

$$k = \frac{E[\sigma^2(\theta)]}{V[\mu(\theta)]}$$

Por tanto:

$$b = \frac{n}{n + \frac{E[\sigma^2(\theta)]}{V[\mu(\theta)]}} = \boxed{\frac{nV[\mu(\theta)]}{nV[\mu(\theta)] + E[\sigma^2(\theta)]}}$$

Z

Se puede demostrar que:

$$H\ [\ \mu(\theta)\ |\ X_1, X_2, \dots\ , X_n\ ]\ =\ [\ 1 - Z(n)]m\ +\ Z(n)\bar{X}$$

Donde:

$$Z(n) = \frac{an}{an + s^2} = \frac{nV\ [\ \mu(\theta)\ ]}{nV\ [\ \mu(\theta)\ ] + E[\sigma^2(\theta)]}$$

Se puede observar que el resultado no depende de la distribución de probabilidad de X ni de la distribución de probabilidad de θ, por eso se habla de "distribución libre".

Del factor de credibilidad Z(n) cabe mencionar:

- Z(n) es una función creciente en n, de modo que Z(n)→1 cuando n→∞, mientras que tenderá a 0 cuando n tienda a 0. Por tanto, n=0 supone que no se dispone de experiencia para el asegurado (se trata de un contrato nuevo) y la prima a cobrar será la prima colectiva. Conforme aumente n, la información individual cobrará más peso.
- Z(n) es también una función creciente de las medias teóricas. Es lógico que, si la cartera no es heterogénea (a=0), entonces la prima colectiva es el mejor estimador de la prima individual, mientras que una mayor heterogeneidad de la cartera debe suponer dar mayor peso a la información individual.
- Z(n) es una función decreciente respecto al valor esperado de la varianza teórica: a mayor varianza del individuo, menor peso se da a su experiencia individual y mayor a la del colectivo.

Modelo de Bülhmann-Straub

Este es una generalización del modelo anterior, y se caracteriza porque introduce observaciones ponderadas con el factor de ponderación m_{ij}. Por tanto, considera que no todas las pólizas ni todos los períodos de tiempo tienen la misma importancia.

En la práctica, este factor de ponderación suele representar el número de reclamaciones, mientras que en X_{ij} suele representar la cantidad reclamada.

Siguiendo el razonamiento expresado en el modelo anterior, puede afirmarse que:

$$H\ [\ \mu(\theta)\ |\ X_1, X_2, \dots\ , X_n\ ]\ =\ [\ 1 - Z_i(n)]\bar{X}\ +\ Z_i(n)\bar{X_i}$$

Donde:

$$Z(n) = \frac{am}{am + s^2}$$

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Por tanto, se observa que el modelo de credibilidad es diferente para cada póliza.

Modelos bayesianos

El uso de distribuciones a priori, con un marcado carácter subjetivo, resulta útil en el mercado asegurador para realizar la tarificación de un riesgo nuevo del cual no se dispone de información.

La visión bayesiana fue fácilmente incorporada a la visión actuarial de manera que primas calculadas con metodología bayesiana podían ser expresadas con fórmulas de credibilidad.

Por tanto:

$$prima\,(a\ posteriori) = [1 - Z(n)] \cdot\ prima\ a\ priori + Z(n) \cdot\ Experiencia\ observada$$

Siendo:

- La prima a posteriori, la prima que recoge la información a priori, completa con la información de los datos (sería la prima de los asegurados al riesgo j);
- La prima a priori, la prima en base al conocimiento que tenemos antes de observar los datos (sería la prima a aplicar a un colectivo al que pertenece el asegurado j); y
- La experiencia observada, las conclusiones que extraemos de la observación de los datos (la prima obtenida en base a la experiencia del asegurado j).

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 42. Introducción a los modelos lineales generalizados: Concepto y finalidad. Estimación del modelo. Diagnosis del modelo. Aplicaciones.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Introducción a los modelos lineales generalizados: Concepto y finalidad. Estimación del modelo. Diagnosis del modelo. Aplicaciones

Introducción a los GLM: Concepto y finalidad

Los modelos lineales tienen las siguientes características:

- **Linealidad:** Cuando se introduce el término de linealidad se busca que la relación existente entre las variables independientes y la explicada sea de tipo lineal, esto es, los cambios en la variable dependiente son constantes respecto de los cambios que se produzcan en las variables independientes. → La variable objetivo puede explicarse como combinación lineal de las variables independientes.

  La linealidad es entre los parámetros no entre las variables.

- **Relación unidireccional:** Las variables independientes (exógenas) pueden influir en la endógena (dependiente, respuesta, objetivo) pero no al revés.

- **Especificidad del modelo**: La variables introducidas en el modelo para explicar el mismo deben poder explicar el mismo (ser significativas)

Cuando se habla en términos de modelos lineales, se habla de modelos de regresión

Regresión: En un modelo de regresión lo que se busca es que una variable objetivo o dependiente (explicada) sea explicada por una o varias variables explicativas o independientes.

Aunque existen otras formas de analizar las relaciones entre variables:

ANOVA: Compara dos o más medias mediante el estudio de su varianza

ANCOVA: Generaliza el ANOVA para variables continuas

La regresión lineal clásica u ordinaria (RLO) es un caso particular de la regresión lineal general (RLG), en la que se han establecido unas condiciones previas que deben cumplirse.

El modelo de regresión ordinario o clásico está sujeto a una serie de condiciones o requisitos previos que deben cumplirse para que los resultados del modelo puedan realmente tomarse como acertados.

Se recuerdan estas hipótesis dado que los modelos lineales generalizados precisamente se caracterizan por flexibilizar estas restricciones, pro generalizar este modelo.

1) Errores:

- Normalidad de los errores → se asume además normalidad de la respuesta.
- Su media es cero.

        - Desviaciones respecto de la recta de regresión más o menos igual.
    - Su varianza debe ser constante (Homocedasticidad)
        - Sin patrones
    - Independencia de los errores → se asume además la independencia de las observaciones

2) <u>Multicolinealidad:</u> Variables explicativas deben tener correlación nula o mínima. Las variables exógenas deben tener información sobre la endógena que no contiene ninguna otra variable explicativa. Si hay información repetida puede suponer que una variable exógena sea combinación lineal de otra exógena y esto daría información redundante, multicolinealidad, que haría que los resultados del modelo no sean correctos

En los GLMs se conserva la hipótesis de independencia de las observaciones y la de la no correlación de las variables explicativas. El resto de las condiciones se generalizan, especialmente la de normalidad.

Las respuestas (y's) tendrán una distribución que puede ser cualquiera de la **familia exponencial.**

Lo que se modeliza no es la respuesta (y), sino una cierta transformación de dicha respuesta mediante una **función vínculo (link funtion)**, la que está linealmente relacionada con las variables explicativas.

La respuesta puede ser heterocedástica, (puede variar conjuntamente con la media)

La respuesta pertenece a la familia exponencial:

$$f(y) = c(y,\phi)e^{\left\{\frac{y\theta-a(\theta)}{\phi}\right\}}$$

θ es el Parámetro canónico o natural

ϕ es el Parámetro de Dispersión.

<u>Conceptos más importantes</u>

Es importante tener en cuenta los siguientes **conceptos** asociados a un modelo de regresión:

Grados de libertad: Los grados de libertad de un modelo son la diferencia entre el número de observaciones (n) y el número de variables explicativas (k), por tanto, va a ser siempre necesario tener al menos una observación más del número de parámetros a estimar (y habrá tantos parámetros como variables explicativas más un término independiente)

Término independiente: el término independiente (intercept) es aquel que recoge toda la información que no es posible dar a través de las variables explicativas que se han introducido en el modelo.

Componente aleatoria: se refiere a la variable respuesta y a la distribución de probabilidad de ésta.

Componente sistemática: Son las variables independientes en una combinación lineal de éstas, predictor lineal.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$$

Función vínculo: la función vínculo es una función sobre el valor esperado de la respuesta como combinación lineal de la componente sistemática. Esto es, esta función relaciona las dos componentes.

$$\mathrm{f}\big(E(Y)\big) = f(\mu) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$$

Cuando la función link es la identidad se obtiene el modelo lineal clásico.

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$$

La función vínculo es una función sobre la media de la variable respuesta. El modelo lineal generalizado es:

$$g(\mu) = x'\beta$$

La relación entre el parámetro de dispersión y el canónico y la media y varianza de la variable respuesta es:

$$E(y) = \dot{a}(\theta)$$

$$Var(y) = \phi\ddot{a}(\theta)$$

Los GLMs más habituales son:

- La **Regresión Logística**, en la que la respuesta es Binomial (Bernouilli), la varianza es igual a la media multiplicada por (1-la media), y la trasformación Link es el Logit.
- La **Regresión de Poisson**, en la que la respuesta es Poisson, la varianza es igual a la media y la función Link es el logaritmo. Se utiliza para variables contadoras (ej. Número de siniestros)
  - → Para casos de sobredispersión, la respuesta puede ser **Regresión Binomial Negativa** (link la función logarítmica)
- La **Regresión Lineal**, en la que la respuesta es **normal,** la varianza es constante y el Link es la identidad.
- **Regresión Gamma y Regresión Inversa Gaussiana** para variables continuas donde la varianza aumenta según aumenta la media, hay asimetría (Ej. Cuantía de siniestros)
- **Regresión exponencial** para el estudio de funciones de supervivencia

Los GLMs generalizan al modelo clásico de Regresión Lineal Múltiple porque:

Las respuestas pueden pertenecer a cualquier distribución de la familia exponencial, no necesariamente normal. Pueden, por tanto, ser asimétricas.

La relación entre medias y predictores no es directa, sino que viene dada por una cierta función vínculo.

Si la función link es la identidad se está ante el modelo lineal clásico.

Estimación del modelo

Los pasos a seguir para la estimación del modelo son:

1) Elegir la distribución de la respuesta, f(y).

2) Elegir la función Link g (esto se simplifica a veces porque se elige el "Link Canónico").

3) Elegir las variables explicativas x's para modelizar la respuesta y. Se asume la independencia de las observaciones.

4) Ajustar el modelo estimando los parámetros (betas).

5) Generar predicciones de y para diferentes x's, y estudiar la bondad del ajuste y las posibles mejoras.

Elección de la distribución respuesta

Si se especifica cómo depende la varianza de la media, es decir, cómo es la función de varianza, se estará identificando la distribución exponencial que nos interesa. Por ejemplo

$$
\begin{aligned}
&V(\mu) = 1 \rightarrow Normal \\
&V(\mu) = \mu \rightarrow Poisson \\
&V(\mu) = \mu^p (1 < p < 2) \rightarrow Tweedie * \\
&V(\mu) = \mu^2 \rightarrow Gamma \\
&V(\mu) = \mu^3 \rightarrow Inversa - Gaussiana
\end{aligned}
$$

** Tweedie realmente no es un GLM, se indica aquí por estar el valor de p entre dos funciones que sí son de la familia exponencial.*

Distribución	θ	$a(\theta)$	ϕ	$E(y)$	$V(\mu)$
$B(n,\pi)$	$\log(\pi/(1-\pi))$	$\pi \log(1+e^{\theta})$	1	$n\pi$	$\mu(1-\frac{\mu}{n})$
$P(\mu)$	$\log(\mu)$	e^{θ}	1	μ	μ
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	$\theta^2/2$	σ^2	μ	1
$G(\mu,\nu)$	$-1/\mu$	$-\log(-\theta)$	$1/\nu$	μ	μ^2
$IG(\mu,\sigma^2)$	$-1/2\mu^2$	$-\sqrt{-2\theta}$	σ^2	μ	μ^3
$NB(\mu,\kappa)$	$\log\frac{\kappa\mu}{1+\kappa\mu}$	$-\frac{1}{\kappa}\log(1-\kappa e^{\theta})$	1	μ	$\mu(1+\kappa\mu)$

Elección de la función link

Algunas link canónicas son:

Distribución Normal→μ esto es, la función link es la identidad

Bernouilli → $logit(\mu)$

Poisson y Binomial negativa → $log(\mu)$

Gamma → $-1/\mu$

Inversa Gaussiana → $-1/(2\mu^2)$

La función link canónica no tiene por qué ser la que se use, por ejemplo en el caso de querer modelizar la cuantía de la siniestralidad esperada con Gamma o Inversa Gaussiana se suele usar, por dar buenos resultados, la logarítmica.

Las Link Canónicas simplifican el modelo, pero no hay ninguna razón a priori para usarlas.

La importancia de la función link radica en lo siguiente. En un GLM se tiene que verificar que:

$$g(\mu_i) = g(\dot{a}(\theta_i)) = x_i{}'\beta = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik}$$

Si tomamos

$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik} = \theta_i$$

Por ejemplo, en la Poisson,

$$g(\mu) = \log(\mu)$$

Función de varianza

$V(\mu)$ se llama la Función de Varianza, e indica la relación entre la media y la varianza.

Se tiene entonces

$$Var(y) = \phi\ddot{a}(\theta) = \phi\frac{\partial\dot{a}(\theta)}{\partial\theta} = \phi\frac{\partial\mu}{\partial\theta} = \phi V(\mu)$$

No toda función de Varianza proviene de un miembro de la familia de distribuciones exponenciales.

En la práctica se trabaja con las distribuciones más usuales, que ya están incluidas en los programas de software estadístico.

Estimación de parámetros

Se suelen estimar maximizando la función de verosimilitud (MLE por sus siglas en inglés). Los estimadores MLE tienen las siguientes propiedades:

- Son asintóticamente insesgados
- Son consistentes
- Y aseguran varianza Mínima

La función de verosimilitud de la familia exponencial es (modificando sus parámetros para obtener una u otra distribución).

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i \theta_i - a(\theta_i)}{\phi_i} + Log(c(y_i, \phi_i)) \right\}$$

Para una link canónica

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i(x_i{}'\beta) - a(x_i{}'\beta)}{\phi_i} + Log(c(y_i, \phi_i)) \right\}$$

Para el cálculo de los MLE se suele utilizar (en los software más comunes) la técnica de los *iterated weighted least squares*.

Los estimadores tienen las propiedades usuales de los MLE. Asintóticamente,

$$b \sim N(\beta, \phi(X'WX)^{-1})$$

Esta última expresión permite construir **tests t** para la significación individual de los estimadores (test de Wald).

Diagnosis de modelo

Para comprobar el ajuste del modelo se utilizan distintos contrastes en general:

Test de Wald

Para la significatividad de los betas

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\phi V(\mu_i)}$$

Chi-Cuadrado de Pearson

Este contraste compara la función de verosimilitud del modelo saturado con la del modelo propuesto,

$$\Delta = 2(L_{sat} - L_{\mathrm{mod}\,elo})$$

Razón de Verosimilitudes

Es la base del test Tipo 3 y es el cociente entre la función de verosimilitud del modelo saturado con la del modelo propuesto,

Devianza

Es un resultado muy asociado a los GLM, no debe confundirse con la desviación típica, se basa de nuevo en la función de verosimilitud. Es una medida de error, a menor devianza, mejor es el modelo en términos de ajuste.

Se indican aquí algunos ejemplos en función de la distribución.

Normal

$$\Delta = \left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \sum_{i} (y_i - \hat{\mu}_i)^2$$

Poisson

$$\varDelta = 2\sum_i \left\{ y_i \log \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} - (y_i - \hat{\mu}_i) \right\}$$

Gamma

$$\varDelta = 2v\sum_i \left\{ -\log \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} + \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} \right\}$$

Akaike Criterion

Es de los más utilizados y compara la función de verosimilitud del modelo respecto de la función de verosimilitud de un modelo con menos variables, esto es, contesta a la cuestión de si el modelo mejora al ir agregando nuevas variables. Es mejor cuanto más pequeño sea y por sí sólo, como los anteriores, no da información, deben usarse en comparación entre modelos.

$$-2L(b_{MLE}) + 2k$$

Donde k es el número de predictores y L la función de verosimilitud.

Generalmente se encuentra escrita como:

$$2k - 2Ln(L)$$

Análisis de residuos

Como en todo ajuste, un análisis de residuos ayuda a verificar la bondad de ajuste, a mayor número de residuos, pero el ajuste. Hay muchas formas de estudiar los residuos. Se exponen aquí algunas.

Residuos de la devianza

$$\Delta = \sum_i r_{iD}^2$$

Residuos de Pearson

$$\chi_P^2 = \sum_i r_P^2$$

Tipos de análisis (en software)

Type I y Type III

Si se usa el análisis **tipo I** se obtiene una tabla que sumariza las diferencias entre los logaritmos de la verosimilitud entre cada par de modelos. Esto se lleva muchos recursos, por lo que se debe tener un buen equipo que soporte este análisis. Está basado en la suma de cuadrados y el resultado de este proceso va a depender del orden en el que se hayan establecido las variables explicativas bajo la sentencia del modelo

El **Tipo III** no depende del orden de las variables, se lleva menos recursos, pero es menos preciso. En este análisis se estima un ratio de verosimilitud para contrastar cada uno de los términos del modelo.

Aplicaciones

Distribución de Poisson

La variable dependiente es una variable contadora que toma valores enteros (0,1,2,3,...).

Esta variable suele describir el número de ocurrencias de un suceso en un determinado intervalo de tiempo.

Por ejemplo, número de siniestros, número de hospitalizaciones, etc.

La distribución de Poisson se define como:

$$\Pr[Y = y] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}, y = 0,1,2\ldots$$

Donde λ es el número promedio de ocurrencias de un suceso en un periodo de tiempo.

Supuestos:

- Independencia.
- Prob. de ocurrencia en un intervalo proporcional a la longitud del intervalo (Estacionariedad).
- Prob. de ocurrencias múltiples en un intervalo pequeño tiende a cero.

GLM

$$log(f(y)) = log(c(y,\phi)) + \frac{y\theta - a(\theta)}{\phi}$$

En Poisson

$$log(f(y)) = -\mu + y\, log(\mu) - log(y!)$$

Identificando términos

$$\phi = 1$$
$$c(y, \phi) = y!$$
$$\theta = log(\mu)$$
$$a(\theta) = e^{\theta} = \mu$$

Por tanto

$$E(y) = \dot{a}(\theta) = e^{\theta} = \mu$$
$$Var(y) = \phi\ddot{a}(\theta) = e^{\theta} = \mu$$

Cada respuesta sigue una Poisson.

Las variables explicativas se relacionan con la media mediante una relación log-lineal:

$$Log(\lambda_i) = x_i'\beta = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik}$$

La función link g

$$g(Ey) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k$$

En Poisson la función link es la logarítmica

$$Log(E(y)) = Log(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k$$

Una propiedad de la distribución de Poisson es que la media coincide con la varianza:

$$\lambda_i = e^{x_i'\beta} = E[yi|xi] = Var[yi|xi]$$

Por tanto, este modelo no sirve si hay **Sob redispersion** (Var[y]>E[y]) o **Infradispersión** (Var[y]<E[y])

La relación entre los coeficientes y las respuestas viene dada por:

$$\lambda_i = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik}}$$

En términos de estimaciones,

$$\widehat{\lambda_i} = e^{b_0 + b_1 x_{i1} + \ldots + b_k x_{ik}}$$

En el caso continuo, son elasticidades

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial xi} = \lambda_i \beta_i$$

Si la variable es binaria, su exponencial mide el incremento de la respuesta esperada al pasar de cero a uno

$$\lambda' = \lambda . e^{\beta}$$

Si beta es mayor que 0, la media se incrementa

Estimación

Se estiman los parámetros con MLE. La función de log-verosimilitud es no lineal:

$$\log L = \sum_{i=1}^{n}[-\lambda_i + y_i\lambda_i - \log y_i\,!] = \sum_{i=1}^{n}[-e^{x_i'\beta} + y_i x_i'\beta - \log y_i\,!]$$

Los parámetros estimados son que hacen máxima dicha función

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{x}_i\,[e^{x_i'\beta} - y_i]] = 0$$

Se demuestra que Log L es cóncava y tiene un único máximo global.

¿Cómo incorporar la exposición?

No se podrían comparar el número de eventos en una muestra en la que existen distintas duraciones o longitudes o tiempo de permanencia. Por ejemplo, no es comparable un asegurado que tenga un siniestro en una permanencia en la compañía de 5 años que uno que lleva dos meses y ha tenido un siniestro.

La variable de interés es λ_i/E_i, donde E_i es la exposición.

Entonces se tiene una nueva función es:

$$\log(\lambda_i) = \log(E_i) + \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots \beta_k x_{ik}$$

Esto se hace a través de un "offset": introduciendo a la Exposición como una nueva variable explicativa, y forzando a su coeficiente a tomar el valor 1.

Modelo Binomial Negativa

La BN se usa a menudo como alternativa a la Poisson cuando hay sobredispersión.

La Poisson es un caso límite de la BN, cuando p tiende a 1 y r tiende a cero, de forma que

$$rp \to \lambda$$

La BN se obtiene como una mixtura de Poisson con Gamma.

La BN tiene dos parámetros y es más flexible que la Poisson.

La varianza de una BN es mayor que su media

Las probabilidades de una BN son:

$$\Pr(y = j) = \binom{j + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^j$$

Media y varianza

$$E(y) = r(1 - p)/pVar(y) = r(1 - p)/p^2$$

Regresión logística

Se usa con respuestas binarias como para:

- Predicción de impagos e insolvencias, riesgo de crédito
- Predicción de la hospitalización en seguros de salud
- Predicción de la ocurrencia de siniestros en seguros de automóviles
- Cualquier problema en el que se quiera predecir la ocurrencia de un suceso. Hay dos posibles valores de la respuesta: y=0 (no ocurrencia), y=1 (ocurrencia).

El Modelo Lineal presenta problemas ante una variable tipo bernoulli

1) La variable respuesta es Bernouilli, no es normal→ Se desea predecir la media E(y)=π de una Bernouilli, es decir, la probabilidad de ocurrencia del suceso.

2) La varianza de la Bernouilli no es constante, depende de la media (Var(y) = π(1-π)). Luego hay heteroscedasticidad.

¿Qué pasa si los valores predichos de π están fuera del intervalo entre 0 y 1?

La solución al último problema es introducir una función que proyecte toda la recta real en el intervalo (0,1). Hay varias posibilidades:

Logit $\pi(z) = \dfrac{1}{1+\exp(-z)}$

Probit $\pi(z) = \Phi(z)$

Log-Log $\pi(z) = 1-\exp(-\exp(z))$

Sea $z = \beta_0 + \beta_1 x_1 + .. + \beta_k x_k$

Decir que

$$\pi = \frac{1}{1+e^{-z}} = \frac{e^z}{1+e^z}$$

Es lo mismo que decir que

$$\log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = z$$

A la función

$$\log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = g(\pi)$$

Se la conoce como función LOGIT, de ahí el nombre de esta regresión: logística.

$$z = g(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + .. + \beta_k x_k$$

La regresión logística tiene ciertas peculiaridades dentro de la modelización GLM, se procede a continuación a verlas.

ODDS RATIO: Interpretación coeficvientes ODDS RATIO

$$exp(\beta) = \frac{\frac{Pr(y = 1/x = 1)}{1 - Pr(y = 1/x = 1)}}{\frac{Pr(y = 1/x = 0)}{1 - Pr(y = 1/x = 0)}}$$

Pr/(1-Pr) se conoce en inglés como “odds”. Entonces exp(β) es un cociente de “odds”.

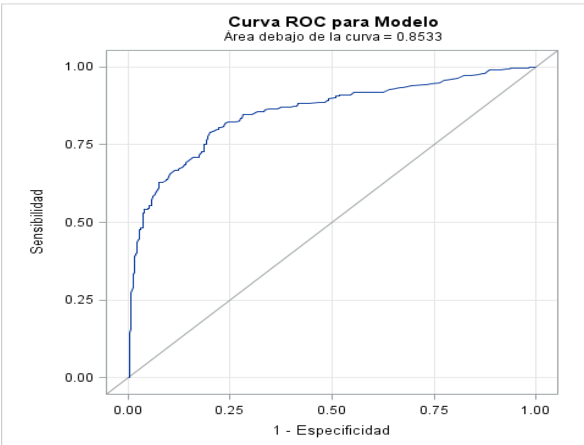
No son probabilidades, compara probabilidades de un suceso frente a su contrario.

Medidas de bondad de ajuste

Son las mismas que en el resto de GLM pero además se pueden añadir:

- **Tablas de Clasificación:** evalúan el rendimiento predictivo del modelo dando una visión de cómo ha clasificado el modelo el evento frente a la realidad de la clasificación en la muestra. Surge aquí dos conceptos:
    - **La especificidad**
    - **La sensibilidad**

  Un modelo muy sensible clasificará en cuanto exista una mínima posibilidad de que el suceso se encuentre en la respuesta, pero podría ser poco específico. Un modelo muy específico es muy exigente a la hora de clasificar, y por tanto poco sensible. Ambas son contrapuestas y se busca obtener un modelo que maximice ambas características al mismo tiempo.
- **Curvas ROC** (Receiver Operating Characteristic), representan conjuntamente **sensibilidad** (True Positive Rate, o frecuencia relativa de acertar la ocurrencia del suceso) y **especificidad** (True Negative Rate, o frecuencia relativa de acertar la no ocurrencia).
- **AUC**, área bajo la curva ROC, mejor cuanto más próxima a 1.



EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 43. La reserva matemática. Cálculo por el método prospectivo y retrospectivo. Cálculo de la provisión en un momento cualquiera. Métodos de recurrencia. Cálculo de la provisión por medio de las primas de inventario y por las primas de tarifa. Provisión Zillmer.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

La reserva matemática.

En el momento de formalizar un contrato de seguro de vida si las primas han sido calculadas de acuerdo con el principio de equivalencia actuarial, la esperanza matemática de la diferencia entre el valor actual actuarial de la prestación y el valor actual actuarial de la contraprestación, debe ser cero.

$$L = VAA_{prest} - VAA_{primas}$$

$$E(L) = 0$$

Con posterioridad al inicio de la cobertura esta diferencia puede ser no nula y es denominada, si existe, reserva matemática.

Heras, Vilar Zanón y Gil Fana observan que no es necesario o si quiera, requerible, el uso o empleo de las mismas bases técnicas para el cálculo de la prima que para el cálculo de la reserva matemática ya que la finalidad es el cálculo de la reserva matemática que debe figurar en el balance o sobre el que gira la cuantía de los valores garantizados (derechos en ciertos productos o modalidades del seguro de vida).

Reserva matemática discreta, caso general.

Se va a suponer una operación de seguro de vida para una cabeza de edad x cuyas primas (discretas) se han calculado de acuerdo con el principio de equivalencia actuarial; h años después la cabeza sigue con vida→ se quiere conocer el valor de la diferencia entre los valores actuales actuariales de la prestación y la contraprestación o primas.

Sea hL el resultado de la diferencia en ese momento entre el valor actual de las obligaciones y el valor actual de las primas se tiene

Cuando $h = 0$ es cuando se da la equivalencia actuarial

$$V\ddot{a}A_x\mathcal{P} = VaA_x\mathcal{C}$$

$\mathcal{P}$: Prima

$\mathcal{C}$: Contraprestación

Valor actual actuarial de las primas igual a valor actual actuarial de la contraprestación.

$$hL = \mathcal{C}_{K_{x+h+1}} v^{K_{x+h+1}} - \sum_{t=0}^{K_{x+h}} \mathcal{P}_{h+t}\ v^t$$

$$K_{x+h} = 0,1,2,\ldots,..$$

$$P(hL = \mathcal{C}_{K_{x+h+1}} v^{K_{x+h+1}} - \sum_{t=0}^{K_{x+h}} \mathcal{P}_{h+t}\ v^t) = {}_{k/}q_{x+h}$$

El valor esperado de $hL, E(hL)$,es el valor actual actuarial del mismo y es la reserva matemática calculada por el método prospectivo.

Cálculo por el método prospectivo y retrospectivo.

Método prospectivo

Hipótesis. El capital en su caso se paga al final del año de fallecimiento.

$$ {}_hV_x = E(hL) = \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \left(\mathcal{C}_{h+k+1}\, v^{k+1} - \sum_{t=0}^{k} \mathcal{P}_{h+t}\, v^{t} \right) {}_{k/}q_{x+h} = $$

$$ = \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \left(\mathcal{C}_{h+k+1}\, v^{k+1}\, {}_{k/}q_{x+h} - \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \sum_{t=0}^{k} \mathcal{P}_{h+t}\, v^{t}\, {}_{k/}q_{x+h} \right. $$

$$ \sum_{t=0}^{k} v^{t} = \ddot{a}_{\overline{n|}\imath} $$

$\ddot{a}_{\overline{n|}\imath}$ Renta financiera prepagable

$$ \sum_{t=0}^{k} \ddot{a}_{\overline{n|}\imath}\, {}_{k/}q_{x+h} = {}_nE_{x+h} $$

$$ {}_hV_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \left(\mathcal{C}_{h+k+1}\, v^{k+1}\, {}_{k/}q_{x+h} - \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \mathcal{P}_{h+t}\, {}_kE_{x+h} \right. $$

SEGURO	RENTA

$$ {}_hV_x = (VAC)_{x+h} - (V\ddot{a}P)_{x+h} $$

$(VAC)_{x+h}$Valor actual actuarial de un seguro de vida entera en x+h

$(V\ddot{a}P)_{x+h}$ Valor actual actuarial de la renta que suponen las primas periódicas

Se supone que la prima de x+h aún no ha vencido cuando se hace la operación (reserva por la derecha).

Se denomina prospectivo a este método de cálculo de reserva porque se hace actualizando los flujos futuros de las obligaciones entre las partes.

Método retrospectivo

Por su parte el método retrospectivo capitaliza las obligaciones pasadas, al traerlas de un momento pasado al presente.

Se parte de nuevo del momento cero en el que se da la equivalencia actuarial:

$$ V\ddot{a}P_x = VaC_x $$

Y se capitaliza actuarialmente,

$$ {}_hV_x = \frac{V\ddot{a}P_{x:\overline{h|}} - VaC^1_{x:\overline{h|}}}{{}_hE_x} $$

El método retrospectivo consiste en valorar en x+h la diferencia de las obligaciones entre asegurado y asegurador, en el intervalo [x , x+h]

Las reservas por ambos métodos deben coincidir siempre que se hayan usado las mismas bases técnicas para ambos cálculos y para el cálculo de las primas.

Cálculo de la provisión en un momento cualquiera.

En función del tipo de producto, la provisión (la reserva) se calculará de una u otra forma, aunque la base de cálculo es lo indicado en los epígrafes anteriores.

Se exponen aquí varios ejemplos:

Ejemplo: seguro de vida entera

Hipótesis: el pago del seguro se produce al final del año de fallecimiento y las primas al inicio de cada año.

Sea el seguro A_x un seguro de vida entera pagadero en el momento en el que fallezca el asegurado, y sea $\ddot{a}_x$ la renta prepagable unitaria de las cuotas anuales pagaderas desde la edad x hasta el fallecimiento, la prima anual es:

$$ P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} $$

La reserva por el método prospectivo es:

$$ hL = v^{K_{x+h}+1} - P_x\ddot{a}_{\overline{K_{x+h}+1|\,i}} $$

$$ K_{x+h} = 0,1,2,\ldots,.. $$

$$ P\left(hL = v^{K_{x+h}+1} - P_x\ddot{a}_{\overline{K_{x+h}+1|\,i}}\right) = {}_{k/}q_{x+h} $$

$$ {}_hV_x = E(hL) = A_{x+h} - P_x\ddot{a}_{x+h} $$

La reserva por el método retrospectivo es:

$$ {}_hV_x = \frac{P_x\ddot{a}_{x:\overline{h|}} - A^1_{x:\overline{h|}}}{{}_hE_x} $$

Donde

$$ \frac{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}}{{}_hE_x} = \ddot{s}_{x:\overline{h|}} $$

$\ddot{s}_{x:\overline{h|}}$ es una renta final.

$$ \frac{A^1_{x:\overline{h|}}}{{}_hE_x} = {}_hK_x $$

${}_hK_x$ es el coste acumulado del seguro.

Por tanto,

$$ {}_hV_x = P_x \ddot{s}_{\overline{x:h|}} - {}_hK_x $$

Esto es, las primas pagadas hasta el momento x+h, valoradas en dicho momento menos el coste acumulado del seguro en dicho momento.

Caso particular: seguro de vida entera con pago de primas temporal

En este caso particular ha de observarse si al calcular la reserva sigue quedando pendiente pago de primas o si, por el contrario, han sido todas liquidadas.

$$ h < n => \begin{cases} {}_h^nV_x = A_{x+h} - {}_nP_x \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}} & Prospectivo \\ {}_h^nV_x = \dfrac{{}_nP_x \ddot{a}_{\overline{x:n|}} - A^1_{\overline{x:h|}}}{{}_hE_x} & Retrospectivo \end{cases} $$

$$ h \geq n => \begin{cases} {}_h^nV_x = A_{x+h} & Prospectivo \\ {}_h^nV_x = \dfrac{A^1_{\overline{x:h|}} - {}_nP_x \ddot{a}_{\overline{x:n|}}}{{}_hE_x} & Retrospectivo \end{cases} $$

Ejemplo: seguro temporal

Si la temporalidad de la cobertura coincide con la temporalidad de las primas

$$ P^1_{\overline{x:n|}} = \frac{A^1_{\overline{x:h|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}} $$

En el caso prospectivo,

$$ h < n \ \ Prospectivo => \left\{ {}_hV^1_{\overline{x:n|}} = A^1_{\overline{x+h:n-h|}} - P^1_{\overline{x:n|}} \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}} \right. $$

En $h = n$

$$ {}_nV^1_{\overline{x:n|}} = 0 $$

Ejemplo: seguro capital diferido

$$ P^1_{\overline{x:n|}} = \frac{A^1_{\overline{x:h|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}} $$

Si h<n

$$ {}_hV^1_{\overline{x:n|}} = {}_hV^1_{\overline{x:n|}} = A^1_{\overline{x+h:n-h|}} - P^1_{\overline{x:n|}} \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}} $$

En h=n ${}_hV^1_{\overline{x:n|}} = 1$ capital unitario

Ejemplo: seguro mixto simple

Primas

$$P_{\overline{x:n|}} = \frac{A^{1}_{\overline{x:h|}} + A_{\overline{x:h|}}^{\;\;\;1}}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}} = \frac{A_{\overline{x:h|}}}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}}$$

Si h<n

$${}_{h}V_{\overline{x:n|}} = {}_{h}V_{\overline{x:n|}} = A_{\overline{x+h:n-h|}} - P_{\overline{x:n|}}\ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}}$$

En h=n ${}_{n}V_{\overline{x:n|}} = 1$ capital unitario

Ejemplo: renta diferida

$$P_x = \frac{{}_{n/}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}}$$

En h<n

$${}_{h}V({}_{n/}\ddot{a}_x) = {}_{n-h/}\ddot{a}_{x+h} - P_x\ddot{a}_{\overline{x+h:n-h|}}$$

En n

$${}_{h}V({}_{n/}\ddot{a}_x) = \ddot{a}_{x+h}$$

Deja de ser diferida y se convierte en inmediata.

Métodos de recurrencia.

Los métodos de recurrencia relacionan la reserva correspondiente a un periodo de tiempo con el inmediato anterior o posterior.

Considerando una cabeza de edad x con hipótesis de fallecimiento a final de año y primas prepagables:

$$C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_{\omega-x}\}$$

$$P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{\omega-x-1}\}$$

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} P_k \; {}_{k}E_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_{k+1} \; v^{k+1} \; {}_{k/}q_x$$

$$v^{k+1} \; {}_{k/}q_x = A_x$$

El método de recurrencia relaciona las reservas de dos periodos consecutivos

$$_{h+1}V_x = \frac{({}_hV_x + P_x)(1+i) - C_{h+1}q_{x+h}}{p_{x+h}}$$

*** P (mayúscula es prima)., p minúscula es probabilidad.*

$$({}_hV_x + P_x)(1+i) = {}_{h+1}V_x \ \ p_{x+h} + C_{h+1}q_{x+h}$$

La reserva del año h más la prima de ese año capitalizada un año $({}_hV_x + P_x)(1+i)$ debe cubrir las reservas de si el asegurado sobrevive ${}_{h+1}V_x \ \ p_{x+h}$ y el capital garantizado si fallece $C_{h+1}q_{x+h}$

Cálculo de la provisión por medio de las primas de inventario y por las primas de tarifa.

Consideraciones previas

En la Ley Orgánica de Supervisión y Solvencia de las Entidades Aseguradoras y Reaseguradoras 20/2015 de 14 de Julio así como en el RD 1060/2015 de 20 de diciembre (que desarrolla la anterior) ha habido importantes cambios respecto a la anterior legislación, incluido en el concepto.

- La legislación de la década de los 80 y anterior se denomina Reservas a lo que desde 1987 se ha venido denominando provisión matemática.
- Hasta la actual legislación, la anterior RD 2486/1998 OSSP) establece la base de cálculo de la provisión matemática en la prima de inventario pero la actual legislación(art 13.1 RD 1060/2015 de 20 de diciembre) establece que la base de cálculo para la provisión es la prima de tarifa o comercial

Prima de inventario $P^i = P + \ g_1$

La prima de inventario es igual a la prima pura más el recargo de gastos de administración.

Prima comercial o de tarifa

$$P^t = P + \ g_1 + g_2 + B$$

La prima de tarifa es igual a la prima de inventario más gastos de adquisición o gestión externa y el beneficio.

Considerando un seguro de vida entera, la provisión por medio de la prima de inventario (según marca el epígrafe) sería:

$$P'_x \ddot{a}_x = A_x + \alpha \ddot{a}_x$$

Donde α es el recargo de gastos de gestión interna.

Si se calcula la reserva en un momento h posterior al inicio, la provisión a prima de inventario es:

$$ {}_hV'_x = A_{x+h} + \alpha \ddot{a}_{x+h} - P'_x \ddot{a}_{x+h} $$

$$ P'_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \alpha $$

$\frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ es la prima Pura P_x, sustituyendo:

$$ {}_hV'_x = A_{x+h} + \alpha \ddot{a}_{x+h} - \left(\frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \alpha \right) \ddot{a}_{x+h} = $$

$$ {}_hV'_x = A_{x+h} - \left(\frac{A_x}{\ddot{a}_x} \right) \ddot{a}_{x+h} $$

Que coincide con la reserva a prima pura.

Si el pago de las primas finaliza en n periodos y n<h

$$ {}_h^nV'_x = A_{x+h} + \alpha \ddot{a}_{x+h} - {}_nP'_x \, \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}} $$

Pero

$$ {}_nP'_x = {}_nP_x + \propto \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}} $$

Por lo que sustituyendo

$$ {}_h^nV'_x = A_{x+h} + \alpha \ddot{a}_{x+h} - \left({}_nP_x + \propto \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}} \right) \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}} = $$

$$ = \left(A_{x+h} - {}_nP_x \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}} \right) + \propto \left(\ddot{a}_{x+h} - \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}} \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}} \right) $$

La reserva a prima pura (primas temporales) es $(A_{x+h} - {}_nP_x \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}})$ mientras que la reserva para gastos de gestión interna queda $\propto (\ddot{a}_{x+h} - \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}} \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}})$.

Hay que tener en cuenta que los gastos de administración duran toda la vida de la póliza mientras que las primas se cobran durante un periodo inferior, el exceso forma parte de la provisión para atender los gastos en el periodo en el que ya no se pagan primas.

$$ \propto \ \ddot{a}_{x+h} > \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}} \ddot{a}_{\overline{x+h;n-h|}} $$

En el caso que h sea igual o superior a n entonces:

$$ {}_h^nV'_x = A_{x+h} + \alpha \ddot{a}_{x+h} $$

Donde ${}_h^nV_x = A_{x+h}$ es la prima pura a primas temporales y el segundo sumando la reserva para gastos de gestión interna.

Provisión Zillmer.

La prima de Zillmer es un tipo de prima que se sitúa entre la prima pura y la comercial, cuya finalidad es hacer frente a las prestaciones garantizadas por la póliza en lo que se refiere a los gastos de gestión y de producción (la comisión descontada).

Sea L: Resultado de la póliza= Valor actual de las obligaciones + valor actual de la comisión descontada – valor actual de la prima Zillmer

Sea E(L) el valor esperado de L, por tanto valor actual actuarial del resultado de la póliza.

El valor de las comisiones descontadas es una variable cierta.

Seguro de vida entera

$$P_x^Z = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \alpha \frac{P_x''}{\ddot{a}_x} = P_x + \alpha \frac{P_x''}{\ddot{a}_x}$$

P_x'' Prima de inventario con gastos de gestión externa

$$\alpha P_x'' = g_2$$

Si se define ahora Lt como el resultado de la póliza valorada a la edad x+t del asegurado

Lt:

- Valor actual de la siniestralidad en t
- (+) valor actual de los gastos de producción que generará la póliza a lo largo de su duración restante
- (-) valor actual de las primas Zillmer pendientes de vencimiento

Teniendo en cuenta que para el valor actual de los gastos de producción que generará la póliza a lo largo de su duración restante, la comisión se descuenta a inicio por lo que en t este valor es cero.

El valor esperado de Lt es la provisión matemática a prima de Zillmer, que se representa habitualmente como

$${}_tV_x^Z = E(L_t) = E(V.A.Siniestros) - E(VAP^Z)$$

Por ejemplo, en el caso del seguro a vida entera (C=1) inmediato y con primas anuales, de cuantía constante y vitalicias, este resultado sería,

$${}_tV_x^Z = A_{x+t} - P_x^Z \ddot{a}_{x+t}$$

Sustituyendo por lo indicado al inicio de este epígrafe:

$${}_tV_x^Z = (A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t}) - (\alpha \frac{P_x''}{\ddot{a}_x} \ddot{a}_{x+t})$$

$${}_tV_x = (A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t})$$

$${}_tV_p = (\alpha \frac{P_x''}{\ddot{a}_x} \ddot{a}_{x+t})$$

Siendo ${}_tV_p$ la reserva de gastos o comisiones descontadas.

Bibliografía

Matemática actuarial / Jesús Vegas Asensio, Ubaldo Nieto de Alba Autor Editorial MAPFRE

Matemática de los seguros de vida · Heras Martínez, Antonio · Vilar Zanón, José Luis · Fundación MAPFRE Estudios

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 44. El reaseguro I: concepto y función técnica, económica y financiera. Ecuaciones de equilibrio fundamentales. Criterios de clasificación del reaseguro. El reaseguro financiero. La retrocesión. El reaseguro de riesgos. Método facultativo: ventajas e inconvenientes, modalidades y aplicación.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. El reaseguro: concepto y función técnica, económica y financiera

Concepto

El reaseguro es la operación por la que un asegurador distribuye los riesgos, cediéndoles total o parcialmente a otro u otros aseguradores, con el objeto de reducir el volumen de las pérdidas que pueda producir cada contrato, lo que permite la aceptación de riesgos muy superiores a los que la capacidad de su empresa puede soportar.

El asegurador que acude a otro para cederle parte de sus riesgos recibe la denominación de cedente o reasegurado; mientras que el que asume la cobertura de la parte del riesgo cedido se llama aceptante o reasegurador. Es decir, el reaseguro supone la previa existencia de un contrato de seguro suscrito entre un tomador y un asegurador. A la operación documentada mediante este contrato se la denomina operación de seguro directo.

Funciones

Funciones técnicas

- Consigue o busca la homogeneidad cuantitativa y cualitativa de la cartera de seguros. Hablamos de homogeneidad cuantitativa en el sentido de que la cedente cede los riesgos asumidos que exceden de su capacidad financiera (plenos de retención); la cualitativa, por otro lado, hace referencia a la posibilidad de dos riesgos que cuentan con una misma suma asegurada supongan un riesgo diferente – así, el que mayor riesgo tenga será objeto de mayor cesión, ya que las prestaciones serían o mayores o más frecuentes.
- Ofrece una serie de servicios técnicos, administrativos, de tarificación de riesgos, etcétera, muy útiles para compañías que se inician en la cobertura de un determinado riesgo para que el carecen de la necesaria experiencia.

Función financiera

El reaseguro permite aumentar el número de riesgos contratados por las entidades aseguradoras, lo que eleva su capacidad financiera, contribuyendo a la formación de ahorro institucional y a su canalización.

Función económica

El reaseguro tiene particular importancia en la economía nacional, por el gran volumen de primas que canaliza, con sus repercusiones en la política de inversiones. Sin embargo, es en la política de cambio, referida al mercado exterior, donde crece aún más su importancia, al traducirse en un movimiento de divisas por las cesiones y aceptaciones internacionales realizadas. El resultado de estos movimientos supone, al finalizar el ejercicio, una determinada posición deudora o acreedora internacional. Si existe un excedente, se producirá un incremento en la Renta Nacional y, por el contrario, si existe un déficit, aparecerá una disminución por dicho concepto.

2. Clasificación del reaseguro

Atendiendo a las limitaciones impuestas a la autonomía de la libertad de las partes

Reaseguro obligatorio

Es aquél que se instrumenta por medio de un contrato por el que ambas partes, cedente y reasegurador, se obligan a ceder y aceptar, respectivamente, todos los riesgos previamente definidos en el contrato, en las condiciones estipuladas. El contrato por el que se articula la relación contractual obligatoria entre las partes recibe la denominación de tratado de reaseguro. Cualquier riesgo asumido por el cedente, siempre que por sus características se encuentre dentro del ámbito definido por el tratado, es objeto de cesión automática al reasegurador en las condiciones pactadas: el asegurador no podrá negarse a su cesión ni el reasegurador a aceptarlo.

Ventajas:

- mayor rapidez, al ofrecer cobertura automática;
- ahorro en gastos de administración; y
- mayor seguridad al reasegurador en la obtención de contratos.

Reaseguro facultativo

Cada cesión cada cesión es objeto de un acuerdo específico, que sirve de base al contrato celebrado entre asegurador y reasegurador. Se utiliza para aquellos riesgos que, por sus características, requieren de un estudio particularizado para poder decidir sobre su aceptación por parte del reasegurador o, sobre la porción que conviene reasegurar, por parte del cedente. Es muy típico aplicarlo para pólizas cuya suma asegurada es especialmente elevada o en aquellas en que el riesgo cubierto es particularmente peligroso.

Lo más habitual es que la operación facultativa se instrumentalice a través de las dos formas básicas:

- Proporcional: el reasegurador asume una participación en todos los siniestros registrados, a cambio de un % equivalente de las primas de seguro. La práctica es que la prima sea la prima de seguro menos la comisión de reaseguro, si bien en teoría debería ser la prima pura de riesgo (pero no se hace así porque los recargos de la aseguradora son distintos para cada caso y se complicaría el cálculo y se tardaría aún más en pactar la cesión).

- No proporcional: el reaseguro solo soporta la participación asumida en aquellos siniestros superiores a la retención del cedente. Esta modalidad es más barata para el asegurador.

Este tipo de reaseguro presenta una serie de ventajas:

- Se permite al reasegurador un estudio completo de cada riesgo y de ese modo puede realizar una adecuada selección, semejante a la que hace en las operaciones directas, con lo que se evita la aceptación obligatoria de riesgos malos. De ahí nace su supuesta superioridad técnica sobre el sistema de tratados.
- A cada contrato se le da el tratamiento que por sus especiales características requiera, sin someterlo a condiciones generales que pueden no ser perfectamente adaptables al caso concreto.
- Es el único sistema utilizable para la cobertura de los excedentes de riesgos muy grandes que agotan todos los plenos de los contratos obligatorios. Esta circunstancia y el hecho de que en los riesgos de más peligrosidad se retienen plenos más pequeños –jugando el reaseguro en función del pleno– hacen que la importancia del sistema facultativo sea superior en los riesgos peligrosos que en los normales.

Y también tiene una serie de inconvenientes que le han llevado a su abandono como instrumento principal del reaseguro moderno:

- Comerciales: su administración es complicada y produce una elevación en los gastos generales que se hace insostenible y es preciso sustituir. Además, el reasegurador paga menos comisión que en los contratos obligatorios.
- Técnicos: Lentitud, produciendo retraso en la colocación de los excedentes en los que el asegurador está falto de la cobertura de reaseguro, soportando riesgos superiores a los que admite su política de suscripción.
- Dependencia: Es necesario contar con el respaldo del reasegurador antes de emitir la póliza.

Posición intermedia

Existe una posición intermedia entre obligatorio y facultativo, se trata del llamado reaseguro facultativo, pudiendo darse dos fórmulas:

- facultativo-obligatorio: el asegurador es libre de ceder o retener el riesgo, mientras que para el reasegurador es obligatoria la aceptación de aquellos riesgos que el asegurador le quiera ceder;
- obligatorio-facultativo: situación contraria.

Atendiendo al contenido de la cesión:

Reaseguro proporcional o de riesgos

Definición y clases

El asegurador cede al reasegurador parte de todos los riesgos que asume, es decir, el reasegurador participa en una proporción determinada de antemano en los riesgos asumidos por el cedente. La forma de instrumentar este tipo de reaseguro es la de hacer partícipe al reasegurador en la cobertura de una determinada porción de la suma asegurada en seguro directo, de manera que la relación existente entre la parte de suma asegurada de cuya cobertura responde el reasegurador ante el cedente y el total de la suma asegurada en la póliza de seguro directo será la que se utilice para la determinación de las primas que debe percibir el reasegurador y para fijar el importe de su participación en los siniestros. Es decir, una vez establecida la parte de la suma asegurada que se cede, la prima del reaseguro será proporcional a la relación que existe entre la suma cedida y la suma asegurada.

Esta cesión se puede materializar en las siguientes clases de tratados:

- Cuota-parte: Se instrumenta con un tratado en que se estipula una proporción de cesión que es igual para todos los riesgos recogidos en el contrato, es decir, se cede obligatoriamente un coeficiente o parte alícuota de cada riesgo aceptado por el asegurador directo (cedente). La cedente puede seguir cediendo a otros reaseguradores otras proporciones del riesgo, si bien se estipula obligatoriamente que la cedente retenga por su cuenta una cantidad o coeficiente determinado y mínimo en cada riesgo. Con esta modalidad, se reducen uniformemente todos los riesgos que asume la cedente. Este tratado se emplea cuando la cedente no tiene mucha experiencia en el ramo o cuando quiere reasegurar sumas pequeñas. Este tratado es altamente ventajoso para el reasegurador, porque:
    - le involucra en todos los riesgos, con lo que se beneficia de la selección practicada por la cedente y evita, así, los perjuicios de la antiselección;
    - hace mucho mayor la masa reasegurada, de la que no se excluyen los riesgos pequeños;
    - no se produce el fenómeno clásico del reaseguro de exceso de riesgos de que la siniestralidad de los reaseguradores sea superior a la del seguro directo.
- Excedente: Es la modalidad de reaseguro más generalizada, en la que el asegurador fija unos plenos de retención y cede al reasegurador el exceso de los capitales asegurados que los superen. La participación del reasegurador por encima del pleno de retención tiene un límite en forma de un múltiplo de dicho pleno (por ejemplo, 5 o 10 veces ese pleno). El pleno de retención y el límite máximo de participación del reasegurador definen lo que se llama capacidad del contrato. La cláusula operativa más frecuente es del tipo “El reasegurado se compromete a ceder, y el reasegurado a aceptar, todos los

riesgos que excedan del pleno del reasegurado con un límite máximo de 10 plenos". Este tratado es muy ventajoso para la cedente, porque pueden seleccionar sus retenciones y conservar el mayor volumen posible de rpima sin que peligre su estabilidad. También se evita el inconveniente del cuota-parte, que obliga a ceder lo que se podría haber conservado tranquilamente, perdiendo la consiguiente prima. Además, es el tratado que más iguala las retenciones. Para el reasegurador no resulta tan beneficioso, pero para ser competitivo lo tiene que ofrecer. Existen dos variedades de tratados de excedente:

  - Primer excedente: la cobertura del reasegurador empieza cuando el riesgo excede del pleno del asegurador directo;
  - Segundo o ulterior excedente: el reasegurador entra en acción cuando se ha agotado la capacidad del tratado de primer excedente.

- Mixto cuota-parte y excedente: Se establece un reaseguro cuota-parte sobre el pleno de retención del excedente; se emplea en aquellos contratos en que el pleno de retención sigue siendo demasiado elevado para la capacidad financiera de la cedente.

Ecuaciones de equilibrio del cuota-parte

Se define una cuota de propia retención K (K<1) y una cuota de cesión 1-K. Así, ante un siniestro de coste X, tendremos que KX lo asume la cedente y (1-K)X lo asume la reaseguradora.

Definamos ξ="coste del siniestro", con función de distribución V(X)=p($\xi \leq$X), y que se puede descomponer en:

$\xi = \xi_0 + \xi_r$, siendo ξ_0 el coste retenido y ξ_r el coste cedido. Así:

$$\xi = K\xi \ + \xi_r$$

$$\xi_r = (1-K)\xi = \xi - \xi_0$$

Por otro lado:

$$\xi_0 \sim V_0(X) = p(\xi_0 \leq X) = p(K\xi \leq X) = p\left(\xi \leq \frac{X}{K}\right) = V\left(\frac{X}{K}\right)$$

Y del mismo modo:

$$\xi_r \sim V_r(X) = p(\xi_r \leq X) = p[(1-K)\xi \leq X] = p\left(\xi \leq \frac{X}{1-K}\right) = V\left(\frac{X}{1-K}\right)$$

Definamos ahora P = prima total, calculada como el producto entre el número medio de siniestros en el período, N, y el coste medio por siniestro, que notaremos C_1, y que se define como:

$$C_1 = \int_0^\infty xV(X)dx$$

Así: $P = NC_1 = N\int_0^\infty xV(X)dx$

Supongamos ahora que N, el número medio de siniestros, es igual a t (N=t). Entonces:

$$P = tC_1 = t\int_0^{\infty} xV(X)dx$$

La prima retenida:

$$P^0 = t{C_1}^0 = t\int_0^{\infty} xV_0(X)dx = KP$$

La prima cedida:

$$P^r = t{C_1}^r = t\int_0^{\infty} xV_r(X)dx = (1-K)P$$

De modo que $P = P^0 + P^r$.

Ecuaciones de equilibrio del reaseguro de excedente

Llamaremos M al pleno de retención, y S_i a la suma asegurada para la póliza i.

Así, si la suma asegurada es menor igual al pleno, no entrará en acción el reasegurador, de modo que K_r=1. Por el contrario, si la suma asegurada supera el pleno, entonces entra el reaseguro, con $K_i = \frac{M}{S_i}$

Definimos ahora la función de distribución del coste de siniestro condicionada a que la suma asegurada sea igual a S:

$$V(X/S) = p(\xi_s \leq X)$$

Siendo ξ_s="coste del siniestro en póliza de suma asegurada = S".

De esta forma:

$$\xi_s = {\xi_s}^0 + {\xi_s}^r \quad \begin{cases} {\xi_s}^0 = \frac{M}{S}\xi_s \\ {\xi_s}^r = \frac{S-M}{S}\xi_s \end{cases}$$

La distribución del coste retenido:

$$V_0(X/S) = p\left({\xi_s}^0 \leq X\right) = p\left(\frac{M}{S}\xi_s \leq X\right) = p\left(\xi_s \leq \frac{S}{M}X\right) = V\left(\frac{S}{M}X/S\right)$$

Y como S puede ser mayor o menor que M:

$$V_0(X/S) = \begin{cases} V(X/S) \; si \; S \leq M \\ V\left(\frac{S}{M}X/S\right) \; si \; S > M \end{cases}$$

La distribución del coste cedido:

$$V_{\mathrm{r}}(X/S) = p({\xi_s}^{\mathrm{r}} \leq X) = p\left(\frac{S-M}{S}\xi_s \leq X\right) = p\left(\xi_s \leq \frac{S}{S-M}X\right) = V\left(\frac{S}{S-M}X/S\right)$$

Y considerando los posibles valores de S:

$$V_r(X/S) = \begin{cases} 1 \; si \; S \leq M \\ V\left(\dfrac{S}{S-M} X/S\right) \; si \; S > M \end{cases}$$

Aplicando el teorema de probabilidad total:

$$V_0(X) = \int_0^\infty q(S) V_0(X/S) ds = \int_0^M q(S) V(X/S) ds + \int_M^\infty q(S) V\left(\frac{S}{M} X/S\right) ds$$

$$V_r(X) = \int_0^\infty q(S) V_r(X/S) ds = \int_0^M q(S) ds + \int_M^\infty q(S) V\left(\frac{S}{S-M} X/S\right) ds$$

Siendo q(S) la probabilidad de que la suma asegurada sea S.

La prima es similar a la del cuota-parte, solo que ahora la cuota es variable:

$$P_i^0 = K_i P_i$$

$$P_i^r = (1 - K_i) P_i$$

Siendo P_i la prima del riesgo i.

Reaseguro no proporcional o de siniestros

El reasegurador solo interviene cuando la siniestralidad ha superado los límites previstos en el contrato. Se distinguen diversas modalidades:

- XL: exceso de siniestros o excess of loss, que compensa pérdidas derivadas de un solo suceso o evento. Se tiene:
  - XL por riesgo, en que la prioridad se establece en función de los siniestros que pueden afectar a una sola póliza.
  - XL por siniestro, cuando se pretende cubrir un cúmulo.
  - XL catastrófico, que protege contra los resultados de una catástrofe que altere fundamentalmente todas las previsiones estadísticas de los aseguradores, pudiendo llevar a su insolvencia.
- Stop loss o exceso de siniestralidad: se cubre el exceso de la siniestralidad global de la cartera reasegurada sobre la cifra o coeficiente que se estipule. Cuando la cifra de siniestros pagados de una cartera llega al límite establecido, la cedente deja de pagarlos y entra en acción el reasegurador.

Ecuaciones de equilibrio del XL

Llamaremos X a la cuantía del siniestro, de modo que si X≤M no habrá reaseguro, y sí lo habrá si X>M (en cuyo caso se cede X-M).

La distribución del coste retenido:

$$dV_0(X) = \begin{cases} dV(X) \; si \; X \leq M \\ \displaystyle\int_M^\infty x dV(X) \; si \; X > M \end{cases}$$

La prima retenida:

$$P^0 = t\int_0^{\infty} dV_0(X) = t\left[\int_0^{M} xdV(X) + M\int_M^{\infty} dV(X)\right]$$

La prima cedida:

$$P^r = t\left[\int_M^{\infty} xdV(X) - M\int_M^{\infty} dV(X)\right] = t\int_M^{\infty} (X-M)dV(X)$$

Siendo la prima total:

$$P = t\int_0^{\infty} dV(X)$$

Ecuaciones de equilibrio del Stop-loss

Este reaseguro afecta a la distribución del coste total F(x,t) asociado al intervalo (0,t).

Para la cedente:

$$F_0(x,t) = \begin{cases} F(x,t) \quad si\ X \leq M \\ \int_M^{\infty} dF(x,t) = 1 - F(M,t)\ si\ X = M \end{cases}$$

Siendo M el pleno de retención de la cedente, en % sobre las primas.

Para el reasegurador:

$$F_r(x,t) = \begin{cases} F(M,t) \quad si\ X = M \\ F(X-M,t) \quad si\ X > M \end{cases}$$

La prima retenida:

$$P_0 = \int_0^{M} xdF(x,t) + M\int_M^{\infty} dF(x,t)$$

La prima cedida:

$$P_r = \int_M^{\infty} (x-M)dF(x,t)$$

Atendiendo al origen del negocio

- Reaseguro cedido, si procede de aceptaciones de seguro directo.
- Reaseguro retrocedido: si procede de aceptaciones de reaseguro. La retrocesión es el reaseguro cedido por un reasegurador a otra entidad aseguradora o reaseguradora para liberar una parte de los riesgos por él asumidos, equilibrando así sus resultados y homogeneizando sus responsabilidades. Es un reaseguro para el reaseguro, y se da cuando un reasegurador sobrepasa la retención que desea mantener por cuenta propia. En la retrocesión se produce una dispersión de riesgo a través del reaseguro y de sus retrocesionarios. El retrocesionario es el reasegurador que reasegura el riesgo

que le cede el reasegurador (retrocedente). También se puede entender la retrocesión como un servicio que presta el reasegurador a la cedente, buscando retrocesionarios entre los que distribuir los riesgos asegurados por la cedente.

Otras formas de reaseguro

- Pools: Consorcios reaseguradores que buscan ampliar la capacidad.
- Nuevas modalidades que surgen por la inflación, como ECOMOR (excedentes del coste medio relativo) o EPNOC (excess premium related claims).

3. Reaseguro financiero

Nace en Estados Unidos a finales de los años 70, al descubrir que, con la ayuda del reaseguro, las compañías de seguros podían optimizar el uso del capital. El reaseguro financiero surge como consecuencia de la necesidad de buscar nuevos métodos de financiación, debido a la falta de capacidad de las compañías.

Se puede definir como una forma de reaseguro en la que el riesgo transferido por la compañía cedente al reasegurador incluye tanto el riesgo de suscripción como el riesgo financiero y cuya principal misión es proteger los estados financieros de una compañía ofreciendo al mismo tiempo una serie de garantías complementarias.

Este reaseguro es una forma de financiar el pago de una pérdida que ya ha ocurrido o de pérdidas que muy probablemente irán a ocurrir en algún momento futuro. La principal diferencia es que el reaseguro financiero da mayor peso a los aspectos financieros de la operación y en menor cuantía a la transferencia del riesgo de suscripción.

En el reaseguro tradicional la meta principal de la operación es la de transferir el riesgo de suscripción al reasegurador, es decir, el riesgo de ocurrencia de un evento amparado por las pólizas del asegurador.

En el otro extremo están las operaciones puramente financieras, es decir, aquellas en las que no hay transferencia de riesgo al reasegurador. La operación tiene como única meta lograr resultados financie- ros predeterminados. Este tipo de operaciones fue muy frecuente durante los primeros años del reaseguro financiero.

En medio de ambos extremos se encuentran todas las operaciones de reaseguro que combinan la transferencia de riesgo de suscripción con los aspectos financieros. La diferenciación entre el reaseguro tradicional y el reaseguro financiero en esta zona intermedia no es fácil.

Las características básicas de este tipo de reaseguro son:

- Limitada transferencia del riesgo de suscripción;

- Siniestros financiados en el tiempo y dentro de cada contrato individual, no de modo anual a través de una cartera de riesgos;
- La cobertura tiene un límite agregado total;
- El contrato tiene una duración de varios años; y
- El rendimiento de la inversión de primas y reservas es fundamental.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 45. El reaseguro II: Método obligatorio: ventajas, clases de tratados y su funcionamiento. Determinación del precio en los reaseguros de riesgo. Reaseguro de siniestros. Reaseguro excess-loss: concepto, ventajas e inconvenientes y clases. Cálculo de la prima y cláusula de estabilización. El stop loss cover: características generales. Nuevas modalidades de reaseguro.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Concepto

El reaseguro es la operación por la que un asegurador distribuye los riesgos, cediéndoles total o parcialmente a otro u otros aseguradores, con el objeto de reducir el volumen de las pérdidas que pueda producir cada contrato, lo que permite la aceptación de riesgos muy superiores a los que la capacidad de su empresa puede soportar.

El asegurador que acude a otro para cederle parte de sus riesgos recibe la denominación de cedente o reasegurado; mientras que el que asume la cobertura de la parte del riesgo cedido se llama aceptante o reasegurador. Es decir, el reaseguro supone la previa existencia de un contrato de seguro suscrito entre un tomador y un asegurador. A la operación documentada mediante este contrato se la denomina operación de seguro directo.

Clasificación del reaseguro

El reaseguro puede clasificarse desde distintos puntos de vista.

Atendiendo a las limitaciones impuestas a la autonomía de la libertad de las partes

Reaseguro obligatorio

Es aquél que se instrumenta por medio de un contrato por el que ambas partes, cedente y reasegurador, se obligan a ceder y aceptar, respectivamente, todos los riesgos previamente definidos en el contrato, en las condiciones estipuladas. El contrato por el que se articula la relación contractual obligatoria entre las partes recibe la denominación de tratado de reaseguro, que puede definirse como el contrato preliminar efectuado por una compañía de seguros y otra de reaseguros, dos compañías de seguro directo o dos compañías de reaseguro, por el que se le crea a la entidad aseguradora la obligación de ceder sus riesgos y a la reaseguradora, la de aceptarlos en determinadas condiciones que se estipulan en el tratado. Decimos que es un contrato preliminar porque es la promesa de contratos futuros efectivos, regulando las condiciones en que estos deben celebrarse. Por lo tanto, el tratado es fuente de dos figuras jurídicas diferentes: por una parte, de la obligación de ceder y aceptar, y por otra, de un ordenamiento jurídico que ha de regular los contratos futuros nacidos de la efectividad de las obligaciones a que se ha hecho referencia.

Este tipo de reaseguro supone un medio de defensa frente a la antiselección, siendo sus ventajas principales:

- Obligatoriedad de reasegurar todos los contratos directos que participen de las circunstancias objetivas señaladas en el tratado (cuota-parte o excedente).
- Retención obligatoria por el asegurador directo de una parte del contrato, con lo que conserva así un interés en el mismo paralelo al del reasegurador.

- Participación del reasegurador en todos los contratos directos, en los tratados de cuota-parte.
- Fijación, en los contratos de excedente, de la cantidad reasegurada en proporción a la retención del asegurador, que en caso de reducir mucho su pleno por estimar el riesgo peligroso, encontraría insuficiente el reaseguro obligatorio y necesitaría acudir al reaseguro facultativo, donde quizá no encontrase cobertura.
- Fijación de una comisión sobre los beneficios del contrato.

Reaseguro facultativo

Cada cesión cada cesión es objeto de un acuerdo específico, que sirve de base al contrato celebrado entre asegurador y reasegurador. Se utiliza para aquellos riesgos que, por sus características, requieren de un estudio particularizado para poder decidir sobre su aceptación por parte del reasegurador o, sobre la porción que conviene reasegurar, por parte del cedente. Es muy típico aplicarlo para pólizas cuya suma asegurada es especialmente elevada o en aquellas en que el riesgo cubierto es particularmente peligroso.

Lo más habitual es que la operación facultativa se instrumentalice a través de las dos formas básicas:

- Proporcional: el reasegurador asume una participación en todos los siniestros registrados, a cambio de un % equivalente de las primas de seguro. La práctica es que la prima sea la prima de seguro menos la comisión de reaseguro, si bien en teoría debería ser la prima pura de riesgo (pero no se hace así porque los recargos de la aseguradora son distintos para cada caso y se complicaría el cálculo y se tardaría aún más en pactar la cesión).
- No proporcional: el reaseguro solo soporta la participación asumida en aquellos siniestros superiores a la retención del cedente. Esta modalidad es más barata para el asegurador.

Posición intermedia

Existe una posición intermedia entre obligatorio y facultativo, se trata del llamado reaseguro facultativo, pudiendo darse dos fórmulas:

- facultativo-obligatorio: el asegurador es libre de ceder o retener el riesgo, mientras que para el reasegurador es obligatoria la aceptación de aquellos riesgos que el asegurador le quiera ceder;
- obligatorio-facultativo: situación contraria.

Atendiendo al contenido de la cesión:

Reaseguro proporcional o de riesgos

Definición y clases

El asegurador cede al reasegurador parte de todos los riesgos que asume, es decir, el reasegurador participa en una proporción determinada de antemano en los riesgos asumidos por el cedente. La forma de instrumentar este tipo de reaseguro es la de hacer partícipe al reasegurador en la cobertura de una determinada porción de la suma asegurada en seguro directo, de manera que la relación existente entre la parte de suma asegurada de cuya cobertura responde el reasegurador ante el cedente y el total de la suma asegurada en la póliza de seguro directo será la que se utilice para la determinación de las primas que debe percibir el reasegurador y para fijar el importe de su participación en los siniestros. Es decir, una vez establecida la parte de la suma asegurada que se cede, la prima del reaseguro será proporcional a la relación que existe entre la suma cedida y la suma asegurada.

Esta cesión puede ser:

- Cuota-parte: Se instrumenta con un tratado en que se estipula una proporción de cesión que es igual para todos los riesgos recogidos en el contrato.
- Excedente: El asegurador fija unos plenos de retención y cede al reasegurador el exceso de los capitales asegurados que los superen. La participación del reasegurador por encima del pleno de retención tiene un límite en forma de un múltiplo de dicho pleno. El pleno de retención y el límite máximo de participación del reasegurador definen lo que se llama capacidad del contrato.
- Mixto cuota-parte y excedente: Se establece un reaseguro cuota-parte sobre el pleno de retención del excedente; se emplea en aquellos contratos en que el pleno de retención sigue siendo demasiado elevado para la capacidad financiera de la cedente.

Determinación del precio en los seguros de riesgo

En los reaseguros proporcionales, la prima se calcula como una parte de la prima del seguro directo, en función de la proporción que existe entre la porción de riesgo cedida al reaseguro y el importe total de la suma asegurada en la póliza del seguro directo. La única dificultad se encuentra en que, en el reaseguro de excedente, será preciso efectuar el cálculo póliza a póliza, en función de la parte de riesgo que se ceda, por la aplicación a cada uno de ellos del pleno de retención establecido en el contrato.

Reaseguro no proporcional o de siniestros

El reaseguro no proporcional o de siniestros es aquel en que el reasegurador se obliga a participar en los siniestros que ocurran a cargo de la cedente, cuando aquellos superen una determinada cantidad previamente estipulada, a cambio de una prima que no guarda relación alguna con la del seguro directo, sino que, de modo análogo a lo que sucede con esta, se calcula en función de la siniestralidad que ha de soportar el reasegurador. Por eso este reaseguro recibe la denominación de no proporcional, ya que la indemnización a cargo del reasegurador se determina de acuerdo con la cuantía del siniestro, por diferencia entre la cifra que, en todo caso, va a quedar a cargo del asegurador directo (la prioridad) y el importe total del siniestro.

Así, en este reaseguro se fija en el contrato una cifra de retención (prioridad o deducible) que indica cuál es la cifra máxima que va a ir a cargo de la cedente, en caso de siniestro, con independencia de cuál sea la suma asegurada. Por eso esta modalidad se llama también reaseguro de siniestros: a diferencia del proporcional o de riesgos, la participación del reasegurador no es función del riesgo cubierto por la póliza, cuya cuantía viene dada por la suma asegurada, sino del importe del siniestro. De ahí que, en este tipo de reaseguro, más que de participación del reasegurador en los siniestros inicialmente a cargo del cedente, resulte apropiado hablar de compensación del importe de tales siniestros.

Las modalidades básicas de este tipo de reaseguro son las siguientes: el reaseguro de excess- los y el de stop-loss cover.

Reaseguro de Excess-Loss (XL)

El sistema de cobertura se fija en el exceso de las pérdidas superiores a determinada cantidad e inferiores a otra, originadas en una o varias pólizas, pero a consecuencia de un solo evento.

Las modalidades que podemos observar son:

- XL por riesgo (o exceso de pérdidas en siniestros individuales), en que la prioridad se establece en función de los siniestros que pueden afectar a una sola póliza (siniestros de carácter ordinario, pero de elevada cuantía) Es la modalidad más frecuente dentro de los XL.
- XL por siniestro o de cúmulos, cuando se pretende cubrir un cúmulo, un solo siniestro que afecte a una serie de pólizas aseguradas en la misma entidad y que aparentemente constituyen riesgos diferentes. Se suele contratar como complemento a los reaseguros de riesgos.
- XL catastrófico, que protege contra los resultados de una catástrofe que altere fundamentalmente todas las previsiones estadísticas de los aseguradores, pudiendo llevar a su insolvencia.

Las ventajas del XL son:

- Simplificación administrativa (se hace una única cuenta anual);
- El coste del reaseguro puede ser un coste fijo presupuestado de antemano;
- Se incrementan las primas retenidas.

Inconvenientes:

- Normalmente no existe participación en las utilidades: el reasegurador no deposita reserva técnica, por lo que la cedente deberá financiarlas por cuenta propia;
- Una posible fluctuación negativa de la siniestralidad habría de ser asumida totalmente por la compañía cedente si los siniestros no superan la prioridad establecida.

Stop los cover

El reaseguro Stop loss o de exceso de siniestralidad cubre el exceso de la siniestralidad global de la cartera reasegurada sobre la cifra o coeficiente que se estipule. Cuando la cifra de siniestros pagados de una cartera llega al límite establecido, la cedente deja de pagarlos y entra en acción el reasegurador. De ahí nace su nombre, ya que, cuando la cifra de siniestros pagados en una cartera llega al límite establecido, el reasegurado cesa» de pagarlos por su cuenta y le corresponde hacerlo al reasegurador.

La cifra de retención de la compañía puede establecerse de dos maneras distintas: de un modo absoluto, determinando la cantidad sobre la cual comenzará la contribución del reasegurador, y de un modo relativo, estableciendo un coeficiente del volumen de primas de la cartera, por el que se determinará el comienzo de esa contribución. El primer sistema es imperfecto, pues si existe una variación en el volumen calculado de primas, el reaseguro puede no cumplir adecuadamente su función de proteger al reasegurado contra las desviaciones estadísticas.

En este reaseguro también se establece un límite máximo del mismo modo (cifra o coeficiente). Pasado este límite, la responsabilidad por los daños vuelve al reasegurado, que en su caso puede contratar un nuevo reaseguro de segundo excedente de siniestralidad. En los contratos de esta clase el reasegurador obliga a que el reasegurado soporte por su propia cuenta una parte alícuota de todo siniestro por aquel compensable. Así, la fórmula corriente de cobertura suele ser: “El reasegurador pagará un 90% de los daños que excedan del 75% de la siniestralidad anual, hasta el límite del 150%”. Esto es necesario para evitar que el reasegurado, una vez pagados los siniestros de su retención, descuide su atención de los que ha de pagar el reasegurador y los liquide con excesiva generosidad, lo que produciría una antiselección. En las modalidades de excess-loss también suele establecerse esta cláusula, pero en esta modalidad nunca deja de estipularse.

2. Cálculo de la prima y cláusula de estabilización

Primas base, constituyentes o GNPI

La prima de reaseguro es el precio que el asegurador paga al reasegurador por la cobertura que este le otorga. Se calcula como un porcentaje sobre las primas suscritas, teniendo en cuenta que el reasegurador no participa en los siniestros inferiores a la prioridad pactada, que generalmente constituyen la inmensa mayoría de los pagados por el asegurador.

Las primas base de cálculo se denominan primas constituyentes, primas base o, en terminología inglesa, *gross net premium income*, y constituyen el total de primas suscritas durante el periodo de cobertura que es objeto de la protección.

La tasa de prima

El porcentaje que se aplica sobre las primas base para hallar el precio de la cobertura es la tasa de prima. Está compuesta por:

- La prima de riesgo, que normalmente se obtiene a partir del burning cost de la cartera que se pretende cotizar.
- La prima de fluctuación o recargo de seguridad.
- El recargo para gastos de administración y beneficios del reasegurador.
- La prima de reaseguro puede ser un porcentaje fijo (tasa fija), que se aplica generalmente en los tramos de catástrofe. Cuando se trata de coberturas operativas, que es previsible que sean fácilmente afectadas por siniestros, es más habitual utilizar tasas variables, que fluctúan en función de la siniestralidad entre un máximo y un mínimo.

Regularización

Tanto al finalizar el primer año de vigencia del contrato como en los años sucesivos, hasta que se liquiden definitivamente todos los siniestros que afectan al mismo, ha de realizarse una regularización anual de prima que se hará de acuerdo con las condiciones económicas pactadas, aplicando la tasa resultante para la siniestralidad conocida a 31 de diciembre de cada año. Por siniestralidad se entiende el cociente de dividir los siniestros a cargo del contrato (pagados más reservados) entre las primas base.

3. Nuevas modalidades de reaseguro

En lo referente a nuevas alternativas en la transferencia de riesgos catastróficos a través de los mercados financieros, cabe señalar que las devastadoras catástrofes naturales producidas en los últimos años han afectado enormemente a la industria del seguro y ha surgido un interrogante sobre su asegurabilidad.

Actualmente existen dos métodos fundamentales como mecanismos alternativos de transferencia de riesgos catastróficos hacia los mercados financieros:

- De una parte, la creación de productos derivados del reaseguro, con el lanzamiento de futuros y opciones sobre mercados especialmente organizados.
- De otra parte, la colocación de riesgos en los inversores privados por la vía del modelo de titulación directa.

Junto a estas alternativas de transferencia de riesgos, varios bancos de inversión están desarrollando, en colaboración con compañías de seguros, modelos para la titulización de riesgos catastróficos con el fin de colocarlos directamente entre los inversores en forma de títulos-valores

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 46. Valoración de provisiones técnicas. SCR y mínimo obligatorio. Metodología de estimación de las provisiones: Link ratio, Grossing up, Chain Ladder. Otros métodos.

Edición Julio 2025

1. Introducción

El artículo 29 del Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (en adelante, ROSSP), establece que “las provisiones técnicas deberán reflejar en el balance de las entidades aseguradoras el importe de las obligaciones asumidas que se derivan de los contratos de seguros y reaseguros”.

Así, las provisiones técnicas forman parte del pasivo de las entidades aseguradoras, cobrando especial importancia en el caso de las compañías que operan en seguros de vida, puesto que:

- las provisiones suponen uno de los mayores componentes de su pasivo; y
- en base a la provisión matemática (o reserva matemática) se regulan algunos de los derechos de los asegurados, como los valores garantizados.

Las provisiones técnicas y su cálculo siempre han sido objeto de profundo análisis por parte de supervisores, auditores y compañías, puesto que de ellas depende, en gran parte, la capacidad de una compañía de seguros para hacer frente a las obligaciones derivadas de su actividad habitual. Así, su valoración no deja de someterse a sucesivos cambios que, bajo criterios tanto contables (por ejemplo, con las sucesivas modificaciones del artículo 33 de ROSSP en que se regulan los tipos con los que descontar las provisiones matemáticas) como prudenciales (con Solvencia II), pretenden optimizar su cálculo y minimizar los posibles descubiertos en las aseguradoras que puedan desproteger al asegurado.

En este contexto, tratando de relacionar el Capital de Solvencia Obligatorio (SCR por sus siglas en inglés) con la valoración de provisiones técnicas, cabe hablar sobre la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II) (en adelante, la Directiva, Solvencia II, o Solvencia) y sobre el Reglamento Delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa esta Directiva (en adelante, el Reglamento o el Reglamento Delegado).[1]

Es en este conjunto normativo donde se desarrolla el concepto de SCR y donde se expone cómo se deben calcular las provisiones técnicas bajo Solvencia II. A modo introductorio,

[1] Desde 2020, la normativa de Solvencia se encuentra bajo Revisión por EIOPA. En diciembre de 2020 EIOPA emite opinión sobre la propuesta de Reforma de la Directiva. Tras la aprobación del texto en inglés en abril de 2024, y su publicación y entrada en vigor en diciembre del mismo año, se espera su trasposición a normativa española en 2026, con su consiguiente entrada en vigor. Las modificaciones se centran en el refuerzo del principio de proporcionalidad, la supervisión macroprudencial y los puntos de mejora identificados por EIOPA. Ejemplos: modificación de la tasa de coste de capital a emplear en el margen de riesgo, introducción de una nueva categoría para Empresas Pequeñas y No Complejas(EPNC).

cabe mencionar que ambas cuantías (el SCR y las provisiones técnicas) encuentran su relación en:

- el cálculo del SCR, que incluye las provisiones técnicas;
- el cálculo de las provisiones técnicas, que incluye el SCR en su margen de riesgo; y
- la ratio de Solvencia, que pone en relación los fondos propios admisibles (afectados directamente por la valoración def las provisiones técnicas) con el SCR.

2. SCR y MCR

Fruto de la transposición de la Directiva de Solvencia II, el SCR está regulado la Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras (LOSSEAR), y por el Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras (RDOSSEAR).

El cálculo del SCR:

- deberá tener en cuenta todos los riesgos cuantificables a los que una entidad aseguradora o reaseguradora esté expuesta;
- cubrirá las actividades existentes (dentro de los límites del contrato) y las nuevas actividades que se espere realizar en los siguientes 12 meses;
- en relación con las actividades existentes, deberá cubrir exclusivamente las pérdidas inesperadas (ya que las provisiones técnicas son las destinadas a la cobertura de las pérdidas esperadas).

El SCR será igual al valor en riesgo de los fondos propios básicos de una entidad aseguradora o reaseguradora, con un nivel de confianza del 99,5 % y un horizonte temporal de 1 año.

El SCR podrá calcularse, teniendo en cuenta lo previsto en la normativa de la Unión Europea de directa aplicación, de acuerdo con los métodos siguientes:

- fórmula estándar, aplicando en dicha fórmula los parámetros que se determinen con carácter general.
- fórmula estándar, aplicando en dicha fórmula los parámetros específicos de la entidad.
- fórmula estándar, pero con determinadas simplificaciones en los puntos del cálculo.
- fórmula estándar para determinados aspectos del cálculo combinada con modelos internos parciales, que cubran el cálculo en otros aspectos.
- modelos internos completos que cubran todos los aspectos relevantes y con impacto significativo en el perfil de riesgo de la entidad y, por tanto, en su SCR.

La utilización de parámetros específicos o de modelos internos requerirá aprobación administrativa previa, a solicitud de la entidad, en los términos y condiciones que se establezcan en la normativa de la Unión Europea de directa aplicación.

La Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones podrá requerir mediante resolución motivada que se efectúe el cálculo del SCR con parámetros específicos de la entidad o con modelos internos cuando el perfil de riesgo de la entidad se aparte significativamente de las hipótesis aplicadas en el cálculo de la fórmula estándar.

Bajo Fórmula Estándar el SCR se estructura como sigue:

- SCR Básico (BSCR), conformado por los siguientes módulos y submódulos de riesgo:
  - Mercado: pondrá de manifiesto el riesgo derivado del nivel o de la volatilidad de los precios de mercado de los instrumentos financieros que influyan en el valor de los activos y pasivos de la entidad. Los submódulos de riesgo son: interés, divisa, renta variable, diferencial, inmuebles, concentración;
  - Los módulos de riesgo de suscripción recogen el riesgo derivado de las obligaciones de seguro de vida, no vida y salud, atendiendo a los eventos cubiertos y a los procesos seguidos en el ejercicio de la actividad.
    - Suscripción de Vida: Los submódulos de riesgo son: mortalidad, longevidad, morbilidad, caída, gastos, revisión, catastrófico;
    - Suscripción de No Vida: Los submódulos de riesgo son: primas y reservas, caídas, catastrófico;
    - Suscripción de Salud: Los submódulos de riesgo son: salud similar a vida, no similar a vida, catastrófico.
  - Contraparte; reflejará las posibles pérdidas derivadas del incumplimiento inesperado o deterioro de la calidad crediticia de las contrapartes y los deudores de las entidades aseguradoras y reaseguradoras en los siguientes 12 meses.
- SCR por Riesgo Operacional;
- Ajustes por la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y la capacidad de absorción de pérdidas de los impuestos diferidos.

Así, el SCR = BSCR + SCR Operacional - LACTP - LACDT.

Las entidades aseguradoras y reaseguradoras deberán cubrir en todo momento el SCR con los fondos propios, básicos o complementarios, que resulten admisibles.

A pesar de la evidente relevancia del SCR, no es esta la única medida de capital obligatoria en virtud de la Directiva de Solvencia II: también ha de cubrirse el Capital Mínimo Obligatorio (MCR), que supone un nivel mínimo de seguridad por debajo del cual no deberían descender los recursos financieros de una aseguradora.

Este MCR se calcula como el máximo entre un MCR combinado y un MCR absoluto, siendo:

- El MCR absoluto, de:
  - 3,9M€ para las reaseguradoras, y 1,3M€ para las reaseguradoras cautivas;
  - 4,0M€ para aseguradoras de vida;
  - 2,7M€ para las aseguradoras de no vida, a no ser que cubran algunos de los ramos especiales (principalmente, Responsabilidad Civil en sus diversas formas y Crédito y caución), en cuyo caso asciende a 4,0M€;
  - La suma de los dos puntos anteriores cuando se trate de entidades aseguradoras que realicen simultáneamente actividades de seguro de vida y de no vida.
- MCRcomb = min(max(MCRlineal; 0,25*SCR); 0,45*SCR))

Este $MCR_{lineal} = MCR_{lineal,vida} + MCR_{lineal,no\ vida}$, donde cada MCR lineal es una combinación lineal de las provisiones técnicas (excluyendo el margen de riesgo) de cada uno de los segmentos de vida y no vida, estando los coeficientes de cada segmento especificados en la norma.

Si bien en normativa se refleja que la ratio de Solvencia mínima es del 100%, lo cierto es que, por debajo de un 120%, el supervisor puede empezar a analizar con más detalle todavía la solvencia de la entidad. Cuando el importe de los fondos propios básicos admisibles descienda por debajo del MCR, y en el supuesto de que las empresas de seguros y de reaseguros no puedan volver a nivelar el citado importe de fondos propios con el capital mínimo obligatorio en un breve plazo, debe revocarse la autorización de dichas empresas.

3. Valoración de provisiones técnicas

Importancia

Como hemos comentado anteriormente, la correcta valoración de las provisiones técnicas es de gran importancia, ya que:

- Forman una parte muy relevante en el pasivo de las entidades aseguradoras;
- suponen una cobertura de las pérdidas esperadas por la actividad habitual de la entidad aseguradora;
- en términos prudenciales, sirven de base de cálculo para el SCR;
- netean los fondos propios admisibles que se enfrentan al SCR en la ratio de Solvencia.

Las provisiones técnicas bajo Solvencia II se componen de una mejor estimación de los pasivos (BEL, por siglas en inglés) y un margen de riesgo. Las provisiones técnicas a efectos contables vienen determinadas en el ROSSP:

- Provisión de primas no consumidas, PPNC
- Provisión para riesgos en curso, PRC
- Provisión de los seguros de Vida (PPNC en riesgo + Provisión matemática, PM)
- Provisión de participación en beneficios y extornos (PB)
- Provisión de prestaciones, que se compone de:
    - Provisión para prestaciones pendientes de liquidación o pago (PPLP)
    - Provisión para gastos internos de liquidación (PGILS)
    - Provisión para siniestros acontecidos pero no declarados (IBNR)

De modo que, a grandes rasgos, podemos decir que:

- La BEL de Vida va a recoger la PPNC y la PRC de los seguros de Vida, así como la provisión matemática, esta vez calculadas bajo criterios de Solvencia. En la práctica, se estiman los flujos mediante hipótesis realistas (normalmente, basadas en la experiencia anterior de la cartera) y se descuentan a la curva de tipos correspondiente (la curva RFR de EIOPA, con o sin volatilidad, ajustada, o no, por ajuste por casamiento, MA). También se va a incluir la BEL de prestaciones de los seguros de vida, normalmente de menor relevancia en este ramo, y aproximada a través de la reserva contable a tal efecto. Importancia de límites del contrato.
- La BEL de No Vida va a incluir:
    - BEL de primas, que recoge la posible pérdida derivada de las primas que aún no se han devengado. Existe en las directrices una aproximación propuesta para este cálculo, consistente en aplicar ratios de siniestralidad realistas de acuerdo con la cartera en cuestión a la PPNC contable, así como unos gastos de adquisición para cuando se hayan adquirido dichas primas.
    - BEL de prestaciones, normalmente calculada como un todo (incluyendo IBNR) a partir de los triángulos de pagos, reservas, incurrido y/o número de siniestros, con alguna de las metodologías que vamos a detallar a continuación, y recargada en un porcentaje para incluir el efecto de los gastos internos de liquidación de siniestros y así constituir una PGILS bajo Solvencia II.
    - Habitualmente, se aplica el patrón de desarrollo obtenido del desarrollo de los triángulos tanto a la BEL de siniestros como a la de primas, para poder aplicar la curva de descuento de referencia y obtener un valor descontado de BEL.

En cuanto al Margen de Riesgo, también ha de calcularse por separado para Vida y para No Vida, consistiendo su cálculo en el descuento a una tasa fija de coste de capital de los SCR nocionales proyectados a futuro. Estos SCR nocionales no coinciden exactamente con los SCR del período de valoración puesto que no incluye algunos riesgos de mercado. Existen diversas aproximaciones propuestas en las Directrices de EIOPA que facilitan el cálculo cuando una proyección realista de los SCR no resulta viable.

Métodos deterministas

A continuación vamos a hablar de los métodos tradicionales para el cálculo de las provisiones técnicas para siniestros pendientes. Todos ellos se caracterizan por ser sistemas en los que:

- no se realizan hipótesis sobre la naturaleza estadística de la distribución subyacente
- solo se pretende obtener el valor previsible que deberían tener las reservas, siempre en función solamente de los datos pasados de liquidación de siniestros.

Dentro de los deterministas, nos vamos a centrar en los métodos globales (en contraposición a los métodos caso a caso, en que se hace una valoración siniestro a siniestro), que se caracterizan por:

- emplear algoritmos para eliminar la influencia aleatoria en los datos;
- basarse en una presentación triangular de los datos, es decir, en triángulos de siniestros, donde las filas se referirán al período de ocurrencia, suscripción o declaración del siniestro, y las columnas al período del pago o desarrollo;
- aplicarse sobre diversas magnitudes: pagos, reservas PPLP, coste incurrido, número de siniestros;
- recoger bien incrementos anuales, bien cifras acumuladas;
- tener en cuenta factores exógenos influyentes como puede ser la inflación en el coste siniestral.

Cabe definir el concepto de coste último, al que vamos a hacer referencia a lo largo de la exposición. Nos referimos por coste último al coste total de un siniestro, que siendo estimado se formará por los pagos acumulados hasta la fecha de estimación más la reserva estimada a la misma fecha. Si hablamos del total de la cartera / ramo / línea de negocio, cuando hablemos de coste último nos referiremos al total de siniestros esperado perteneciente a esos años de ocurrencia / suscripción / declaración, incluyendo la previsión de coste de los siniestros ocurridos pero no declarados aún (IBNR).

Por simplificar la explicación, nos vamos a centrar en los triángulos que se estructuran en función del año de ocurrencia y que se desarrollan también en períodos anuales.

Link ratio

Este método se basa en las tasas de variación de la siniestralidad acumulada en un año de ocurrencia entre un año de desarrollo y el siguiente. Una vez calculadas estas tasas (link ratios), vamos a ir multiplicando estas ratios para ir obteniendo una tasa acumulada año de desarrollo a año de desarrollo para cada año de ocurrencia. Así, obtendremos una tasa de desarrollo a aplicar a cada uno de los años de ocurrencia en función del año de desarrollo en que se encuentren, obteniendo así el coste último para cada año de ocurrencia.

Existen varias formas de aplicar esta metodología, entre las que podemos destacar:

- una estimación pesimista, en que seleccionemos el peor resultado para cada columna y, por tanto, la mayor proyección de coste último posible;
- una media simple de link ratios;
- una media ponderada de link ratios, dando distintos pesos a las distintas ratios calculadas.

Chain Ladder

El método de Chain Ladder trata de estimar la proporción de cambio de un año a otro. Es, precisamente, una media ponderada de Link ratios, donde cada valor se pondera con la siniestralidad que le precede.

Las hipótesis en que se basa este método son:

- Proporcionalidad entre las diagonales;
- Independencia entre años de ocurrencia;
- La varianza de los factores de desarrollo es constante.

Grossing up

Este método consiste en calcular el porcentaje de total de siniestros pagados en cada año de desarrollo. Vamos a necesitar partir de la estimación del coste total siniestral para el primer año de ocurrencia considerado, importe que se divide en:

- lo que ya se conoce por el transcurso del tiempo, y
- la cifra estimada del total de gasto correspondiente a los siniestros de ese año (coste último).

Así, calcularemos la proporción que representa la cantidad acumulada hasta el último año de desarrollo (información conocida) sobre el coste último estimado. Este primer año de ocurrencia se toma como referencia para calcular el cociente:

$$p_j = \frac{coste\ acumulado\ hasta\ el\ año\ de\ desarrollo\ j}{coste\ \text{último}\ estimado\ para\ ese\ año\ de\ ocurrencia}$$

Bajo esta metodología, suponemos que este porcentaje p_j se mantiene constante para los siguientes años de ocurrencia, aplicándose a cada último desarrollo real disponible el correspondiente factor p_j, obteniendo así el coste último estimado para el año de ocurrencia en cuestión.

Existen tres variantes relevantes de este método:

- incorporación de información de años previos: el factor pj no es solo en base al primer año de ocurrencia disponible en el triángulo, sino que es una media aritmética de los factores de ese año y de n años anteriores;
- estimación del peor caso posible: basándonos también en la información del primer año de ocurrencia disponible en el triángulo y en los n años anteriores, vamos a seleccionar para cada año de desarrollo el factor pj que mayor dotación de reservas implique, es decir, el menor pj de los disponibles;
- utilización de la información del resto de filas: se va encadenando el cálculo del pj de modo que para cada año de ocurrencia se emplea el pj que considere el desarrollo de los años de ocurrencia anteriores, ya sea tomando medias o tomando el peor escenario posible, por ejemplo (es decir, calculo pj para el primer año de ocurrencia y estimo el coste último del segundo año de ocurrencia. Así, ya puedo calcular los pj para el segundo año de ocurrencia y emplear la información de esos dos años para calcular el coste último del tercer año de ocurrencia, y así sucesivamente).

Otros métodos: basados en la ratio de siniestralidad

Son aquellos métodos en que interviene la ratio de siniestralidad o loss ratio (cociente siniestralidad última / prima adquirida).

Hablamos de loss ratio ingenuo cuando suponemos que la ratio de siniestralidad constante a lo largo del tiempo por lo que, conociendo el nivel de primas y dicha ratio, podemos estimar la siniestralidad última.

Otros métodos: Bornhuetter-Ferguson (BF)

En líneas generales, la siniestralidad se divide en:

- la ya aflorada, recogida en la última diagonal (en triángulos acumulativos), y
- la pendiente de aflorar, sobre la cual tenemos información previa que nos permite estimar su volumen.

Este método se puede formular como una mezcla entre un loss ratio ingenuo y de métodos elementales de proyección, como Chain Ladder, Grossing Up o Link ratio. El modo de funcionar consiste en:

1. se calcula el coste último para cada año de ocurrencia según alguno de los métodos elementales ya explicados;
2. se calcula cuánto supondría un loss ratio ingenuo sobre el nivel de primas para el año de ocurrencia en cuestión;
3. se calcula una media ponderada entre ambos valores, siendo el factor ponderante una estimación del porcentaje de desarrollo que se ha alcanzado para cada año de ocurrencia. Por ejemplo, si nos situamos en el más reciente, y nuestra experiencia nos

dice que el primer año de desarrollo únicamente se desarrollan los siniestros al 75%, este será el peso que cobre el coste último proyectado según Chain Ladder, Grossing up o link ratio , y el 25% restante lo cobrará el loss ratio ingenuo.

Métodos estocásticos

Mack

La Distribución Libre de Mack (Mack, 1993) es un modelo no paramétrico en donde no se hace ninguna suposición sobre la distribución de los pagos por siniestros, en esencia, está técnica calcula la volatilidad del estimador de las provisiones técnicas a través del error cuadrático medio de las estimaciones obtenidas con el método Chain Ladder, por tanto, puede decirse que el modelo propuesto por Mack supone una generalización estocástica del clásico Chain Ladder.

Bootstrap

La técnica Bootstrap proporciona estimaciones del error estadístico, imponiendo escasas restricciones sobre las variables aleatorias analizadas y estableciéndose como un procedimiento de carácter general, independientemente del estadístico considerado. Esta metodología permite obtener las provisiones cuando existen reservas negativas.

England y Verrall (1999) proponen un método de estimación de provisiones técnicas con Bootstrap como una forma fácil de obtener el riesgo de reserva, el cual, utiliza los factores de desarrollo del método Chain Ladder. Este modelo se basa en la utilización de la distribución Poisson con Sobredispersión para la obtención de la estimación de reservas y su varianza utilizando los residuales de Pearson remuestreados para obtener el error de predicción.

England (2002) introduce cambios sobre la propuesta de England y Verrall (1999) frente a los dos primeros momentos, introduciendo un modelo dividido en dos etapas: Bootstrapping para obtener el error de estimación y Simulación para obtener el error de proceso, lo que nos permite obtener en cada muestreo la distribución de predicción en lugar de sólo los dos primeros momentos.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 47. La protección para determinados tipos de riesgo: Enfermedad y accidentes. Estadísticas. Cálculo de las primas. Reservas.

Edición Julio 2025

1. Introducción

Existen contratos de seguro que, aunque no entran en el ramo de vida, tienen por objeto riesgos inherentes a la vida del hombre, como los seguros de enfermedad, los seguros de accidente y los seguros de invalidez.

Tales seguros se pueden contratar de modo autónomo, pero a veces se ofrecen por parte de las compañías como seguros complementarios a un seguro de vida, contra el pago de una sobreprima particular.

En muchos países, los seguros de salud son un conjunto de productos que, en caso de necesidad, cubren tanto enfermedad como accidentes en dos niveles:

- Por un lado, la pérdida de ingresos, ya sea por:
    - Incapacidad temporal (IT): Se produce mientras el trabajador recibe asistencia sanitaria y está impedido temporalmente para trabajar.
    - Incapacidad permanente: Una persona está en situación de Incapacidad Permanente cuando, después de haber estado sometido al tratamiento prescrito y de haber sido dado de alta médicamente, presenta reducciones anatómicas o funcionales graves, susceptibles de determinación objetiva y previsiblemente definitivas, que disminuyan o anulen su capacidad laboral, y que puede causar derecho a una prestación de cuantía variable según el grado de la incapacidad:
        - Incapacidad permanente parcial (IPP): Cuando las secuelas producen una disminución en el rendimiento normal para su profesión habitual.
        - Incapacidad permanente Total (IPT): Inhabilita al trabajador para la realización de todas o de las fundamentales tareas de su profesión habitual, siempre que pueda dedicarse a otra distinta.
        - Incapacidad permanente absoluta (IPA): Inhabilita por completo al trabajador para toda profesión u oficio.
        - Gran invalidez (GI): El trabajador afectado por una incapacidad permanente y que necesite la asistencia de otra persona para los actos más esenciales de la vida.
- Y, por otro, la cobertura de gastos derivados de hospitalización, de una intervención quirúrgica, de enfermería...

De este modo, los seguros de enfermedad y accidentes pertenecen al área de seguros de personas, distinguiéndose en el Título III de la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro (LCS):

- Seguros sobre la vida (sección segunda, art. 83 a 99): los beneficios dependen solo de la muerte o supervivencia. Se basan en la variable aleatoria de vida residual (hx en continuo, Kx en discreto).
- Seguros de accidentes (sección tercera, art. 100 a 104): se entiende por accidente la lesión corporal que deriva de una causa violenta súbita, externa y ajena a la intencionalidad del asegurado, que produzca invalidez temporal o permanente o muerte. Los gastos de asistencia sanitaria serán por cuenta del asegurador, siempre que se haya establecido su cobertura expresamente en la póliza y que tal asistencia se haya efectuado en las condiciones previstas en el contrato. En todo caso, estas condiciones no podrán excluir las necesarias asistencias de carácter urgente.
- Seguros de enfermedad y asistencia sanitaria (sección cuarta, art. 105 a 106): Cuando el riesgo asegurado sea la enfermedad, el asegurador podrá obligarse, dentro de los límites de la póliza, en caso de siniestro, al pago de ciertas sumas y de los gastos de asistencia médica y farmacéutica. Si el asegurador asume directamente la prestación de los servicios médicos y quirúrgicos, la realización de tales servicios se efectuará dentro de los límites y condiciones que las disposiciones reglamentarias determinan.
- Seguros de decesos y dependencia (sección quinta, art. 106 bis a 106 quáter): Por el seguro de decesos el asegurador se obliga a prestar los servicios funerarios pactados en la póliza para el caso en que se produzca el fallecimiento del asegurado, y por el seguro de dependencia el asegurador se obliga, para el caso de que se produzca la situación de dependencia, al cumplimiento de la prestación convenida con la finalidad de atende las consecuencias perjudiciales para el asegurado que se deriven de dicha situación.

2. Enfermedad

Definición

Los seguros de enfermedad y asistencia sanitaria suelen englobarse dentro de lo que conocemos como seguro de salud, que abarca diferentes modalidades de cobertura:

- Asistencia Sanitaria (la modalidad más extendida): el asegurador se compromete a proporcionar a las personas aseguradas asistencia médica, hospitalaria y quirúrgica, por medio de un cuadro concertado de facultativos que la entidad pone a su disposición. Hay tres grandes tipos de pólizas de asistencia sanitaria:
    - Individuales: En los que existe un solo asegurado.
    - Familiares: En un mismo contrato se da cobertura a los cónyuges, hijos y ascendientes que convivan con el titular del contrato.

- Colectivos. Son seguros que agrupan a varias personas sin parentesco, pero con algún vínculo común. Los más habituales son los referidos a los trabajadores de una empresa.

- Reembolso de gastos: Por medio de este seguro se garantiza el reembolso de los gastos médicos abonados previamente por el asegurado hasta un porcentaje determinado en el contrato y mediante el establecimiento de franquicias.
- Subsidios (a la que nos referimos normalmente cuando hablamos de seguros de enfermedad): Es una modalidad mediante la que el asegurador se compromete a satisfacer al asegurado las cantidades pactadas, por una sola vez o en forma de subsidio diario, en caso de incapacidad temporal u hospitalización por enfermedad o accidente. Los seguros de enfermedad, por tanto, se encuentran especialmente diseñados para proporcionar al asegurado y al resto de personas que dependen de él la protección económica necesaria para que su modo de vida no se vea afectado por una situación de este tipo, siendo esta modalidad de seguros la solución ideal para que los trabajadores autónomos y sus familias no tengan que preocuparse del tema monetario si se da el caso de que el asegurado se ve afectado por alguna dolencia o enfermedad. Un tipo de seguros que, por norma general, también contempla un capital (fijado previamente en cada póliza) como indemnización para el beneficiario en caso de invalidez física permanente del asegurado a consecuencia de una enfermedad. Las coberturas de este tipo de seguros incluyen el pago de un subsidio diario previamente establecido en la póliza durante el período en que el asegurado se encuentra incapacitado para trabajar, una indemnización diseñada para garantizar la estabilidad económica del asegurado y de las personas que de él dependen, asegurando que su nivel de vida no se vea comprometido durante el tiempo de convalecencia. Además de este subsidio diario, algunos seguros de enfermedad pueden cubrir gastos relacionados con la asistencia sanitaria y farmacéutica originados a raíz de la enfermedad. Asimismo, es común que estas pólizas contemplen el pago de un capital previamente fijado en caso de que la enfermedad provoque una invalidez física permanente.
- Seguro dental: Se cubren servicios relacionados con odontología, tanto reparadora como preventiva. Dado que la cobertura de salud que se cubre con esta modalidad es muy parcial, en las estadísticas sectoriales no se incluyen los datos de este tipo de seguros. El número de asegurados de pólizas dentales tiende a subir ya que se trata de una cobertura que está excluida de la Seguridad Social. Los seguros dentales cuentan también con la ventaja de que se trata de garantías ofertadas por entidades aseguradoras y por tanto, están bajo la protección que la normativa aseguradora ofrece a los asegurados tanto en materia de reclamaciones como de control de solvencia.

Tarificación

Caso general

En España, normalmente se emplean técnicas de no vida para la tarificación de los seguros de enfermedad, teniendo la prima la forma:

$$\pi = E(S) = E(N) * E(C)$$

Siendo:

- E(N): número esperado de siniestros
- E(C): esperanza de la cuantía, que puede sustituirse por C si se trata de un capital cierto
- E(S): la esperanza del coste siniestral o prima P.

Así, la estimación del número de siniestros se tomará considerando una variable aleatoria "Número de siniestros" discreta, que se suele modelizar bajo:

- Una Poisson, si bien esta distribución no suele pasar el test χ^2 de bondad de ajuste.
- Una Poisson ponderada por Gamma (Γ), en que la variable sigue una distribución $P(\lambda)$, con $\lambda \sim \Gamma(\alpha,\beta)$. El resultado es una binominal negativa.
- Poisson ponderada por una función gaussiana.

En cuanto a la probabilidad de que se produzca el siniestro, se estudiará en base a una variable aleatoria dicotómica que se considera distribuida según una binominal.

Por último, en relación con la cuantía de los siniestros, tendremos una variable aleatoria continua "Coste del siniestro" que puede modelizarse bajo diversas distribuciones (Gamma, Exponencial, Log-normal) o a partir de los costes medios por enfermedad.

No existe una combinación mejor que otra, cada entidad deberá elaborar distintos modelos y comprobar cuál supone un mejor ajuste de acuerdo a los datos de su propia experiencia.

Cuando se tienen suficientes variables para clasificar a los diferentes asegurados, estas variables se considerarán factores de riesgo (por ejemplo, la edad, la profesión, la residencia...), pudiéndose entonces construir modelos GLM[1] para estimar E(C) y E(N).

Tratando con subsidios diarios

Cuando tratamos con una modalidad de cobertura basada en un subsidio a abonar en función de los días de enfermedad del asegurado, debemos introducir una nueva variable aleatoria G="número de días de baja" y un subsidio diario que llamaremos "d", constante. Así, la prima:

$$\pi = E(S) = E(N) * E(C) = E(N) * E(G) * d$$

Introduciendo la consideración de la edad, distinguiremos primas para cada edad x:

[1] Modelos lineales generalizados

$$\pi_x = E(S_x)$$

Para coberturas de más de un año

$$\pi_{x:m} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_hp_x(1+i)^{-h}\pi_{x+h} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_hp_x(1+i)^{-h}E(N_{x+h})E(Y_{x+h})$$

Siendo Π_{x+h} la prima anual única para cada edad x+h.

Supongamos ahora que:

$$E(N_{x+h}) = E(N_x)t_x$$

$$E(Y_{x+h}) = E(Y_x)u_x$$

Donde t_x y u_x son factores dependientes de la edad.

Entonces:

$$\pi_{x:m} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_hp_x(1+i)^{-h}E(N_{x+h})E(Y_{x+h}) = \sum_{h=0}^{m-1} {}_hp_x(1+i)^{-h}E(N_x)t_xE(Y_x)u_x$$

Como $E(N_x)$ y $E(Y_x)$ no dependen de h:

$$\pi_{x:m} = E(N_x)E(Y_x)\sum_{h=0}^{m-1} {}_hp_x(1+i)^{-h}t_xu_x = K\sum_{h=0}^{m-1} \underbrace{{}_hp_x(1+i)^{-h}}_{\text{Renta unitaria temporal de m años para un individuo de edad x}}\underbrace{t_xu_x}_{\text{Factores edad}}$$

$$\pi_{x:m} = K\sum_{h=0}^{m-1} w_{x+h} = Kw_{x:m}$$

Donde K es la prima independiente de la edad y $w_{x:m}$ es el valor actual actuarial de una renta unitaria factorizada.

Reservas

Caso general

La temporalidad de los seguros de accidentes y enfermedades, salvo pocas excepciones, es de un año, por lo que la reserva de riesgos en curso se constituye con la parte de la prima no devengada. Sin embargo, la prima que se debe utilizar para el cálculo de la reserva debe ser la prima de tarifa menos en coste de adquisición. A diferencia de los seguros de vida, en estos planes la parte correspondiente al gasto de administración y el margen de utilidad deben reservarse junto con la prima de riesgo e irse devengando en el tiempo hasta el vencimiento de la póliza. En términos técnicos, la reserva de riesgos en curso para este tipo de planes debe calcularse como:

$$RRC_t = \frac{T - t}{T}(PT - CA)$$

Donde:

- PT: prima de tarifa cobrada
- CA: comisiones de adquisición
- T: duración del contrato
- t: tiempo transcurrido

En caso de cobertura plurianual

El cálculo de la reserva en cualquier momento t se calculará como:

$$_mV_t = \pi_{x+t:m-t} - P_{x:m}\ddot{a}_{x+t:m-t}$$

3. Accidentes

Definición

El seguro de Accidente se define en el artículo 100 de la LCS como aquel contrato por el que el asegurador se obliga a indemnizar, mediante el pago de sumas determinadas, los daños producidos por una lesión corporal que deriva de una causa violenta, súbita, externa o ajena a la intencionalidad del asegurado, que produzca invalidez temporal o permanente o muerte.

El seguro de accidentes considerado de forma independiente puede prever el pago de un capital en caso de muerte por accidente, el pago de un capital o de una renta en caso de invalidez permanente con motivo del accidente y eventualmente el pago de una renta durante la incapacidad temporal con motivo del accidente.

Pueden preverse muchas prestaciones por invalidez permanente o incapacidad temporal con interrupción o suspensión del pago de primas eventualmente. Aquí hay que tener en cuenta bases técnicas análogas al seguro de invalidez, salvo que las probabilidades de accidente son consideradas generalmente independientes de la edad.

Por lo tanto, detrás de estas coberturas conviene definir diferentes situaciones que son las que, habitualmente, provocan la cobertura de los seguros de accidentes:

Incapacidad permanente absoluta (IPA)

Esta indemnización es exigible cuando la invalidez haya sido reconocida definitivamente, después de la curación completa o de la cesación de todo tratamiento, mediante certificado médico donde se reconozca el estado físico del asegurado como médicamente definitivo. El importe de la indemnización será el que resulte de aplicar, al capital contratado, el porcentaje señalado en las tablas.

Incapacidad temporal por accidente

La entidad pagará un subsidio diario durante los días que el asegurado permanezca médicamente dado de baja por una incapacidad temporal como consecuencia directa de un accidente cubierto por la póliza.

Gastos de curación por accidente

La aseguradora abonará los gastos de asistencia médica, farmacéutica, traslado, hospitalización, tratamiento y rehabilitación que precise el asegurado a consecuencia directa de un accidente cubierto por la póliza, durante le plazo de un año a contar desde la fecha de ocurrencia de este, hasta los límites indicados en el contrato.

Incapacidad permanente absoluta por accidente

Se considera como tal, la situación física irreversible y consolidad del asegurado provocada por un accidente, la derivada de las lesiones producidas por una causa violenta, súbita externa y ajena a la intencionalidad del asegurado que resulta determinante de la incapacidad de este para el mantenimiento de cualquier relación laboral o actividad profesional.

Incapacidad permanente absoluta por accidente de circulación

Se considera como tal la situación física irreversible y consolidada del asegurado provocada por un accidente de circulación, la derivada de las lesiones producidas por una causa violenta, súbita externa y ajena a la intencionalidad del asegurado que, como la anterior, resulta determinante de la incapacidad de éste para el mantenimiento de cualquier relación laboral o actividad profesional.

Cabe destacar que, en España, las indemnizaciones para afectados por accidentes de tráfico se encuentran baremadas (en 2025 se reconoce una revalorización del 2,8% sobre los importes vigentes a diciembre de 2024), y que este baremo se emplea por las compañías como una base para indemnizar otros tipos de accidentes, no necesariamente de circulación.

Cálculo de la prima. Tarifas.

La fórmula básica que la industria del seguro ha seguido para el cálculo de la prima del seguro de accidentes se basa en los parámetros de los costes de reclamación, recargos por gastos, comisiones y factores que refleja la naturaleza y duración de los riesgos cubiertos.

Es importante destacar que, en la práctica, la estimación de estos parámetros es el resultado de un análisis actuarial exhaustivo producto de la experiencia cuantitativa y cualitativa de la compañía, regulación y aspectos técnicos implícitos.

La siguiente ecuación representa la forma general de la prima bruta del seguro de accidentes:

$$GP = \frac{(cc)(tc)(1+\lambda)}{1-(A+C+M)}$$

Siendo:

- cc: costes anuales por reclamación
- tc: factor por conversión de tiempo
- λ: margen de seguridad
- A: Gastos de administración
- C: Gastos de adquisición
- M: Margen de utilidad

Costes anuales por reclamación (cc)

La estimación de los costes derivados de las reclamaciones se realiza a través de datos empíricos que incluyen los pagos que realiza la entidad en concepto de costes asociados al pago de una reclamación.

Los factores subyacentes para determinar la metodología correcta para esta estimación son el tamaño del grupo cubierto, así como la disponibilidad y confiabilidad de los datos del coste incurrido que, históricamente, la compañía ha tenido por concepto de reclamaciones.

Si los costes o gastos por reclamación de un grupo pueden ser determinados de acuerdo a la experiencia del mismo, se estimarán en términos de la siniestralidad incurrida por el propio grupo, aplicando cualquier ajuste necesario debido a cambios en el tamaño de la población cubierta, las condiciones de elegibilidad y los períodos de retraso entre la reclamación y el pago del beneficio.

Otra opción para calcular los riesgos en base a datos empíricos es determinar la tasa de reclamaciones primero, para posteriormente aplicar factores de cálculo, lo que permite brindar mayor flexibilidad durante el proceso de cálculo de las primas.

Para el seguro de accidentes individual, al igual que para grupos pequeños, o si no existe información confiable de las reclamaciones, los gastos por reclamaciones se estiman de forma distinta para las coberturas de fallecimiento, gastos médicos e invalidez. La respuesta para el cálculo de este tipo de reclamaciones es la denominada tasa de reclamación, r. La tasa de reclamación se calcula de manera empírica en base a estadísticas del mercado o de la compañía, o en publicaciones especializadas o proporcionadas en la regulación, y es común encontrarlos de forma agregada por género y edad. Veamos las especificaciones para cada una:

Fallecimiento y desmembramiento

$$cc = (cr)(db)(il)$$

Siendo:

- cr: tasa de reclamación
- db: pago de beneficios totales por fallecimiento y desmembramiento
- il: recargo ocupacional por fallecimiento y desmembramiento. Si la tasa de reclamaciones está ligada a la población en general, se puede utilizar un factor de recargo ocupacional para el caso en que el riesgo cubierto se considere subestándar de acuerdo a su ocupación.

Invalidez

$$cc = (cr)(db)(il)$$

Siendo:

- cr: tasa de reclamación
- db: pago de beneficios totales por invalidez
- il: recargo ocupacional

Gastos médicos

$$cc = (cr)(d)(c)(mb)(mt)(il)$$

Siendo:

- cr: tasa de reclamación
- d: factor por deducible
- c: factor por coaseguro
- mb: factor de máximo beneficio
- mt: factor por tendencia en el coste de los gastos médicos
- il: recargo ocupacional

Factor por conversión de tiempo (tc)

El factor se emplea en los siguientes casos:

- cuando la tasa de reclamación se limita a un período determinado de tiempo y la cobertura se ofrece por un período mayor, en este caso >1. Esto es común en pólizas de grupo y en aquellas calculadas con datos empíricos.
- Cuando la tasa de reclamo se basa en estadísticas anuales y la cobertura que se ofrece es por un período de tiempo corto, en este caso ≤1.

Margen de seguridad (λ)

Es común que se construya un margen de seguridad dentro del cálculo de la prima. Su magnitud depende de diversos factores, como la calidad de los datos y las condiciones de volatilidad del mercado.

Gastos de administración (A)

El recargo para gastos de administración o de gestión interna de la cartera de seguros por la propa entidad aseguradora hace referencia a los gastos ocasionados por la conservación, el funcionamiento y la vigilancia propia de la entidad aseguradora.

Gastos de adquisición (C)

El recargo para gastos de gestión externa o de adquisición y mantenimiento de negocio, cuya finalidad es remunerar a los agentes y corredores y otras instituciones que intervienen en la venta de los seguros de la entidad y el cobro de las primas.

Recargo para beneficio o margen de utilidad (M)

Se destina a remunerar las aportaciones a los fondos propios de la entidad aseguradora y a constituir reservas patrimoniales.

En definitiva, al igual que en cualquier otro tipo de seguro, una vez determinados todos los componentes a incluir en la prima, los recargos para gastos de gestión (interna y externa) también suelen expresarse en forma del porcentaje que representan de la prima comercial o de tarifa, lo que permite expresar esta como suma de todos sus componentes:

$$P'' = P(1+\lambda) + g_1 P'' + g_2 P'' + bP''$$

Siendo:

- P'': prima comercial o de tarifa
- P: prima pura
- λ: margen de solvencia
- g_1: gastos de gestión interna
- g_2: gastos de gestión externa
- b: recargo para beneficio

Cálculo de la reserva

La temporalidad de los seguros de accidentes y enfermedades, salvo pocas excepciones, es de un año, por lo que la reserva de riesgos en curso se constituye con la parte de la prima no devengada. Sin embargo, la prima que se debe utilizar para el cálculo de la reserva debe ser la prima de tarifa menos en coste de adquisición. A diferencia de los seguros de vida, en estos planes la parte correspondiente al gasto de administración y el margen de utilidad deben reservarse junto con la prima de riesgo e irse devengando en el tiempo hasta el vencimiento de la póliza. En términos técnicos, la reserva de riesgos en curso para este tipo de planes debe calcularse como:

$$RRC_t = \frac{T-t}{T}(PT - CA)$$

Donde:

- PT: prima de tarifa cobrada
- CA: comisiones de adquisición
- T: duración del contrato
- t: tiempo transcurrido

4. Protección por parte del Sistema de la Seguridad Social

La Seguridad Social, por su parte, también protege al ciudadano ante la posible contingencia de una incapacidad causada por una enfermedad o accidente, distinguiendo entre:

- Incapacidad temporal (IT): Es la conocida también como baja por enfermedad. Se produce mientras el trabajador recibe asistencia sanitaria y está impedido temporalmente para trabajar. Por tanto, se trata de una prestación contributiva pensada para cubrir la pérdida de rentas que se produce mientras persiste esta situación. Hay dos posibilidades: que la baja sea por enfermedad común (o un accidente no laboral); o que sea por accidente de trabajo o enfermedad profesional.
- Incapacidad permanente: Un trabajador está en situación de Incapacidad Permanente cuando, después de haber estado sometido al tratamiento prescrito y de haber sido dado de alta médicamente, presenta reducciones anatómicas o funcionales graves, susceptibles de determinación objetiva y previsiblemente definitivas, que disminuyan o anulen su capacidad laboral, y que puede causar derecho a una prestación de cuantía variable según el grado de la incapacidad:
    - Incapacidad permanente parcial (IPP): Cuando las secuelas producen una disminución en el rendimiento normal para su profesión habitual (la que venía desempeñando) que no sea inferior al 33% y al tiempo no le inhabilite completamente para realizarla.
    - Incapacidad permanente Total (IPT): Inhabilita al trabajador para la realización de todas o de las fundamentales tareas de su profesión habitual, siempre que pueda dedicarse a otra distinta.
    - Incapacidad permanente absoluta (IPA): Inhabilita por completo al trabajador para toda profesión u oficio.

- Gran invalidez (GI): El trabajador afectado por una incapacidad permanente y que necesite la asistencia de otra persona para los actos más esenciales de la vida. Esta situación añade un complemento económico a la prestación por incapacidad que tuviese reconocida para costearse esa asistencia.

Asimismo, esta incapacidad puede producirse por lo que llamamos contingencias comunes (enfermedad común y accidente no laboral) o contingencias profesionales (accidentes de trabajo y enfermedades profesionales). La financiación de estas prestaciones se realiza a través de las cotizaciones sociales. Cabe recordar que las cotizaciones por contingencias comunes se reparten entre el empresario y el trabajador, mientras que las cotizaciones por contingencias profesionales corren a cargo exclusivamente del empresario.

La gestión de estas prestaciones se encuentra repartida entre el Instituto Nacional de la Seguridad Social (INSS), el Instituto Social de la Marina (ISM) y las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social. A continuación se ofrece un resumen de las estadísticas principales del gasto en incapacidad en 2024:

Estadísticas IT

	INSS			ISM			Mutuas			Sistema		
2024 - Incapacidad Temporal	**CC**	**CP**	**Total**	**CC**	**CP**	**Total**	**CC**	**CP**	**Total**	**CC**	**CP**	**Total**
Duración media de los procesos finalizados en el periodo	40,6	83,6	40,8	110,3	169,9	112,7	43,3	45,2	43,5	42,6	46,1	42,9
Incidencia media mensual por cada mil trabajadores protegidos	35,1	1,8	35,4	23,3	2,9	24,2	30,9	2,8	27,4	32,1	2,8	34,6
Número de procesos iniciados en el periodo	2.621.054	16.790	2.637.844	10.824	438	11.262	5.847.545	672.193	6.519.738	8.479.423	689.421	9.168.844
Número de procesos finalizados en el periodo	2.493.788	14.947	2.508.735	10.367	442	10.809	5.793.969	657.229	6.451.198	8.298.124	672.618	8.970.742
Prevalencia por cada mil trabajadores protegidos	58,6	4,1	59,1	86,6	16,3	91,7	48,5	4,0	42,3	51,2	4,0	55,0
Número de procesos en vigor al final del periodo considerado	325.668	3.220	328.888	3.465	206	3.667	767.433	80.891	848.324	1.096.566	84.313	1.180.879
Trabajadores protegidos al final del periodo considerado	5.561.625	793.488	5.561.625	39.996	12.673	39.996	15.828.814	20.060.979	20.060.979	21.430.435	20.867.140	21.455.297
Media de trabajadores protegidos	6.216.701	783.405	6.216.701	38.777	12.508	38.777	15.791.269	19.842.404	19.842.404	22.046.746	20.638.317	22.055.120

	INSS			ISM			Mutuas		
2024 - % sobre tipo de contingencia para el Sistema	**CC**	**CP**	**Total**	**CC**	**CP**	**Total**	**CC**	**CP**	**Total**
Número de procesos iniciados en el periodo	30,91%	2,44%	28,77%	0,13%	0,06%	0,12%	68,96%	97,50%	71,11%
Número de procesos finalizados en el periodo	30,05%	2,22%	27,97%	0,12%	0,07%	0,12%	69,82%	97,71%	71,91%
Número de procesos en vigor al final del periodo considerado	29,70%	3,82%	27,85%	0,32%	0,24%	0,31%	69,99%	95,94%	71,84%
Trabajadores protegidos al final del periodo considerado	25,95%	3,80%	25,92%	0,19%	0,06%	0,19%	73,86%	96,14%	93,50%
Media de trabajadores protegidos	28,20%	3,80%	28,19%	0,18%	0,06%	0,18%	71,63%	96,14%	89,97%

Estadísticas IP

En cuanto a la incapacidad permanente, basémonos en el libro de pensiones de marzo de 2025 para extraer las siguientes estadísticas sobre las altas iniciales producidas en el mes de febrero de este año:

	IP	GI	IPA	IPT 55%	IPT 75%
Edad media	54	54	54	52	60
Número	9.539	215	2.595	5.400	1.329
Pensión media	1.119,47	2.830,25	1.477,49	894,98	1.055,81
Sobre total IP					
Número	100,00%	2,25%	27,20%	56,61%	13,93%
Pensión media	100,00%	252,82%	131,98%	79,95%	94,31%
% de contingencias comunes y profesionales					
% CC	93,37%	93,95%	98,88%	90,09%	95,86%
% CP	6,63%	6,05%	1,12%	9,91%	4,14%

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 48. Protección de la invalidez. Intensidad y probabilidades fundamentales. Construcción de Tablas. Rentas de Invalidez sobre una cabeza. Capitales de invalidez: primas únicas y periódicas. Reservas.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Todos los trabajadores de España están cubiertos contra los riesgos de vejez, muerte e invalidez a través del Sistema de Seguridad Social. Así pues la pensión de invalidez es una de las prestaciones que configuran el marco de la acción protectora de la Seguridad Social. La mayoría de la cobertura del riesgo de invalidez tanto en los seguros privados como en los diversos sistemas de previsión social complementaria, suelen tener definida la calificación de invalidez en los mismos términos que el Sistema de Seguridad Social, e incluso llega a ser previa esta calificación para el reconocimiento de estas pensiones.

Desarrollaremos, en este tema, un modelo biométrico de invalidez, englobando este concepto la invalidez absoluta y permanente, causada por enfermedad o accidente, que inhabilite al asegurado o partícipe para el desempeño de cualquier actividad profesional y/o de actividades básicas para la vida.

Decíamos que, en el campo de la Seguridad Social, se habla de incapacidad permanente (parcial, total o absoluta) para el ejercicio de la profesión y, en el caso de que se requiera de terceras personas para el desenvolvimiento de la vida normal, hablamos de gran invalidez. Estas calificaciones se dan, no obstante, en relación a una actividad profesional o económica, de ahí el término de incapacidad y se otorgan en la modalidad contributiva del sistema.

En la modalidad no contributiva del Sistema, nos encontramos con las pensiones por invalidez no contributivas, cuya gestión se encuentra atribuida a los órganos competentes de cada Comunidad Autónoma y a las Direcciones provinciales del Instituto de Mayores y Servicios Sociales (IMSERSO) en las ciudades de Ceuta y Melilla.

Además, comentábamos que en el mercado existen seguros privados que cubren la contingencia de invalidez o incapacidad a partir del grado de total o de absoluta, según el producto. Normalmente estos productos llevan asociados una renta vitalicia o temporal a partir del momento en el que se produce la contingencia de invalidez, esto es, el asegurado pasa de situación activa a situación inválida.

Cualquier valoración actuarial refiere sus cálculos a términos de “valores actuales” en los que no sólo influyen los valores financieros sino también las correspondientes distribuciones de probabilidad que están ligadas a las nociones fundamentales de “orden” y “efectivos”. Se denomina:

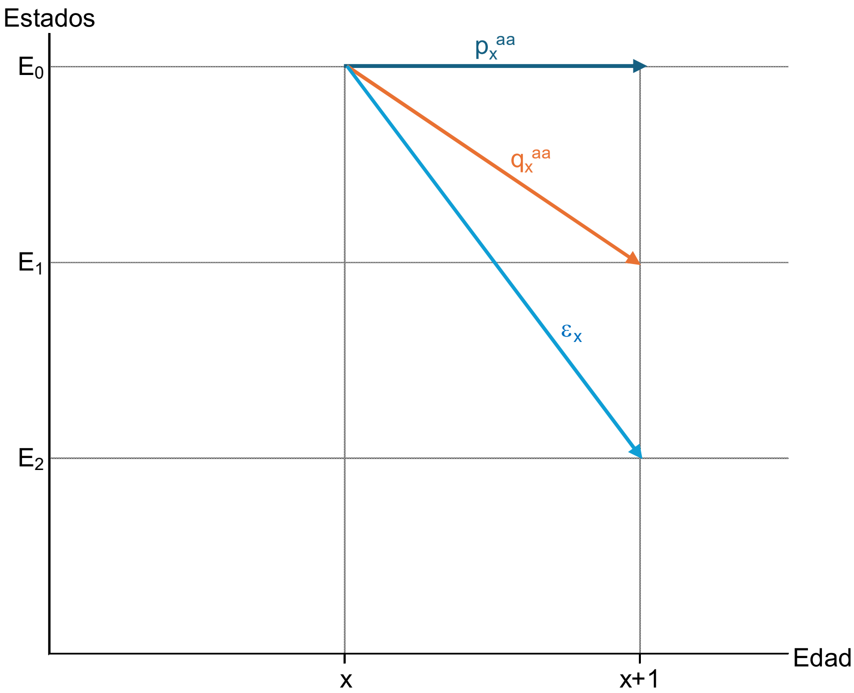
- Orden a un grupo de personas de la misma edad, cuyo número, en función del paso del tiempo, varía bajo la acción de una sólo o varias causas de salida. Si se trata de una sola causa, el orden es simple, si son tenidas en cuenta varias causas el orden es compuesto.
- Efectivo a un grupo de personas de la misma edad cuyo número varía a través del tiempo, bajo la acción de una o varias causas de salida y entrada.

El tratamiento del modelo actuarial de la invalidez o incapacidad para el trabajo requiere establecer que el orden l_x de supervivientes permita distinguir los activos de los inválidos, es decir, las personas capaces de trabajar de las que no lo son. Con el paso del tiempo, cada uno de estos grupos evoluciona bajo los efectos de la mortalidad (la de activos puede ser diferente de la de inválidos) y por el paso del estado de activo al de inválido, o del estado de invalidez al de activo. A cada uno de estos sucesos se les asocia una probabilidad.

Consideramos el orden simple l_x en dos partes:

- Un orden compuesto de los activos sobre los que se trata: dos causas de salida, la muerte y la invalidez; y
- Un efectivo de inválidos sobre los que se trata: una causa de salida, la muerte, y una causa de entrada, la invalidez.

Hablamos, por tanto, de cambios de estados y es por ello por lo que trabajaremos bajo modelos estocásticos de múltiples estados eliminatorios entre sí:



Siendo:

- E_0: Estado asociado a vivir válido
- E_1: Estado asociado a fallecimiento válido
- E_2: Estado asociado a la situación de invalidez
- p_x^{aa}: Probabilidad de vivir un año más, en estado de actividad
- q_x^{aa}: Probabilidad de fallecer a la edad x, en estado de actividad
- ε_x: Probabilidad de invalidarse

Y se establece la igualdad:

$$p_x^{aa} + q_x^{aa} + \varepsilon_x = 1$$

2. Probabilidades básicas

Partiendo de nuestra igualdad fundamental:

$$p_x^{aa} + q_x^{aa} + \varepsilon_x = 1$$

Realmente la probabilidad de invalidarse ε_x contiene dos probabilidades distintas: la de sobrevivir inválido o morir inválido:

$$\varepsilon_x = p_x^{ai} + q_x^{ai}$$

Siendo:

- p_x^{ai}: Probabilidad de vivir un año más, pero pasando del estado de actividad al de invalidez
- q_x^{ai}: Probabilidad de fallecer a la edad x, pasando primero de estar activo a inválido

A tener en cuenta:

- $p_x^a = p_x^{aa} + p_x^{ai}$
- $q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}$
- $p_x^a + q_x^a = 1$

Probabilidad de invalidarse

Decíamos que la probabilidad de invalidarse a la edad x es ε_x, y se calculará como:

$$\varepsilon_x = \frac{n_x^{ai}}{l_x^a}$$

Donde:

- l_x^a: censo de activos a la edad x
- n_x^{ai}: personas que se invalidan a la edad x

A la edad x+1 este cálculo será:

$$\varepsilon_{x+1} = \frac{n_{x+1}^{ai}}{l_{x+1}^a}$$

Luego, en general:

$$\varepsilon_{x+t} = \frac{n_{x+t}^{ai}}{l_{x+t}^a}$$

Métodos de cálculo

Partiremos del modelo usado por Swiss RE en los años 80, que sigue en vigor en gran parte de los países, entre ellos España:

$$\varepsilon_x = q_x \frac{x}{aA + b(x-23)} c$$

Donde:

- q_x está calculada con las GRM/F80. Podríamos “modernizar” los datos usando tablas más actuales.
- $A = \begin{cases} 40 - x & si\ x < 40 \\ 0 & si\ x \geq 40 \end{cases}$
- a, b y c son parámetros a estimar, ya sea:
  - Por mínimos cuadrados:
    - los valores obtenidos fueron a = 3,75; b= 5; c = 5,40
    - A efectos de aproximación, se emplean tres tramos de estimación de $\bar{\varepsilon}_x$, que es una aproximación al valor promedio anual de la función de invalidez:
      - X ≤ 44 → $\bar{\varepsilon}_x \cong 0{,}40‰$ → Para edades jóvenes, es una función muy próxima al eje de abscisas, creciente pero con una pendiente pequeña.
      - 45 ≤ x ≤ 54 → $\bar{\varepsilon}_x \cong 0{,}80‰$ → Contiene un error mayor, pero es admitido en la práctica.
      - 55 ≤ x ≤ 64 → $\bar{\varepsilon}_x \cong 2‰$ → En este caso difiere mucho, hay mucho más error y la pendiente es creciente.
      - A partir de los 65 años no se realizan más estimaciones porque no se suele asegurar la invalidez más allá de la jubilación.
  - Por momentos (método de King-Hardy):
    - Usa el método de los momentos para calcular los valores de los parámetros a, b y c
    - Los complementa haciendo una corrección para conseguir estimadores robustos (poco sensibles a la variación de los datos muestrales)

Más adelante, Munich RE se basó en datos de la UE para hacer una nueva estimación de estas probabilidades ε_x, siendo las principales diferencias con el modelo de Swiss RE:

- Su año de publicación, mucho más reciente
- Comprueba mediante ANOVAS que, además de la edad del asegurado, influía también su sexo y si se trataba de una póliza individual o colectiva

En la práctica, suelen usarse las tablas de Swiss RE para la cartera y las de Munich RE para la nueva producción.

Probabilidad de fallecer activo

$$q_x^{aa} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^a}$$

Donde:

- l_x^a: censo de activos a la edad x
- d_x^{aa}: personas que se fallecen a la edad x sin haberse invalidado previamente (en estado activo)

3. Construcción de las tablas de invalidez

Las tablas de invalidez contendrán los siguientes conceptos:

l_x^a	n_x^{ai}	ε_x	p_x^{aa}	q_x^{aa}	p_x^{ai}	q_x^{ai}

Veamos el modo de calcular cada una de las cuatro probabilidades básicas:

q_x^{ai}

Es la probabilidad de, a la edad de x años, pasar de estado de activo a inválido y fallecer antes de cumplir x+1 años. Se va a tomar, como solemos hacer, la hipótesis de invalidez a mitad de año (distribución uniforme → se invalida en $x + \frac{1}{2}$ y muere después de ese momento y antes de x+1), de modo que:

$$q_x^{ai} = \varepsilon_x \, q_x^i \, \frac{1}{2}$$

Siendo q_x^i la probabilidad de morir inválido:

$$q_x^i = \frac{l_x^i - l_{x+1}^i}{l_x^i}$$

Su complementario es la probabilidad de un individuo inválido de edad x de sobrevivir a la edad x+1,

$$p_x^i = 1 - q_x^i = \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i}$$

Estas probabilidades p_x^i y q_x^i son las que componen las tablas de muerte y supervivencia de inválidos (por ejemplo, las EVK 2010) donde se observa que, a mayor antigüedad de la invalidez, mayor probabilidad de supervivencia.

p_x^{ai}

Es la probabilidad de, con x años, pasar de estado de activo a inválido y sobrevivir inválido a la edad x+1 años:

$$p_x^{ai} = \varepsilon_x - q_x^{ai} = \varepsilon_x \left(1 - q_x^i \, \frac{1}{2}\right) = \frac{1 + p_x^i}{2}$$

q_x^{aa}

Recoge la probabilidad de, con x años, estar válido y fallecer válido. Teniendo en cuenta que podemos unir los dos decrementos de fallecimiento en dos estados, en un único estado:

$$q_x^{aa} + q_x^{ai} = q_x$$

Vamos a poder obtener la probabilidad pasar a inválido y fallecer como:

$$q_x^{ai} = q_x - q_x^{aa}$$

p_x^{aa}

La probabilidad de sobrevivir activo un año más se calculará como el complementario de la suma de las probabilidades anteriores:

$$p_x^{aa} = 1 - q_x^{aa} - p_x^{ai} - q_x^{ai}$$

La principal utilidad de estas tablas de mortalidad es:

- La valoración actuarial de una renta de invalidez.
- El cálculo de la prima natural en la contingencia de invalidez.
- En el seguro de invalidez, la fórmula de cálculo de las reservas, de forma prospectiva o retrospectiva.
- Renta en caso de invalidez (partiendo del estado de activo o válido).

Relaciones importantes

- Llamamos $\Delta_x^a = l_x^a - l_{x+1}^a = d_x^{aa} + n_x^{ai}$
- $p_x^{aa} + q_x^{aa} + p_x^{ai} + q_x^{ai} = 1$ y como $\varepsilon_x = p_x^{ai} + q_x^{ai}$, entonces $p_x^{aa} + q_x^{aa} = 1 - \varepsilon_x$
- $p_x^{aa} = p_x^a - p_x^{ai} = p_x^a - \varepsilon_x \left(1 - \ q_x^i \ \frac{1}{2}\right)$
- $q_x^{aa} = q_x^a - q_x^{ai} = q_x^a - \varepsilon_x q_x^i \ \frac{1}{2}$

Conclusión

Para estimar las cuatro probabilidades fundamentales (p_x^{aa}, q_x^{aa}, p_x^{ai}, q_x^{ai}), bastará con conocer los tantos anuales conocidos como funciones fundamentales de Zimmermann:

- Tanto anual de invalidez: ε_x
- Tanto anual de mortalidad q_x^a
- Tanto anual de mortalidad q_x^i

4. Rentas de invalidez sobre una cabeza

Renta a favor de una cabeza activa

Definamos una renta vitalicia constante unitaria y prepagable para un individuo activo de x años de edad en tanto viva activo en tal estado:

$$\ddot{a}_x^{aa} = \sum_{t=0}^{w-x-1} V^t \ {}_tp_x^{aa}$$

Renta a favor de una cabeza ya inválida

Definamos una renta vitalicia constante unitaria y prepagable para un individuo inválido de x años de edad:

$$\ddot{a}_x^{i} = \sum_{t=0}^{w-x-1} V^t \ {}_tp_x^{i}$$

Renta a favor de una cabeza activa que se invalida:

Definamos una renta vitalicia constante unitaria y prepagable para un individuo activo de x años de edad en tanto viva inválido:

$$\ddot{a}_x^{ai} = \sum_{t=0}^{w-x-1} v^t \ {}_tp_x^{ai}$$

Las modificaciones a aplicar serían:

- Si es pospagable, el extremo inferior del intervalo es t=1
- Si es temporal y prepagable, el extremo superior del sumatorio es n-1
- Si es temporal y pospagable, el extremo superior del sumatorio es n
- Si es diferida d periodos y prepagable, el extremo inferior del intervalo es d, y será d+1 si es pospagable.
- Si además de diferida es temporal, el extremo superior del intervalo será n+d en caso de prepagable y n+d+1 si es pospagable.

5. Capitales de invalidez: primas únicas y periódicas

Definición del capital

Cobertura vitalicia

Llamaremos A_x^{ai} al valor actual actuarial de un capital unitario pagadero al invalidarse una cabeza activa de edad x:

$$A_x^{ai} = \sum_{t=0}^{w-x-1} V^{t+\frac{1}{2}}{}_{t-1/}\varepsilon_x$$

Asumiendo que el pago de capital en caso de fallecimiento se hará a mitad de año.

Cobertura temporal

Llamaremos $A_{x:n}^{ai}$ al valor actual actuarial de un capital unitario pagadero al invalidarse una cabeza activa de edad x, siempre que esto ocurra entre 0 y n:

$$A_{x:n}^{ai} = \sum_{t=0}^{n} V^{t+\frac{1}{2}}{}_{t-1/}\varepsilon_x$$

Asumiendo que el pago de capital en caso de fallecimiento se hará a mitad de año.

A tener en cuenta:

$${}_{t-1/}\varepsilon_x = {}_{t-1}P_x^{aa}\varepsilon_{x+t-1}$$

Determinación de la prima

Prima única

Si se trata de una cobertura vitalicia: $\pi = A_x^{ai}$

Si se trata de una cobertura temporal: $\pi = A_{x:n}^{ai}$

Prima periódica

Si se trata de una cobertura vitalicia:

$$P_x \ddot{a}_{x:m}^{aa} = C^i A_x^{ai}$$

Si se trata de una cobertura temporal:

$$P_x \ddot{a}_{x:m}^{aa} = C^i A_{x:n}^{ai}$$

siempre que m≤n

6. Reservas

Fórmula prospectiva

$${}_tV_x = C^i A_{x+t:n-t}^{ai} - P_x \ddot{a}_{x+t:m-t}^{aa}$$

Fórmula retrospectiva

$${}_tV_x = \frac{1}{{}_tE_x^{aa}}\left[P_x \ddot{a}_{x:t}^{aa} - C^i A_{x:t}^{ai}\right]$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 49. Seguros colectivos. Ecuación fundamental y ecuación de equilibrio financiero. Sistemas financieros más notables: reparto y capitalización. Cálculo de la cuota: cuota media y cuota escalonada. Reservas: reserva de nivelación y reserva de garantía.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

Los seguros colectivos son aquellos que cubren uno o varios riesgos para un conjunto de personas que tienen algún interés común distinto del de asegurarse bajo un único contrato.

Debemos considerar tres aspectos:

- Colectivo: son grupos demográficos abiertos;
- Equidad entre derechos y prestaciones; y
- Salario: las aportaciones y prestaciones giran sobre los sueldos.

2. Principio de equivalencia colectiva

Partimos de un colectivo abierto en que:

- Los individuos tienen edades x;
- Los individuos han entrado en el colectivo en el momento t;
- Los individuos llevan n años en el colectivo; y
- Las primas P dependen de las sumas aseguradas s.

De modo que el valor en origen de las aportaciones es:

$$P(0) = \sum_s \sum_t \sum_x \sum_n L_{x,n,s,t} P_{x,n,s,t} V^{t+n}$$

Siendo:

- L el número de individuos;
- P la aportación o prima;
- V el factor de actualización financiera.

Si ahora tenemos:

- $K_{x,n,t,h}$: los elementos de L que sufren el hecho previsto (con intensidad h);
- $A_{x,n,t,h}$: el valor económico de la consecuencia del hecho.

Entonces, el valor de las prestaciones en origen es:

$$K(0) = \sum_h \sum_t \sum_x \sum_n K_{x,n,h,t} A_{x,n,h,t} V^{t+n}$$

La ecuación de Kaan refleja el equilibrio entre prestaciones y aportaciones:

$$A + P(0) = B + K(0)$$

De modo que, si:

- A=B=0 → el sistema es autosuficiente;
- A≠0 → el sistema precisa de aportaciones adicionales (del Estado, por ejemplo);
- B≠0 → el sistema financia otras finalidades, además de las prestaciones.

Lo interesante será determinar la cuantía de la prima $P_{x,n,s,t}$. Podemos analizar los siguientes casos particulares:

- Prima media general, en que todos los asegurados pagan la misma prima:

$$P = \frac{\sum_{x,t,h,n} KAV^{t+n}}{\sum_{x,t,s,n} LV^{t+n}}$$

- Prima media por generación, en que cada grupo de asegurados que entró en el colectivo en el mismo momento paga la misma prima:

$$P_t = \frac{\sum_{x,h,n} KAV^{t+n}}{\sum_{x,s,n} LV^{t+n}}$$

- Prima media por edad: capitalización colectiva para los asegurados de la misma edad:

$$P_x = \frac{\sum_{t,h,n} KAV^{t+n}}{\sum_{t,s,n} LV^{t+n}}$$

- Prima individual: con carácter promedio para los que reúnan la misma edad y misma duración del seguro:

$$P_{x,n} = \frac{\sum_{t,h} KAV^{t+n}}{\sum_{t,s} LV^{t+n}}$$

3. Sistemas financieros más notables: reparto y capitalización

Los sistemas financiero-actuariales Son modelos de naturaleza estocástica que permiten establecer el equilibrio entre valores actuales actuariales de primas y prestaciones del colectivo en un horizonte temporal dado. Se clasifican en:

- Reparto:
    - Simple:
        - Puro o anual
        - Cuota media escalonada
    - De capitales de cobertura:
        - Anual
        - Atenuado
- Capitalización:
    - Individual

- Colectiva

Reparto simple

Puro o anual

Se reparten año por año todas las cargas o prestaciones que produce el colectivo entre los miembros cotizantes (activos) de dicho colectivo. Así, el equilibrio financiero actuarial se establece entre las aportaciones a producirse en el año y las prestaciones a satisfacerse durante el mismo año.

La viabilidad de ese sistema se basa en que vayan incorporándose nuevos miembros al colectivo, deseablemente jóvenes, para que financien las prestaciones reconocidas a los pasivos.

En resumen:

- No se acumulan recursos y, por tanto, no se genera ahorro institucional;
- Exige obligatoriedad en la afiliación;
- Se trata de un sistema muy sensible a la evolución demográfica
- No garantiza prestación a los miembros pasivos: sus pensiones dependen de que haya retroalimentación adecuada; y
- Se basa en una transferencia de recursos intergeneracional.

Cuota media escalonada

Se caracteriza porque:

- Se forman períodos de equilibrio de varios años (3, 5 años...)
- La prima es constante en ese período (ya sea en absoluto o en porcentaje);
- Las primas no solo cubren prestaciones sino que permiten acumulación y mantenimiento de fondos de reserva (fondos de nivelación de cuotas).

Este sistema es un término intermedio entre el puro y el de capitales de cobertura.

La prima se debería establecer con arreglo a los siguientes principios:

- No varía mucho de un período a otro;
- Tiene valor intermedio entre la prima del sistema de reparto puro y la de capitales de cobertura.
- Las reservas deben considerar la situación del mercado, no solo para obtener seguridad, sino también rentabilidad.

De capitales de cobertura

Consiste en fijar un equilibro anual entre el valor actual de las prestaciones generadas en el año y las aportaciones o primas de dicho año. Se denomina atenuado cuando el período de equilibrio es superior al año (3, 5 años...).

Con objeto de atenuar los inconvenientes de los sistemas de reparto, surgen los sistemas mixtos o de reparto de capitales de cobertura (sin el coste inicial tan alto que supondría un sistema de capitalización). En estos sistemas las cargas del período están constituidas por el valor actual de las prestaciones causadas en el mismo.

Los sistemas de reparto de capitales de cobertura se caracterizan porque:

- Garantizan el cobro de las pensiones mediante la creación de un fondo de reservas que recibe el nombre de fondo de reservas para pensiones causadas, constituido por el valor actual de las rentas de jubilación en curso de pago;
- Al establecer períodos de equilibrio de 3, 5 o más años, también se crea una reserva adicional para derechos en formación, que garantiza parte de las obligaciones futuras para con los cotizantes.
- Existe una transferencia de recursos intergeneracional, lo que exige la afiliación obligatoria.

Sistemas de capitalización

Bajo estos sistemas, el período de equilibrio entre los valores actuales actuariales de primas y prestaciones es de carácter vitalicio. En la capitalización individual, la ecuación de equivalencia entre primas y prestaciones se establece persona a persona, mientras que en la capitalización colectiva la ecuación de equivalencia se establece para la totalidad del colectivo.

4. Cálculo de la cuota: cuota media y cuota escalonada. Reservas: reserva de nivelación y reserva de garantía.

Reparto simple puro o anual

Tomamos la jubilación como prestación base, a la edad x+r.

Colectivo:

Edad	Núm. Personas	Salario medio
x	l_x	w_x
x+1	l_{x+1}	w_{x+1}
...	...	...
x+r-1	l_{x+r-1}	w_{x+r-1}

Hipótesis:

- Estructura demográfica estable en el tiempo → Proporción de personas aa cada edad constante.
- Pensión anual de jubilación constante θw_{x+r}

Simplificación: la población es estacionaria → el número de personas a cada edad permanece constante.

Año 1:

- $Prestación = \theta w_{x+r} l_{x+r}$
- $Aportación = C_1 \sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h$
- Equilibrio:

$$C_1 \sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h = \theta w_{x+r} l_{x+r};\ C_1 = \frac{\theta w_{x+r} l_{x+r}}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h}$$

Año 2:

- $Prestación = \theta w_{x+r} l_{x+r} + \theta w_{x+r} l_{x+r+1} = \theta w_{x+r} l_{x+r}(1 + p_{x+r})$
- $Aportación = C_2 \sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h$
- Equilibrio:

$$C_2 = \frac{\theta w_{x+r} l_{x+r}(1 + p_{x+r})}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h}$$

Año 3:

- Equilibrio:

$$C_3 = \frac{\theta w_{x+r} l_{x+r}(1 + p_{x+r} + {}_2p_{x+r})}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h}$$

Luego, para un **año k** cualquiera:

$$C_k = \frac{\theta w_{x+r} l_{x+r}(1 + p_{x+r} + \cdots + {}_{k-1}p_{x+r})}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h}$$

De modo que $C_1 < C_2 < \ldots < C_k < \ldots$

A partir de determinado año n=N, en que ${}_np_{x+r} \approx 0$, la cuota permanecerá estable $\forall n \geq N$:

$$C_n = \frac{\theta w_{x+r} l_{x+r}(1 + p_{x+r} + \cdots + {}_{n-1}p_{x+r})}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h} = \frac{\theta w_{x+r} l_{x+r}(1 + e_{x+r})}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h}$$

Siendo e_{x+r} la esperanza de vida abreviada.

Suponiendo que la pensión en n, en vez de ser constante, alcanza un valor $\theta(1+s)w_{x+r}$, entonces la cuota quedaría:

$$C'_n = \frac{\theta(1+s) w_{x+r} l_{x+r}(1 + e_{x+r})}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h} = (1+s)C_n$$

De modo que las primas varían en la misma proporción que las prestaciones en reparto simple puro.

En caso de que los salarios crecieran a una tasa α:

$$C''_n = \frac{\theta(1+s)w_{x+r}l_{x+r}(1+e_{x+r})}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h(1+\alpha)l_h} = \frac{(1+s)}{(1+\alpha)}C_n$$

Cuota media escalonada

Tomamos un período de equilibrio de 3 años. El esquema de las prestaciones sería:

	Año 1	**Año 2**	**Año 3**
	${}^1l_{x+r}\theta^1 w_f^1$	${}^2l_{x+r}\theta^2 w_f^2$	${}^3l_{x+r}\theta^3 w_f^3$
		${}^1l_{x+r}\theta^1 w_f^1 p_{x+r}$	${}^2l_{x+r}\theta^2 w_f^2 p_{x+r}$
			${}^1l_{x+r}\theta^1 w_f^1\, {}_2p_{x+r}$
Total:	**K_1**	**K_2**	**K_3**

El total de cada año:

$$K_1 = {}^1l_{x+r}\,\theta^1\,w_f^1$$

$$K_2 = \sum_{i=1}^{2} {}^il_{x+r}\,\theta^i\,w_f^i\;{}_{2-i}p_{x+r}$$

$$K_3 = \sum_{i=1}^{3} {}^il_{x+r}\,\theta^i\,w_f^i\;{}_{3-i}p_{x+r}$$

Siendo:

- ${}^il_{x+r}$: el número de personas que alcanzan la edad x+r en el año i;
- $\theta^i w_f^i = R^i$: pensión anual de jubilación (en % del salario final) para la generación i-ésima de jubilados.

De modo que el valor actual de las prestaciones será:

$$K(0) = K_1 + K_2V + K_3V^2$$

Y el de las aportaciones:

$$P(0) = C\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h \ddot{a}_{h:3}^{(\alpha}$$

Siendo $\ddot{a}_{h:3}^{(\alpha}$ el valor actual de una renta revalorizable a una tasa anual α equivalente a la tasa de revalorización de los salarios.

De modo que:

$$C = \frac{K_1 + K_2V + K_3V^2}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h \ddot{a}_{h:3}^{(\alpha}}$$

Bajo la suposición de que las prestaciones son crecientes, como las primas son constantes, se producirá durante los primeros años un excedente, lo cual da lugar a la constitución de reservas, denominadas fondos de nivelación de cuotas. Llegará un momento en que las aportaciones y las prestaciones se igualarán y posteriormente las prestaciones superarán a las aportaciones, consumiendo las reservas constituidas previamente. Al final del horizonte temporal, las reservas deben ser nulas, para que se cumpla el postulado de equivalencia.

Capitales de cobertura

Situémonos en el **atenuado**, con un horizonte temporal de tres años.

Las prestaciones:

$$K_1^c = {}^1l_{x+r}\theta^1 w_f^1 \ddot{a}_{x+r}^{(m)} = l_{x+r-1}\ {}_1p_{x+r-1}\theta^1 w_f^1 \ddot{a}_{x+r}^{(m)}$$

$$K_2^c = {}^2l_{x+r}\theta^2 w_f^2 \ddot{a}_{x+r}^{(m)} = l_{x+r-2}\ {}_2p_{x+r-2}\theta^2 w_f^2 \ddot{a}_{x+r}^{(m)}$$

$$K_3^c = {}^3l_{x+r}\theta^3 w_f^3 \ddot{a}_{x+r}^{(m)} = l_{x+r-3}\ {}_3p_{x+r-3}\theta^3 w_f^3 \ddot{a}_{x+r}^{(m)}$$

De modo que:

$$C_c = \frac{K_1^c + K_2^c V + K_3^c V^2}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h \ddot{a}_{h:3}^{(\alpha}}$$

Analizando el **anual** para ver cómo se forman las reservas:

Para una determinada anualidad:

$$C_c = \frac{l_{x+r}\theta w_f \ddot{a}_{x+r}}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h} = \frac{l_{x+r}\theta w_f (1 + a_{x+r})}{\sum_{h=x}^{x+r-1} w_h l_h}$$

Como $a_{x+r} < e_{x+r} \rightarrow C_c < C_n\ \forall n \geq N$, es decir, la cuota en capitales de cobertura es menor a la obtenida tras el momento N en el reparto simple (cuanto ya se mantiene constante).

Veamos cómo se generan los fondos en capitales de cobertura; para ello, calculamos las reservas generadas en cada año:

Año 1:

$$l_{x+r}\theta w_f (1 + a_{x+r}) = l_{x+r}\theta w_f + l_{x+r}\theta w_f a_{x+r}$$

Año 2:

$$l_{x+r}\theta w_f [(1 + a_{x+r}) + p_{x+r}(1 + a_{x+r+1})] \\ = l_{x+r}\theta w_f (1 + p_{x+r}) + l_{x+r}\theta w_f (a_{x+r} + p_{x+r} a_{x+r+1})$$

Año k:

$$l_{x+r}\theta w_f (1 + \sum_{i=1}^{k-1}\ {}_ip_{x+r}) + l_{x+r}\theta w_f \sum_{i=0}^{k-1}\ {}_ip_{x+r}\ a_{x+r+i}$$

Año n≥N:

$$\underbrace{l_{x+r}\theta w_f(1+e_{x+r})}_{\text{Fondos constituidos para satisfacer el pago de prestaciones de la anualidad considerada}} + \underbrace{l_{x+r}\theta w_f \sum_{i=0}^{n-1} {}_{i}p_{x+r}\ a_{x+r+i}}_{\text{Fondo reservas para pensiones causadas. Garantiza las pensiones de los individuos que se jubilan durante esta anualidad}}$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 50. La previsión social complementaria. Instrumentos y objetivos. Seguridad Social. Instituciones y elementos que conforman el sistema de planes y fondos de pensiones. Los planes de pensiones: antecedentes, naturaleza, clases, elementos personales y principios básicos. Las especificaciones del plan de pensiones.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. La previsión social complementaria. Instrumentos y objetivos. Seguridad social

Los tres pilares del sistema de pensiones

Con carácter general, los sistemas de pensiones en los diferentes países se articulan en torno a los denominados tres pilares, tres niveles de prestaciones que conforman la totalidad del sistema:

- Un primer pilar que se encuentra encuadrado bajo la protección del Estado, con el objetivo de dar cobertura a determinadas contingencias (enfermedad, desempleo, accidentes) y ante determinadas situaciones vitales, como la jubilación. Este primer pilar se conforma normalmente como un sistema público de previsión.
- Un segundo pilar constituido por los sistemas de pensiones promovidos por las empresas y que están orientados a generar un capital que complemente la futura pensión pública. Se configuran normalmente como sistemas de capitalización en los que las contribuciones y aportaciones de las empresas y los trabajadores financian las futuras prestaciones y los resultados obtenidos de su inversión.
- Un tercer pilar conformado por los productos de previsión personal que por iniciativa propia se contratan por los ahorradores con una entidad financiera o de seguros. Son individuales, privados y siempre voluntarios.
- Los distintos países afrontan la protección social de los ciudadanos con diversas combinaciones de los tres pilares anteriores, existiendo fundamentalmente dos modelos:
- El modelo anglosajón, donde el sistema público es asistencial y universal y con cuantías básicas. Esta protección se combina con un sistema privado muy desarrollado y que se convierte en el principal proveedor de protección.
- El modelo continental, donde el sistema público es profesional y contributivo, basado en cotizaciones sobre salarios. En los países que han optado por el modelo continental el sistema privado se encuentra menos extendido y su impulso es más reciente.

Por lo que se refiere a la configuración concreta del sistema de pensiones español, la Constitución Española dispone en su artículo 41 que «los poderes públicos mantendrán un régimen público de Seguridad Social para todos los ciudadanos, que garantice la asistencia y prestaciones sociales suficientes ante situaciones de necesidad, especialmente en el caso de desempleo. La asistencia y prestaciones complementarias serán libres».

Se extrae, por tanto, de la Constitución que el sistema de previsión social debe estar diseñado combinando un sistema público básico con la existencia de otras prestaciones complementarias de carácter privado y voluntario. De esta forma, se establece que en el sistema de previsión social español se puede distinguir:

- El primer pilar, gestionado por la Seguridad Social, que ofrece pensiones contributivas y no contributivas y está basado en los principios de reparto, proporcionalidad y contribución. Se configura como el núcleo central del sistema de previsión social español.
- El segundo pilar, que está constituido por los sistemas de pensiones promovidos por las empresas con sus trabajadores; se basa en un sistema de capitalización y es voluntario. En la actualidad se desarrolla a través de planes de pensiones de empleo, seguros colectivos que exteriorizan compromisos por pensiones, planes de previsión social empresarial y mutualidades de previsión social empresarial.
- El tercer pilar, que se desarrolla mediante productos de previsión social individuales que contratan los ahorradores por su propia iniciativa y que no están vinculados al desarrollo de su actividad profesional. Se desarrolla mediante planes de pensiones individuales y asociados, planes de previsión asegurados, mutualidades de previsión social y seguros de dependencia.

Así, el primer pilar se configura como el núcleo central del sistema de previsión social español, conformando el segundo y tercer pilar el sistema de previsión social complementaria.

La Seguridad Social. Previsión social universal y obligatoria.

Primer pilar: El sistema público de previsión social: Los sistemas públicos de previsión social son, en la mayoría de países, el eje de la previsión social. En España son desarrollados por la Seguridad Social. Históricamente, los sistemas públicos de protección social surgieron para proteger a los individuos más débiles de la sociedad, como los pobres o los obreros (accidentes o enfermedades profesionales. A lo largo de los años, se ha expandido para abarcar una amplia gama de servicios y prestaciones, incluyendo jubilación, la incapacidad permanente total para profesión habitual, o gran invalidez, fallecimiento, viudedad u orfandad, desempleo, dependencia severa, asistencia sanitaria o los servicios sociales.

El sistema público de previsión tiene unos rasgos característicos:

- Obligatoriedad, en tanto en cuanto que, si se dejara a la libre voluntad de cada individuo formar parte de los sistemas públicos de protección social, una gran mayoría de la población no se protegería o no lo haría suficientemente. Con la distinción entre prestaciones universales (básicas o asistenciales) y prestaciones profesionales, se consigue que para acceder a ciertas prestaciones sea obligatorio haber contribuido al sistema, y que no sean aquellos que contribuyen los que financien el aseguramiento de aquellos que no lo hagan.

- Carácter contributivo con elementos asistenciales, los sistemas públicos de pensiones son principalmente contributivos. Esto implica que se puede intuir una cierta proporcionalidad entre lo que se cotiza y entre lo que se tiene derecho a cobrar. Se cobrará en función de lo que se haya cotizado, y si no se ha cotizado nada, teóricamente, no se tendrá derecho a ninguna prestación. No hay que olvidar que, en la Seguridad Social, se aplica – aunque atenuadamente – el mismo principio que en el aseguramiento privado, puesto que la financiación del seguro del que se disfruta proviene de las primas que por el seguro pagan los asegurados, siendo en este caso, los trabajadores que cotizan. No obstante, existen ciertas prestaciones que no dependen de las cotizaciones, las prestaciones no-contributivas o asistenciales, cuyo objetivo es proteger a aquellas personas que no hayan podido contribuir suficientemente para lograr el derecho a las prestaciones contributivas. Estas prestaciones son financiadas con cargo a los Presupuestos Generales del Estado y entre las mismas se encuentran, la asistencia sanitaria, los servicios sociales y las pensiones no contributivas.
- Sistema de financiación de reparto, que supone que cada generación en activo, soporta las cargas económicas de las generaciones pasadas ya inactivas, con la contraprestación de que en cuanto dejen de formar parte de la población activa, sus necesidades futuras sean soportadas por las generaciones futuras, lo que implícitamente supone un «contrato de solidaridad intergeneracional».
- Gestión pública, debido a que la práctica totalidad de la población está encuadrada en la Seguridad Social, el sistema más eficaz y eficiente de gestión es el público, ya que consigue el menor gasto posible per cápita debido al uso de las economías de escala. Esta gestión se realiza a través de las Entidades Gestoras de la Seguridad Social.

Por lo tanto, este primer pilar se puede sintetizar con los siguientes rasgos:

- Es un régimen público garantizado institucionalmente.
- Desde la perspectiva subjetiva, se busca una protección o cobertura universal matizada.
- Desde la perspectiva objetiva, se pretende asegurar una cobertura suficiente en situaciones de necesidad.

La Seguridad Social en España es un pilar fundamental del sistema de bienestar social del país. Desde su establecimiento en la década de 1960, con la creación del Instituto Nacional de Previsión Social, ha desempeñado un papel crucial en la protección de los derechos sociales y económicos de los ciudadanos. No obstante, el envejecimiento de la población española plantea desafíos a largo plazo para la sostenibilidad de la Seguridad Social.

La Previsión Social Complementaria puede aliviar esta presión al proporcionar una fuente adicional de ingresos para garantizar un futuro económico estable y una jubilación digna, convirtiéndose en un elemento crucial para mantener el bienestar económico en la jubilación.

La previsión social complementaria

Como se ha expuesto anteriormente, la previsión social complementaria está compuesta por el segundo y tercer pilar. Como rasgos comunes podemos obtener:

- Carácter voluntario, depende del propio individuo o de la empresa el adherirse o adherir al trabajador a un concreto instrumento.
- Complementarios y no sustitutivos del sistema público; complementarias porque cubren contingencias ya cubiertas por el sistema público de previsión social, por lo que son un plus a las prestaciones recibidas por la Seguridad Social. No obstante, son no sustitutivas, porque no liberan al trabajador o a la empresa de satisfacer las cotizaciones legalmente dispuestas.
- Sistema financiero de capitalización, esto supone que cada individuo soporta sus propios riesgos presentes y futuros, aportando a un fondo común del que podrá tomar las cantidades necesarias para poder hacer frente a las prestaciones que necesite. Esta capitalización sumada a los intereses, deben permitir sufragar todas las prestaciones surgidas de las posibles contingencias que afecten al individuo.
- Carácter privado, surge de la voluntad de las partes, por lo que no hay intervención pública en la regulación de los límites máximos o mínimos de las aportaciones o prestaciones y demás elementos configuradores. No obstante, si están sujetos ciertos elementos a control administrativo.

Pasamos a verlos por separado:

Segundo pilar: La previsión empresarial o profesional.

El segundo pilar está constituido por los regímenes privados y complementarios de carácter ocupacional o de empleo, que surgen en el ámbito de las empresas y de las relaciones laborales y que están orientados a generar ahorro privado para la futura jubilación de sus trabajadores. Las aportaciones a este segundo pilar pueden ser realizadas en su totalidad por parte del empresario, que será el promotor; o también pueden estar realizadas por los partícipes, que serán los trabajadores. A diferencia del pilar de la previsión social pública, el sistema de financiación de este segundo pilar no se basa en un sistema de reparto atenuado, sino que se financia mediante un sistema de capitalización. En un sistema de capitalización, las aportaciones realizadas por el partícipe o a favor del partícipe, cotizarán en exclusiva para este, siendo las prestaciones futuras fruto de las aportaciones iniciales y de los rendimientos que estas generen, y no estando, por tanto, expuestas a los riesgos que conlleva la solidaridad intergeneracional.

Los instrumentos para canalizar este segundo pilar serían las cotizaciones obligatorias, planes de pensiones de empleo y asociados, seguros colectivos, mutualidades, entidades de previsión social (EPS)...

Tercer pilar: La previsión individual

Está conformada por los productos de previsión que por iniciativa propia contratan los individuos con su entidad financiera o compañía de seguros. Este pilar se distingue del segundo por la inexistencia de un promotor vinculado a una relación laboral, pero su funcionamiento es similar, basado en un sistema de capitalización a favor del propio individuo, que podrá generar unos rendimientos financieros que junto a las aportaciones acumuladas podrán ser rescatadas en ciertos momentos, normalmente en el momento de la jubilación.

Entre las ventajas más destacables se encuentra la flexibilidad de las aportaciones y de las prestaciones y, como en el segundo pilar, la inalterabilidad ante los cambios demográficos.

Se instrumenta mediante planes de pensiones asociados e individuales, seguros individuales...

Sistemas de previsión social complementaria

Como se ha mencionado anteriormente, los sistemas de previsión social complementaria abarcan el segundo y el tercer pilar, y a través de estos sistemas complementarios lo que se busca es ampliar la protección y cobertura de las personas para determinadas contingencias como los accidentes de trabajo o enfermedades profesionales, el fallecimiento o la jubilación.

Para el estudio de los sistemas de previsión social complementaria podemos atender a diversas clasificaciones, así, según su finalidad, tenemos:

- Sistemas de ahorro-previsión pensión o finalistas (en la legislación son denominados «sistemas de ahorro previsión privados») que son aquellos que están diseñados explícitamente para complementar las pensiones públicas.

  Entre estos sistemas tenemos como instrumento principal por su mayor desarrollo y su mayor implantación, a los planes de pensiones. También encontraremos otros sistemas que se pueden enmarcar dentro de los sistemas de previsión empresarial (como las mutualidades de previsión social, los planes de previsión social o los contratos de seguro colectivos) o individual (Planes de Previsión Asegurados o contratos de seguro de dependencia o gran dependencia).

- Sistemas de ahorro-previsión alternativos o no finalistas, que son los que pueden ser considerados como instrumentos de inversión puramente financiera, pero que debido a sus largos periodos de inversión o la forma de cobro de las prestaciones – normalmente en forma de renta – son asimilables a los sistemas de ahorro-previsión pensión. En estos sistemas podemos encontrar los contratos de seguro individuales (ahorro-capital, ahorro renta y ahorro renta vitalicia)

2. Instituciones y elementos que conforman el sistema de planes y fondos de pensiones. Los planes de pensiones: antecedentes, naturaleza, clases, elementos personales y principios básicos

Los Planes de Pensiones son productos de ahorro a largo plazo que tienen un carácter finalista, es decir, están diseñados para cubrir determinadas contingencias, principalmente la jubilación.

Se constituyen de forma voluntaria, y su finalidad es proporcionar a los partícipes prestaciones económicas en caso de jubilación, viudedad, supervivencia, orfandad, incapacidad permanente, dependencia, enfermedad grave, desempleo de larga duración y fallecimiento. Estas prestaciones dependerán del capital aportado por los partícipes y de los rendimientos obtenidos por el Fondo de Pensiones en el que se integre el Plan de Pensiones.

Las prestaciones de los Planes tienen carácter privado y son complementarias (nunca sustitutivas) de las pensiones a las que se pudiera tener derecho en el régimen correspondiente de la Seguridad Social, teniendo, en consecuencia, carácter privado y complementario de aquéllas.

Los Fondos de Pensiones son patrimonios, sin personalidad jurídica, creados para dar cumplimiento a los Planes de Pensiones integrados en él. Están constituidos por las aportaciones de los partícipes de los Planes integrados en el Fondo más los rendimientos obtenidos en sus inversiones.

Contarán con unas entidades promotoras, que serán quienes insten y participen en la constitución del Fondo.

Tenemos así dos instituciones diferenciadas: el fondo de pensiones, que es el patrimonio constituido con las aportaciones realizadas por cada individuo, el instrumento de financiación del ahorro-pensión constituido mediante los planes de pensiones; y el plan de pensiones, que es la construcción sistemática que establece las reglas de juego, funcionamiento y disposición de dicho patrimonio. Ambos instrumentos, planes y fondos, van absolutamente ligados y no pueden existir uno sin otro.

Los fondos de pensiones serán administrados necesariamente por una entidad gestora con el concurso de una entidad depositaria que cumplan las condiciones establecidas en la normativa reguladora de PPyFFPP.

Las Entidades Gestoras de Fondos de Pensiones serán sociedades anónimas, cuyo objeto exclusivo sea la administración de Fondos de Pensiones y las entidades aseguradoras autorizadas para operar en España en el ramo de seguro directo sobre la vida, incluidas las mutualidades de previsión social, siempre que todas ellas cumplan los requisitos previstos en el Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones.

Las Entidades Depositarias de Fondos serán entidades de crédito con domicilio social o una sucursal en España. Además, han de tener como actividad autorizada la recepción de fondos del público en forma de depósito, cuentas corrientes u otras análogas que lleven aparejada la obligación de su restitución y, como depositarios de valores negociables y otros activos financieros, la custodia y administración por cuenta de sus titulares.

Las entidades gestoras y las depositarias actuarán en interés de los fondos que administren o custodien, siendo responsables frente a las entidades promotoras, partícipes y beneficiarios de todos los perjuicios que se les causaran por el incumplimiento de sus respectivas obligaciones. Ambas entidades están obligadas a exigirse recíprocamente esta responsabilidad en interés de aquéllos

Para operar como tales, han de inscribirse en el Registro Especial de "Entidades Gestoras y Depositarias de los Fondos de Pensiones".

Los planes de pensiones han desempeñado un papel fundamental en la planificación financiera y la seguridad económica de los ciudadanos en España a lo largo de los años. Seguidamente abordaremos los antecedentes históricos que llevaron a la creación de los planes de pensiones en el país, su naturaleza jurídica, las diferentes clases de planes existentes, los elementos personales involucrados y los principios básicos que rigen este importante sistema de inversión y ahorro para la jubilación.

Antecedentes

Los antecedentes de los planes de pensiones en España se remontan a las primeras décadas del siglo XX, cuando surgieron las primeras iniciativas de previsión social para proteger a los trabajadores y sus familias en caso de enfermedad, accidente o jubilación. La creación de la Seguridad Social en 1963 marcó un hito en la protección social en España, sentando las bases para el desarrollo posterior de los planes de pensiones. Inicialmente, se basaba en un sistema de reparto, en el que los trabajadores activos financiaban las pensiones de los jubilados.

El artículo 41 de la Constitución Española consagra el mantenimiento de un régimen público de Seguridad Social para todos los ciudadanos que ha de garantizar la asistencia y prestaciones sociales suficientes ante situaciones de necesidad. A partir de la consagración de esta institución clave de nuestro Estado de bienestar, el mismo precepto añade que las «... prestaciones complementarias serán libres».

Es dentro de este segundo ámbito –que en ningún caso cuestiona la centralidad del sistema público de reparto– donde se incardinan los planes de pensiones como instituciones de previsión social complementaria que se introdujeron en España a través de la Ley 8/1987, de 8 de junio, de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones. Ello supuso un hito en el desarrollo de la previsión social complementaria. Hoy, más de treinta años después, cabe hacer un balance relativamente positivo de la trayectoria de este tipo de instrumentos, si bien ha habido un desarrollo desigual de los productos de previsión social individuales y los de la previsión social complementaria en el ámbito empresarial.

La Ley 24/2001, de 27 de diciembre, de Medidas fiscales, administrativas y del orden social autoriza al Gobierno para que, en el plazo de doce meses a partir de la entrada en vigor de la misma, elabore y apruebe un texto refundido de la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones, en el que se integren, debidamente regularizadas, aclaradas y sistematizadas la Ley 8/1987, de 8 de junio, de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones, y otras disposiciones que señala relativas a planes y fondos de pensiones, llegando así al actual Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones, desarrollado mediante Real Decreto 304/2004, de 20 de febrero. RPFP).

En los últimos años, la diferenciación entre la previsión social complementaria vinculada al ámbito empresarial y los productos de previsión social individuales que contratan los ahorradores por su propia iniciativa, se ha puesto de manifiesto tanto a nivel nacional como a nivel internacional.

En la Unión Europea, las iniciativas normativas para el fomento y desarrollo de los instrumentos de previsión social complementaria han liderado esta senda de diferenciación, con normas específicas para los distintos ámbitos.

En España la Ley 11/2020, de 30 de diciembre, de Presupuestos Generales del Estado para el año 2021 supuso un primer paso en la diferenciación en el tratamiento fiscal de los instrumentos de previsión social empresarial (segundo pilar del sistema de pensiones) y los de previsión individual (tercer pilar), que se consolida ahora con la nueva regulación sustantiva de los fondos de pensiones de empleo de promoción pública. Esta diferenciación en el tratamiento fiscal se mantiene en la Ley 22/2021, de 28 de diciembre, de Presupuestos Generales del Estado para 2022.

La necesidad de introducir reformas para potenciar la previsión social de carácter empresarial en el sistema privado de pensiones se explica fundamentalmente por razones de eficacia en relación con los objetivos que se pretenden y por la estructura del mercado de planes de pensiones, con un menor desarrollo de los planes de pensiones de empleo respecto de los planes del sistema individual, a lo largo de los años, el patrimonio gestionado en los fondos de pensiones de empleo ha perdido peso relativo respecto del total de fondos de pensiones

El Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia, aprobado por el Consejo de Ministros del 27 de abril de 2021 y presentado ante la Comisión Europea en el marco de la iniciativa NextGenerationEU, para la recuperación de la economía, contempla entre sus líneas de acción el que se ha denominado componente 30, «Sostenibilidad a largo plazo del sistema público de pensiones en el marco del Pacto de Toledo», cuya reforma 5 se refiere a la revisión y el impulso de los sistemas complementarios de pensiones. Dicha reforma prevé la aprobación de un nuevo marco jurídico que impulse los planes de pensiones de empleo y contemple la promoción pública de fondos de pensiones permitiendo dar cobertura a colectivos de trabajadores sin planes de empleo en sus empresas o a autónomos, así como aumentar la cobertura de los planes de pensiones de empleo acordados mediante negociación colectiva, preferentemente sectorial.

En este marco, se aprobó la Ley 12/2022, de 30 de junio, de regulación para el impulso de los planes de pensiones de empleo, por la que se modifica el texto refundido de la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones, que persigue fomentar la potenciación de la previsión social complementaria de corte profesional a partir del desarrollo de los planes de pensiones de empleo, con un fuerte anclaje en la negociación colectiva sectorial, facilitando así el acceso a colectivos que, hasta ese momento, encontraban dificultades para acceder a los mismos. Dicha Ley recoge, como nuevas figuras dentro del marco de la previsión social complementaria en España, los fondos de pensiones de empleo de promoción pública abiertos y los planes de pensiones de empleo simplificados, que se pueden adscribir a estos fondos y que cuentan con un sistema menos complejo de promoción que el vigente hasta dicho momento, orientado a facilitar la generalización de los mismos.

Posteriormente se aprobó el Real Decreto 885/2022, de 18 de octubre, por el que se modifica el Reglamento de planes y fondos de pensiones, aprobado por el Real Decreto 304/2004, de 20 de febrero, para el impulso de los planes de pensiones de empleo, desarrollando reglamentariamente la referida Ley 12/2022, de 30 de junio, para su efectiva puesta en práctica. Se completa el desarrollo reglamentario con el Real Decreto 668/2023, de 18 de julio, por el que se modifica el Reglamento de planes y fondos de pensiones, aprobado por el Real Decreto 304/2004, de 20 de febrero, para el impulso de los planes de pensiones de empleo.

Naturaleza

Los planes de pensiones son instituciones de previsión social complementaria, de naturaleza contractual, en los que se fijan las condiciones, características y estructura jurídica de un programa de ahorro-pensión para que las personas en cuyo favor se constituye, tengan derecho a recibir rentas o capitales por jubilación u otras contingencias, como la invalidez y el fallecimiento, regulándose los derechos y obligaciones de los partícipes y de los promotores. Se constituyen voluntariamente, son de carácter privado y sus prestaciones no son sustitutivas, aunque podrían ser complementarias, de las del régimen correspondiente de la Seguridad Social.

Viene recogida en el art. 1 del Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones.

Queda reservada la denominación de "plan de pensiones", así como sus siglas, a los regulados en los Capítulos I a III de su Ley reguladora, sin perjuicio de los previstos en la Sección segunda de su Capítulo X, sujetos a la legislación de otros Estados miembros."

Elementos personales

Son (Art, 2 del Rglto PP y FF de PP):

- El promotor del plan: tiene tal consideración cualquier empresa, sociedad, entidad, corporación, asociación o sindicato que promueva su creación o participe en su desenvolvimiento.
- Los partícipes: tienen esta consideración las personas físicas en cuyo interés se crea el plan, con independencia de que realicen o no aportaciones.
- Los beneficiarios, entendiéndose por tales las personas físicas con derecho a la percepción de prestaciones, hayan sido o no partícipes.

Clases de planes

Distingue el Reglamento de PP y FF PP las siguientes modalidades de planes de pensiones:

En razón de los sujetos constituyentes:

- Sistema de empleo: corresponde a los planes cuyo promotor sea cualquier entidad, corporación, sociedad o empresa y cuyos partícipes sean los empleados de los mismos.

  En los planes de este sistema el promotor sólo podrá serlo de uno, al que exclusivamente podrán adherirse como partícipes los empleados de la empresa promotora. La condición de partícipes también podrá extenderse a los socios trabajadores y de trabajo en los planes de empleo promovidos en el ámbito de las sociedades cooperativas y laborales, en los términos que reglamentariamente se prevean.

  Asimismo, el empresario individual que emplee trabajadores en virtud de relación laboral podrá promover un plan de pensiones del sistema de empleo en interés de éstos, en el que también podrá figurar como partícipe.

  En este sistema de empleo se encuentran los "planes de promoción conjunta" promovidos conjuntamente por varias empresas.

Dentro de un mismo plan de pensiones del sistema de empleo será admisible la existencia de subplanes. La integración del colectivo de trabajadores o empleados en cada subplan y la diversificación de las aportaciones del promotor se deberá realizar conforme a criterios establecidos mediante acuerdo colectivo o disposición equivalente o según lo previsto en las especificaciones del plan de pensiones.

Las empresas deberán negociar y, en su caso, acordar con los representantes legales de las personas trabajadoras sistemas de previsión social de empleo en la forma que se determine en la legislación laboral.

- Sistema asociado: corresponde a planes cuyo promotor o promotores sean cualesquiera asociaciones o sindicatos, gremio o colectivo, siendo partícipes sus asociados y miembros. Estos entes asociativos o colectivos deberán estar delimitados por alguna característica común distinta al propósito de configurar un Plan de Pensiones.
- Sistema individual: El promotor son una o varias Entidades de carácter financiero (Entidades: Bancos, Cajas de Ahorro, Confederación Española de Cajas de Ahorro, Cooperativas de Crédito, Entidades aseguradoras, etc.) y los partícipes son cualquier persona física, a excepción de los propios empleados de la Entidad y sus parientes, hasta el tercer grado incluido.

En los planes de empleo y asociado se constituirá una comisión de control del plan, representativa de sus elementos personales, cuyo funcionamiento se ajustará a lo previsto en este reglamento.

En razón de las obligaciones estipuladas

- Planes de prestación definida, en los que se define como objeto la cuantía de las prestaciones a percibir por los beneficiarios. La definición podrá ser absoluta o en función de alguna magnitud: salarios, antigüedad en la empresa, etc.
- Planes de aportación definida. El objeto definido es la cuantía de la contribución de la entidad promotora y, en su caso, de los partícipes al Plan. La aportación podrá fijarse en términos absolutos o en función de otras magnitudes. En esta modalidad las prestaciones se cuantificarán en el momento de producirse la contingencia, como resultado de capitalización desarrollada por el Plan de Pensiones.
- Planes mixtos, cuyo objeto es, simultáneamente, la cuantía de la prestación y la cuantía de la contribución.

Los planes de los sistemas de empleo y asociados podrán ser de cualquiera de las tres modalidades anteriores y los del sistema individual sólo de la modalidad de aportación definida.

Principios

Los planes de pensiones deberán cumplir cada uno de los siguientes principios básicos:

- No discriminación: los planes de pensiones deberán garantizar el acceso como partícipe de un plan a cualquier persona física que reúna las condiciones de vinculación o de capacidad de contratación con el promotor que caracterizan cada tipo de contrato.
- Capitalización: los planes de pensiones se instrumentarán mediante sistemas financieros o actuariales de capitalización. En consecuencia, las prestaciones se ajustarán estrictamente al cálculo derivado de tales sistemas.
- Irrevocabilidad de aportaciones: las contribuciones de los promotores a los planes de pensiones tendrán el carácter de irrevocables.
- Atribución de derechos: las contribuciones y aportaciones a los planes de pensiones y el sistema de capitalización utilizado determinan para los partícipes unos derechos de contenido económico destinados a la consecución de las prestaciones en los términos previstos en la Ley reguladora.
- Integración obligatoria en un fondo de pensiones: las contribuciones de los promotores y las aportaciones de los partícipes, y cualesquiera recursos adscritos al plan de pensiones, se integrarán obligatoriamente en un fondo de pensiones en los términos fijados en la Ley reguladora.

Son características comunes básicas de los planes de pensiones: su supervisión por la Comisión de control propia de cada plan de pensiones y la limitación de aportaciones.

3. Especificaciones del plan de pensiones

Las especificaciones de un plan de pensiones son las reglas que definen los derechos y obligaciones de los beneficiarios y los contribuyentes. Estas reglas establecen las condiciones para percibir rentas o capitales por diferentes contingencias como jubilación, supervivencia, viudedad, orfandad o invalidez. También determinan la constitución y funcionamiento del patrimonio destinado al cumplimiento de los derechos. El Plan de Pensiones de la Administración General del estado tiene sus propias especificaciones que se publican y actualizan periódicamente.

El Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones, recoge las especificaciones en su art. 6, por el que se establece que los planes de pensiones deberán precisar, necesariamente, los aspectos siguientes:

- Determinación del ámbito personal del plan, así como su modalidad.

- Normas para la constitución y funcionamiento de la comisión de control del plan en el caso de planes de pensiones de empleo y asociados.
- Sistema de financiación.
- Adscripción a un fondo de pensiones, constituido o a constituir, según lo regulado en la Ley.
- Definición de las prestaciones y normas para determinar su cuantía, con indicación de si las prestaciones son o no revalorizables y, en su caso, la forma de revalorización.
- Derechos y obligaciones de los partícipes y beneficiarios, contingencias cubiertas, así como, en su caso, la edad y circunstancias que generan el derecho a las prestaciones, forma y condiciones de éstas.
- Causas y circunstancias que faculten a los partícipes a modificar o suspender sus aportaciones y sus derechos y obligaciones en cada caso.
- Normas relativas a las altas y bajas de los partícipes.
- Requisitos para la modificación del plan y procedimientos a seguir para la adopción de acuerdos al respecto.
- Causas de terminación del plan y normas para su liquidación.
- Previsión del procedimiento de transferencia de los derechos consolidados correspondientes al partícipe que, por cambio de colectivo laboral o de otra índole, altere su adscripción a un plan de pensiones.

La modificación de las especificaciones de los planes de pensiones del sistema asociado y de empleo se podrá realizar mediante los procedimientos y acuerdos previstos en aquéllas.

En los planes de pensiones del sistema de empleo las especificaciones podrán prever que la modificación del régimen de prestaciones y aportaciones o cualesquiera otros extremos pueda ser acordada mediante acuerdo colectivo entre la empresa y la representación de los trabajadores.

Las especificaciones de los planes de pensiones del sistema individual podrán modificarse por acuerdo del promotor, previa comunicación, con al menos un mes de antelación a los partícipes y beneficiarios.

Como anexo a las especificaciones de los planes de pensiones que contemplen prestaciones definidas para todas o alguna de las contingencias o prestaciones causadas o garanticen el resultado de la inversión o un nivel determinado de las prestaciones, se elaborará una base técnica, que deberá efectuarse por un actuario de seguros conforme a la normativa y disposiciones aplicables.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 51. Instrumentación de los compromisos por pensiones de las empresas con sus trabajadores. Régimen general. Instrumentación a través de planes de pensiones. Instrumentación a través de seguros colectivos, incluidos planes de previsión social empresarial. Régimen especial de las entidades financieras. Previsión social complementaria del personal al servicio de las administraciones, entidades y empresas públicas.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Instrumentación de los compromisos por pensiones de las empresas con sus trabajadores. Régimen general

Antecedentes y marco normativo

La Ley 30/1995, de 8 de noviembre, de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (en adelante, LOSSP o Ley 30/1995), introdujo importantes modificaciones en el articulado de la -entonces vigente- Ley 8/1987, de 8 de junio, de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones (en adelante, LPFP o Ley 8/1987), dando un nuevo contenido -entre otros preceptos- a su disposición adicional primera, pretendiendo adaptar nuestro derecho nacional a lo dispuesto en el artículo 8 de la Directiva 80/987/CEE, de 20 de octubre de 1980, sobre Aproximación de las Legislaciones de los Estados Miembros relativas a la Protección de los Trabajadores Asalariados en caso de Insolvencia del Empresario.

Así, la LOSSP (30/1995), configuró a nivel legal el régimen de protección de los compromisos por pensiones de las empresas con los trabajadores, jubilados y beneficiarios, incluyendo las prestaciones ya causadas, así como el proceso de adaptación al mismo; lo que se conoce, en su conjunto, como «régimen de exteriorización».

Pues bien, la DA 1ª del TR de la Ley de Planes y Fondos de Pensiones, aprobado por el RD-Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre (en adelante, TRLPFP), establece, con vocación de permanencia, que los compromisos de las empresas con sus trabajadores y beneficiarios deben instrumentarse mediante planes de pensiones o contratos de seguros, no admitiendo la cobertura de tales compromisos mediante fondos internos o instrumentos similares que supongan retener la titularidad de los recursos constituidos por parte de la empresa, imponiéndose la exteriorización con la finalidad de proteger los compromisos por pensiones en caso de insolvencia o de dificultades financieras de la empresa.

La ampliación del deber legal de exteriorizar los compromisos por pensiones asumidos por las empresas a los existentes en el momento de la entrada en vigor de la LOSSP llevó a prever un periodo transitorio de acomodación o adaptación, que se mantendría, en cuanto referencia normativa, como mínimo en los diez años siguientes, siendo extensible incluso hasta quince años o más, en determinados supuestos excepcionales.

Este régimen general mantiene una excepción, aunque transitoria, para las entidades del sector financiero: entidades de crédito, entidades aseguradoras y las sociedades y agencias de valores, dado que estas entidades actúan en sectores regulados y sometidos a la supervisión de un órgano de control, lo cual redunda en la garantía de solvencia que se persigue, considerando, además, que estas entidades son especialistas y concentran su actividad típica, precisamente, en la administración y gestión de fondos y, en su caso, en la valoración y cobertura de riesgos.

Este marco jurídico legal se completó a nivel reglamentario por el RD 1588/1999, de 15 de octubre, que aprueba el Reglamento sobre la Instrumentación de los Compromisos por Pensiones de las Empresas con sus Trabajadores y Beneficiarios (en adelante, RICP).

Este RD inicia un proceso que supondrá un hito en la previsión complementaria de carácter empresarial en nuestro país, tanto en lo que se refiere a planes de pensiones como a seguros que instrumenten compromisos por pensiones ya sean formalizados mediante póliza o a través de reglamento de prestaciones en el caso de mutualidades de previsión social. Desarrolla la D.A. 1ª de la Ley 8/1987 y las D.T. 14ª y 15ª, de la Ley 30/1995, (estas últimas conocidas como régimen de adaptación o acomodación de los compromisos por pensiones o régimen de externalización. Se regula, en definitiva, una de las piezas clave del sistema global de previsión social.

El capítulo I es de carácter general sobre la obligación de instrumentar y, en su caso, adaptar los compromisos por pensiones de las empresas mediante planes de pensiones o seguros colectivos. Por tanto, en este capítulo se desarrollan únicamente los elementos comunes a ambos instrumentos, planes de pensiones y seguros. Tiene carácter permanente.

El resto de los capítulos están destinados a los diferentes instrumentos y a las entidades exceptuadas.

Así, el capítulo II versa sobre la adaptación de los compromisos por pensiones a través de planes de pensiones, tiene, por tanto, un carácter transitorio y en él se incluyen todos los elementos propios de la adaptación realizada mediante planes de pensiones, entre otros: plan de reequilibrio, trasvase de fondos constituidos, amortización del déficit, régimen jurídico, cuantificación y limitación de los derechos por servicios pasados.

El capítulo III se refiere a la instrumentación de los compromisos por pensiones mediante contratos de seguros. Este capítulo desarrolla, fundamentalmente en su sección 1.ª, los aspectos de la disposición adicional primera que se refieren a los seguros y, en consecuencia, tiene un carácter permanente. Únicamente la sección 2.ª de este capítulo tiene carácter transitorio, ya que desarrolla las condiciones que se deben cumplir para adaptar los seguros preexistentes y los compromisos aún no adaptados, bien sea directamente o a través del plan de financiación previsto para facilitar la adaptación de los compromisos mediante contratos de seguros.

El Capítulo IV desarrolla el régimen excepcional transitorio de las entidades de crédito, entidades aseguradoras y de las sociedades y agencias de valores.

Compromisos por pensiones

Concepto

En primer término, conviene matizar el significado preciso de la expresión «compromisos por pensiones», señalando la D A Primera del TRLPFP que: *«se entenderán compromisos por pensiones los derivados de obligaciones legales o contractuales del empresario con el personal de la empresa y vinculados a las contingencias establecidas en el apartado 6 del artículo 8»,* añadiendo que *«tales pensiones podrán revestir las formas establecidas en el apartado 5 del artículo 8 y comprenderán toda prestación que se destine a la cobertura de tales compromisos, cualquiera que sea su denominación».*

Los compromisos por pensiones derivan de obligaciones legales o contractuales de la empresa con su personal, incluyendo las recogidas en convenio colectivo o disposición equivalente» (art. 7.1 RICP), considerando, en definitiva, que toda manifestación de voluntad del empresario con uno o varios de sus trabajadores puede ser fuente de compromisos por pensiones, ya sea mediante acuerdo contractual, como una de las estipulaciones del contrato de trabajo [art. 3.1.c) LET], o por decisión unilateral –motu proprio– del empresario de establecer un sistema de pensiones privado.

Para completar la definición hay que acudir a otros preceptos de la propia Ley, así, las contingencias cubiertas y la forma de las prestaciones asumidas.

Contingencias cubiertas (art. 8.5 TRLPF)

Según la definición legal, las aportaciones realizadas o las prestaciones incorporadas a los compromisos por pensiones tienen que estar vinculadas a cualquiera de las contingencias enumeradas en el artículo 8.6 del TRLPFP:

- Jubilación, entendida como el cese definitivo en la relación laboral por cumplimiento de una determina edad, para lo que «se estará a lo previsto en el régimen de la Seguridad Social correspondiente» [art. 8.6.a) TRLPFP].
- Incapacidad permanente. También para la determinación de estas situaciones se estará a lo previsto en el régimen de la Seguridad Social correspondiente [art. 8.6.b) TRLPFP].
- Muerte del partícipe o beneficiario, que puede generar derecho a prestaciones de viudedad, orfandad o a favor de otros herederos o personas designadas.
- Dependencia severa o gran dependencia del partícipe.

Naturaleza y forma de las prestaciones

Serán sólo prestaciones económicas en cualquiera de las siguientes formas:

- prestación en forma de capital, consistente en una percepción de pago único, que podrá hacerse efectivo de modo inmediato a la fecha de la contingencia o diferido a un momento posterior;
- prestación en forma de renta, esto es, la percepción de dos o más pagos sucesivos con periodicidad regular cuya cuantía puede ser constante o variable y su abono inmediato a la fecha de la contingencia o diferido a un momento posterior; o,
- mixtas, que combinen rentas de cualquier tipo con un único cobro en forma de capital (arts. 8.5 TRLPFP y 10.1 RPFP).

Ámbito subjetivo

Empresas

Los compromisos por pensiones asumidos por las empresas, incluyendo las prestaciones causadas, deberán instrumentarse, desde el momento en que se inicie el devengo de su coste, mediante contratos de seguros, a través de la formalización de un plan de pensiones o de ambos (art. 1 RICP)

En definitiva, cualquier empresa que tenga asumidos o asuma compromisos por pensiones con su personal, desde el momento en que se inicie el devengo de su coste, está obligada a formalizarlos mediante contratos de seguro que reúnan determinados requisitos, por medio de un plan de pensiones del sistema de empleo, o de ambos instrumentos simultáneamente. La obligación recae exclusivamente sobre el empresario, como verdadero deudor.

En este concreto ámbito de regulación, «tienen la consideración de empresas no sólo las personas físicas y jurídicas sino también las comunidades de bienes y demás entidades que, aun carentes de personalidad jurídica, sean susceptibles de asumir con sus trabajadores los compromisos descritos» (disp. adic. primera, párrafo tercero, TRLPLF).

El RICP matiza el concepto, refiriéndose «a las personas jurídicas, cualquiera que sea su naturaleza, que tengan nacionalidad española, domicilio en territorio nacional o cuyo principal establecimiento o explotación radique en el mismo, así como a las personas físicas, en cuanto asuman con sus trabajadores compromisos por pensiones» (art. 5.1 RICP).

Las empresas del sector público

En el ámbito del sector público merecen la calificación de empresa «las entidades públicas empresariales y las sociedades mercantiles en cuyo capital participen, directa o indirectamente, las Administraciones públicas o entidades u organismos vinculados o dependientes de las mismas» (art. 5.2 RICP).

Del tenor literal del Reglamento se infiere que las Administraciones públicas, en cuanto empresario que contrata trabajadores, no tienen la consideración de empresa obligada a exteriorizar sus compromisos por pensiones, aun cuando la disposición adicional primera del TRLPFP nada explicita sobre las mismas.

Aunque de facto se incorpora una nueva exclusión a la obligación de exteriorizar los compromisos por pensiones, la Administración, mediante acuerdo colectivo, puede instrumentar los compromisos por pensiones o, incluso, tomar esa iniciativa unilateralmente, pues ambas alternativas permiten la disposición final segunda del TRLPFP, como veremos en el último apartado de este tema.

Personal afectado

- La instrumentación de los compromisos por pensiones afectará a los compromisos asumidos por la empresa con su personal activo. A estos efectos, tendrá la consideración de personal activo toda persona física que voluntariamente presta sus servicios retribuidos por cuenta de la empresa en virtud de relación laboral comprendida en el ámbito de aplicación del Estatuto de los Trabajadores, incluidas las relaciones de carácter especial, siempre que dicha relación laboral esté sometida a la legislación española. Asimismo, se incluirán dentro de este concepto de personal activo:
  - Los trabajadores de una empresa en situación de excedencia o suspensión de contrato cuando la empresa haya asumido compromisos con dicho personal.
  - Los trabajadores con los que la empresa mantenga compromisos por pensiones, aun cuando se haya extinguido la relación laboral con los mismos.
- La instrumentación de los compromisos por pensiones afectará, igualmente, a las obligaciones asumidas por la empresa respecto a jubilados y beneficiarios.

2. Instrumentación a través de planes de pensiones

Los Planes de Pensiones son productos de ahorro a largo plazo, se constituyen de forma voluntaria y que tienen un carácter finalista, su finalidad es proporcionar a los partícipes prestaciones económicas en caso de jubilación, viudedad, supervivencia, orfandad, incapacidad permanente, dependencia, enfermedad grave, desempleo de larga duración y fallecimiento. Estas prestaciones dependerán del capital aportado y de los rendimientos obtenidos por el Fondo de Pensiones en el que se integre el Plan de Pensiones.

Los planes de pensiones de empleo son planes de pensiones promovidos por la empresa, de los cuales participan los empleados y los beneficiarios son aquellas personas en cuyo favor se generan las prestaciones.

Son sus principios básicos:

- No discriminación: El plan del sistema de empleo será no discriminatorio. La no discriminación se entenderá referida al derecho del trabajador de acceder al plan y a la percepción de las contribuciones empresariales establecidas desde la incorporación al plan en tanto exista relación laboral con el promotor. Si bien, la no discriminación en el acceso al plan del sistema de empleo será compatible con la diferenciación de aportaciones del promotor correspondientes a cada partícipe y con la aplicación de regímenes diferenciados de aportaciones y prestaciones y con la articulación de subplanes dentro del mismo plan, todo ello conforme a criterios derivados de acuerdo colectivo o disposición equivalente.

- Capitalización: los planes de pensiones se instrumentarán mediante sistemas financieros o actuariales de capitalización. En consecuencia, las prestaciones se ajustarán estrictamente al cálculo derivado de tales sistemas.
- Irrevocabilidad de aportaciones: las contribuciones de los promotores a los planes de pensiones tendrán el carácter de irrevocables.
- Atribución de derechos: las contribuciones y aportaciones a los planes de pensiones y el sistema de capitalización utilizado determinan para los partícipes unos derechos de contenido económico destinados a la consecución de las prestaciones en los términos previstos en la Ley reguladora.
- Integración obligatoria en un fondo de pensiones: las contribuciones de los promotores y las aportaciones de los partícipes, y cualesquiera recursos adscritos al plan de pensiones, se integrarán obligatoriamente en un fondo de pensiones en los términos fijados en la Ley reguladora.

Los sujetos constituyentes en los planes de empleo son el promotor o promotores y los partícipes. El promotor podrá serlo de uno, al que exclusivamente podrán adherirse como partícipes los empleados de la empresa promotora.

En ningún caso podrá simultanearse la condición de promotor de un plan de pensiones del sistema de empleo y la condición de tomador de un plan de previsión social empresarial.

Asimismo, el empresario individual o profesional independiente, que emplee trabajadores en virtud de relación laboral, podrá promover un plan de pensiones del sistema de empleo en interés de éstos en el que también podrá figurar como partícipe. A tal efecto, el promotor del plan deberá ser el propio empresario individual persona física que figure como empleador en el contrato laboral con los trabajadores partícipes.

Varias empresas o entidades, incluidos los empresarios individuales, podrán promover conjuntamente un plan de pensiones de empleo en el que podrán instrumentar los compromisos susceptibles de ser cubiertos por aquél.

Se consideran empleados a los trabajadores por cuenta ajena o asalariados, en concreto, al personal vinculado al promotor por relación laboral, incluido el personal con relación laboral de carácter especial independientemente del régimen de la Seguridad Social aplicable, así como, en su caso, al personal de las Administraciones y entes públicos promotores vinculado por relación de servicios dependiente regulada en normas estatutarias o administrativas. Asimismo, tendrán tal consideración, a los efectos del ámbito personal de los planes de pensiones de empleo, los consejeros y administradores incluidos en el régimen general de la Seguridad Social como asimilados a los trabajadores por cuenta ajena en los términos establecidos en el artículo 136.2.c) del texto refundido de la Ley General de la Seguridad Social.

Las especificaciones del plan podrán prever la incorporación a éste como partícipes de trabajadores que con anterioridad hubieran extinguido la relación laboral con el promotor respecto de los cuales éste mantenga compromisos por pensiones que se pretendan instrumentar en el plan de pensiones.

Se constituirá una comisión de control del plan, representativa de sus elementos personales -representantes de la compañía y de los partícipes- cuyo funcionamiento se ajustará a lo previsto en el Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones. Siendo ésta una de las grandes diferencias respecto a las otras modalidades que instrumentan los compromisos por pensiones. Dicha comisión es, además, obligatoria por ley. Por otro lado, en los planes de pensiones de empleo la estrategia de inversión es única y la decide la comisión de control del plan.

Tanto empresario como trabajador pueden realizar aportaciones en distinta proporción en función de lo acordado, y también es posible que sea solo la empresa quien alimente esa bolsa. Las contribuciones y aportaciones a los planes de pensiones se ajustarán a los límites señalados por la normativa vigente.

Dentro de un mismo plan de pensiones del sistema de empleo será admisible la existencia de subplanes, la diversificación de las aportaciones del promotor se deberá realizar conforme a criterios establecidos mediante acuerdo colectivo o disposición equivalente o según lo previsto en las especificaciones del plan de pensiones.

Los derechos consolidados de los partícipes en los planes de pensiones del sistema de empleo no podrán movilizarse a otros planes de pensiones o a planes de previsión asegurados o a planes de previsión social empresarial, salvo en los siguientes supuestos:

- extinción de la relación laboral siempre que no lo impidan expresamente las especificaciones del plan
- por terminación del plan de pensiones

Los derechos económicos de los beneficiarios en los planes de empleo no podrán movilizarse salvo por terminación del plan de pensiones.

Novedades normativas

El pasado 1 de julio de 2022 entro en vigor la Ley 12/2022, de 30 de junio, de regulación para el impulso de los planes de pensiones de empleo, por la que se modifica el texto refundido de la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones. Entre los aspectos que recoge, uno en particular -la reducción de cuotas en seguros sociales por aportaciones a planes de empleo- empieza a aplicar a partir del 1 de enero de 2023. Esta norma trae de la mano novedades que buscan impulsar el uso de estos planes en España, a través de dos líneas de actuación:

- Un incremento de las ventajas fiscales de los planes de empleo, tanto para empresarios como para trabajadores.
- La creación de los fondos de pensiones de empleo de promoción pública abiertos y los planes de pensiones de empleo simplificados.

Ambos instrumentos tratan de simplificar la creación y gestión de estos planes.

3. Instrumentación a través de seguros colectivos, incluidos planes de previsión social empresarial

De acuerdo con la DA primera TRLPFP, la instrumentación de los compromisos por pensiones a través de contratos de seguros deberá revestir la forma de seguro colectivo sobre la vida, plan de previsión social empresarial o seguro colectivo de dependencia, en los que la condición de asegurado corresponderá al trabajador y la de beneficiario a las personas en cuyo favor se generen las pensiones según los compromisos asumidos.

Seguros colectivos

Los seguros colectivos de vida son soluciones flexibles que pueden ir destinadas a un colectivo concreto dentro de la empresa y no tienen por qué estar abiertas a todos los empleados. Son similares a los PPSE en que el control lo efectúa la propia empresa y en que es esta también la que hace las funciones de tomador del seguro.

Sin embargo, el seguro colectivo de vida no tiene límite de aportación y los derechos en caso de baja dependen de los compromisos adquiridos con los empleados. Además, no tienen por qué cubrir los llamados supuestos excepcionales de liquidez, aunque sí cubren las contingencias habituales (jubilación, fallecimiento, incapacidad…)

En cuanto a la estrategia de inversión, es la empresa, como tomador del seguro, la que decide esta estrategia, que será única para todos los empleados que forman parte al seguro colectivo de vida. Puede escogerse entre modalidades de inversión con rentabilidad garantizada, o bien modalidades de inversión en que el riesgo de inversión sea asumido por la empresa (unit linked).

Usos más habituales

- Instrumentar los compromisos por pensiones con personal directivo.

- Canalizar los excesos de aportación sobre la aportación máxima a Planes de Pensiones de Empleo o a los PPSE.
- Para instrumentar los compromisos por pensiones (las aportaciones para Jubilación) derivados de Planes de Retribución Flexible.
- También se utilizan para instrumentar premios de jubilación, normalmente derivados de convenio colectivo.

Características de los seguros colectivos de jubilación

- Modalidad: Habitualmente son Seguros de Vida Mixtos, en el sentido de que cubren tanto la supervivencia (jubilación, invalidez y dependencia) como el fallecimiento.
- Contingencias cubiertas: Se suelen cubrir las mismas contingencias, que dan derecho a prestación, que en los Planes de Pensiones: Jubilación, Invalidez permanente total, absoluta y gran invalidez, fallecimiento, dependencia severa y gran dependencia
- Forma de Cobro de las prestaciones: capital único, renta periódica actuarial temporal o vitalicia, mixto: (parte en forma de capital único parte en forma de renta periódica), o disposiciones parciales no regulares, si así lo recogiese el condicionado del seguro.

Tipos de compromiso por pensiones que se pueden instrumentar a través de los Seguros Colectivos de Jubilación

- En función del tipo de obligación asumida, podemos distinguir entre:
    - Compromisos de aportación definida: el elemento garantizado son las aportaciones que la empresa se compromete a hacer a favor del empleado y, si fuera el caso, las que ha de realizar el empleado. Las aportaciones realizadas más rendimientos generados durante el periodo de vigencia (menos los gastos de gestión aplicados por la compañía de seguros y los gastos externos de intermediarios) constituirán la prestación que se abonará al empleado cuando ocurra la contingencia.
    - Compromisos de Prestación definida: la empresa se compromete a abonar las aportaciones que sean necesarias para que llegado el momento de la ocurrencia de la contingencia (por ejemplo, la jubilación) se pueda pagar la prestación garantizada.
    - Si hubiera déficit y las aportaciones realizadas no fuesen suficientes para cubrir las prestaciones garantizadas, la empresa está obligada a realizar las aportaciones adicionales que fueran necesarias.
    - Compromisos Mixtos o híbridos: Combinan los dos anteriores, por ejemplo, aportación definida para jubilación y prestación definida para fallecimiento e invalidez.

- En función de quien asume la obligación de realizar las aportaciones:
    - Contributivos: contribuyen al Seguro Colectivo de Jubilación tanto la empresa como el empleado, que está obligado a realizar su aportación si quiere beneficiarse de la aportación de la empresa.
    - No contributivos: es la empresa la única que realizará aportaciones (la mayor parte).
- En función de quien asume el riesgo de la inversión:
    - Unit linked: el tomador (empleador) asume riesgo de la inversión (y por lo tanto las potenciales perdidas). Indirectamente son los empleados asegurados los que están asumiendo el riesgo de la inversión, ya que esta modalidad de Unit Linked únicamente se puede utilizar para compromisos por pensiones de aportación definida o mixtos (con aportación definida para el caso de jubilación).
    - Garantizados: la empresa tomadora y los asegurados no asumen el riesgo de la inversión, sino la compañía de seguros que se obliga como mínimo a garantizar como prestación final el cobro por parte de los beneficiarios del 100% de las aportaciones realizadas y normalmente también garantiza un tipo de interés mínimo vinculado a una referencia o índice (por ejemplo, el tipo de interés fijado Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones para cálculo provisiones de seguros de vida).

Derecho de rescate en los Seguros Colectivos de Jubilación

Sólo podrá ejercerse en los siguientes supuestos:

- Para mantener en la póliza la adecuada cobertura de los compromisos vigentes en cada momento.
- Para la integración de todos o parte de los compromisos instrumentados en la póliza en otro contrato de seguro o en un plan de pensiones promovido por la empresa.
- En caso de cese o extinción de la relación laboral del asegurado.
- En los casos de desempleo de larga duración y enfermedad grave en los términos establecidos en la regulación de planes y fondos de pensiones.

En los dos primeros casos el derecho de rescate corresponderá a la empresa tomadora (sin perjuicio de los derechos que pudieran corresponder a los trabajadores) y en los dos segundos podrá hacerse a favor del trabajador.

El derecho de rescate se ve influido y a la vez influye en la imputación fiscal o no de las primas de los Seguros Colectivos de Jubilación. A este respecto, podemos distinguir las dos siguientes situaciones:

- Seguros Colectivos de Jubilación sin imputación fiscal de primas: En tal caso no existirá derecho de rescate anticipado a favor del empleado: las aportaciones (primas pagadas) son ilíquidas. No obstante, la empresa tomadora puede renunciar a su derecho de rescate (ha de hacerlo expresamente en la póliza del contrato de seguro).
- Seguros Colectivos de Jubilación con imputación fiscal de las primas. Si se optase por la imputación fiscal de las primas a los empleados asegurados, sí existiría derecho de rescate por parte de estos, en los términos recogidos en la póliza del contrato de seguro (condiciones particulares), aunque únicamente en los supuestos mencionados anteriormente.

Plan de Previsión Social Empresarial

Dentro de la forma jurídica de Seguros de Vida, para instrumentar los compromisos por pensiones por jubilación estarían los Planes de Previsión Social Empresarial (PPSE).

Los Planes de Previsión Social Empresarial garantizan a los trabajadores un capital disponible en el momento de la jubilación y unas importantes coberturas en caso de fallecimiento o invalidez hasta ese momento. Se trata de un producto de previsión social que permite a las empresas instrumentar compromisos por pensiones con sus empleados en condiciones muy parecidas a las que ofrecería un Plan de Pensiones.

Es incompatible en la misma empresa con un plan de pensiones de empleo, pero sí compatible con un seguro colectivo de instrumentación de compromisos por pensiones.

Similitudes con los Planes de Pensiones

Los Planes de Previsión Social Empresarial (PPSE) se regirán por los mismos principios que los Planes de Pensiones:

- No discriminación: La empresa debe garantizar que podrá incorporarse al PPSE cualquier empleado, aunque los niveles de aportaciones pueden ser distintos para las diferentes categorías profesionales.
- Capitalización: se instrumentarán mediante sistemas financieros y actuariales de capitalización.
- Irrevocabilidad de aportaciones: las aportaciones realizadas no pueden "deshacerse" para ser devueltas a la empresa.
- Atribución de derechos: La titularidad de los recursos patrimoniales afectos a cada plan corresponderá a los empleados y sus beneficiarios, y se generará derecho a prestaciones económicas en caso de que se produzca la contingencia de jubilación, fallecimiento, o invalidez en sus diferentes modalidades.
- Inembargabilidad: los derechos en un PPSE no podrán ser objeto de embargo, traba judicial o administrativa hasta el momento en que se cause el derecho a la prestación.

Hasta tal punto comparten régimen jurídico ambos instrumentos, que la propia ley establece una remisión genérica al régimen de los Plan de Pensiones para todos los aspectos no específicamente regulados en el mencionado artículo 51.

Diferencias con los Planes de Pensiones

La primera gran diferencia procede de la forma en la que se atribuye **la rentabilidad.**

Esto es porque, en un Plan de Pensiones, habitualmente, las primas son de aportación definida y, en consecuencia, las prestaciones no están garantizadas. Los derechos consolidados de los partícipes fluctúan conforme se modifica día a día el valor patrimonial del Fondo con la variación del precio de mercado de los activos afectos. Sin embargo, en un PPSE, las aportaciones y las prestaciones están garantizadas y su valor no dependerá de la volatilidad de los mercados financieros.

La segunda gran diferencia se refiere a **su gestión**. Los PPSEs no requieren la constitución de una Comisión de Control con representación de empresa y trabajadores, puesto que ni hay nada que decidir sobre el destino de las aportaciones, ni entidad gestora a la que supervisar dado que no existe riesgo de inversión. Esto hace que este producto sea ideal para empresas de tamaño pequeño y medio que no puedan o no quieran asumir la posible problemática de tener una Comisión de Control.

4. La importancia de la fiscalidad

Aunque es un tema que suele pasar algo más desapercibido, la fiscalidad de cada uno de los vehículos de financiación que hemos visto también es un factor importante a la hora de decidirse por uno u otro. Aquí, las grandes diferencias están entre el seguro colectivo de vida y los otros dos vehículos.

Para la empresa, las aportaciones del plan de pensiones y del PPSE son deducibles en el impuesto de sociedades, mientras que las prestaciones no tienen impacto fiscal. El caso del seguro colectivo es algo más complejo. Las primas imputadas se pueden deducir en el impuesto de sociedades, pero las no imputadas se pueden deducir solo en los ejercicios en que se satisfagan las prestaciones. Si las primas han sido imputadas, las prestaciones no tienen efecto fiscal. Pero si no lo han sido, son deducibles en el momento del cobro de la prestación.

Para el empleado, las prestaciones se consideran rendimientos del trabajo en el caso de los planes de pensiones y los PPSE. En ambos vehículos de financiación, la aportación del empleado y empresa puede utilizarse para minorar la base imponible.

En cuanto a las aportaciones a los seguros colectivos por parte del empleado dependerá de si las aportaciones han sido o no imputadas al empleado. Las primas no imputadas no tienen impacto fiscal, mientras las imputadas son consideradas retribución en especie. Las prestaciones por jubilación e invalidez se consideran rendimiento del trabajo (aunque, en el caso de las primas imputadas, solo se hace con el exceso de prestación sobre el importe de la prima). Las prestaciones por fallecimiento – que recaen sobre los familiares – se ven afectadas por el impuesto de sucesiones (solo en los seguros colectivos, no en los planes de pensiones).

5. Régimen especial de las entidades financieras

La regla general de externalización obligatoria de los compromisos por pensiones que recoge la DT segunda TRLPFP conoce una excepción referida a las entidades de crédito, las entidades aseguradoras y las sociedades y agencias de valores, así, recoge la DT 4ª.2 TRLPFP que «*podrán mantenerse los compromisos por pensiones asumidos mediante fondos internos por las entidades de crédito, las entidades aseguradoras y las sociedades y agencias de valores*».

Realmente, estamos ante una excepción parcial porque su ámbito objetivo se restringe exclusivamente a los compromisos por pensiones ya asumidos con anterioridad a la entrada en vigor de la LOSSP (Ley 30/95), no alcanzando a los compromisos adquiridos por esas mismas entidades después de esa fecha, y su campo subjetivo es muy limitado.

Publicada en el Boletín Oficial del Estado el día 9 de noviembre de 1995, la LOSSP entró en vigor al día siguiente, si bien la vigencia de la disposición transitoria decimocuarta se demoró seis meses más, siendo aplicable desde el día 10 de mayo de 1996. Hasta esta última fecha, las entidades de crédito, aseguradoras y sociedades y agencias de valores pudieron asumir compromisos por pensiones con sus trabajadores, manteniendo sus dotaciones como fondos internos, sin que les afecte a éstos el deber de exteriorización, siempre que cumplan las condiciones del régimen excepcional previsto y exclusivamente para el personal ingresado en la empresa con anterioridad a la fecha de entrada en vigor del RICP.

Entre los argumentos expuestos para justificar la excepción, se afirma que estas entidades «*actúan en sectores regulados y sometidos a la supervisión de un órgano de control, lo cual redunda en la garantía de solvencia perseguida*» y, además, «*son especialistas y concentran su actividad típica, precisamente, en la administración y gestión de fondos y, en su caso, en la valoración y cobertura de riesgos*» (Exposición de Motivos RICP).

El principal argumento para establecer esta excepción es que, precisamente, las entidades de crédito, las entidades de seguro y las agencias y sociedades de valores están sujetas a una rigurosa normativa, ampliada tras la aprobación de la LOSSP, cuyo objeto es garantizar y supervisar la solvencia y gestión de estas entidades, labor que se lleva a cabo por los correspondientes órganos o entes de control o supervisión: Banco de España, Dirección General de Seguros y Comisión Nacional del Mercado de Valores, en cada caso.

La misma DT 4ª.2 del TRPFP matiza que "*Para que dichos fondos internos puedan servir a tal finalidad deberán estar dotados con criterios, al menos, tan rigurosos como los aplicables a los asumidos mediante planes de pensiones y habrán de ser autorizados por el Ministerio de Economía, previo informe del órgano o ente a quien corresponda el control de los recursos afectos, el cual supervisará el funcionamiento de los fondos internos y podrá proponer al Ministerio de Economía la adopción, en su caso, de las medidas correctoras pertinentes, e incluso la revocación de la autorización administrativa concedida, todo ello en los términos que reglamentariamente se establezcan*"

Su desarrollo viene recogido en el Reglamento sobre la instrumentación de los compromisos por pensiones de las empresas con los trabajadores y beneficiarios aprobado por Real Decreto 1588/1999, de 15 de octubre (RICP).

6. Previsión social complementaria del personal al servicio de las administraciones, entidades y empresas públicas

Como ya hemos adelantado, la Disposición Final segunda del TRLPFP, aprobada por Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre autoriza la previsión social complementaria del personal al servicio de las administraciones públicas en los siguientes términos:

Las Administraciones públicas, incluidas las Corporaciones Locales, las entidades, organismos de ellas dependientes y empresas participadas por las mismas podrán promover planes de pensiones de empleo y realizar aportaciones a los mismos, así como a contratos de seguro colectivos, incluidos los formalizados por mutualidades de previsión social empresarial, al amparo de la disposición adicional primera de esta Ley, con el fin de instrumentar los compromisos u obligaciones por pensiones vinculados a las contingencias del artículo 8.6 de esta Ley referidos a su personal funcionario, laboral o estatutario.

Todo ello sin perjuicio de la correspondiente habilitación presupuestaria de que disponga cada entidad o empresa, así como de las posibles autorizaciones previas a las que pudiesen estar sometidas tales aportaciones tanto de carácter normativo como administrativo, para, en su caso, destinar recursos a la financiación e instrumentación de la previsión social complementaria del personal.

Las prestaciones abonadas a través de planes de pensiones o contratos de seguros colectivos, incluidos los formalizados por mutualidades de previsión social empresarial, conforme a esta Disp. Adicional, no tendrán la consideración de pensiones públicas ni se computarán a efectos de limitación del señalamiento inicial o fijación de la cuantía máxima de las pensiones públicas.

Las Cortes Generales y las Asambleas Legislativas de las Comunidades Autónomas podrán promover y realizar aportaciones a planes de pensiones del sistema de empleo, así como a contratos de seguro colectivo de los regulados en la disposición adicional primera de esta Ley, en los que podrán incorporarse como partícipes y asegurados los miembros de las respectivas Cámaras. A estos efectos, la promoción de un plan de pensiones de empleo para dichos miembros podrá realizarse, en su caso, como excepción a lo establecido en el artículo 4.1.a) de esta Ley sobre promoción de un único plan de empleo por cada promotor.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 52. Aspectos financieros y actuariales de los planes y fondos de pensiones. Derechos económicos. Clases de planes. Métodos de evaluación del coste actuarial. Sistemas de asignación de beneficios. Sistemas de asignación de costes. Pasivo actuarial. Balance actuarial de los planes de pensiones.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Introducción

El plan de pensiones es el instrumento de previsión social que permite instrumentar la cobertura de jubilación, supervivencia, orfandad o invalidez. El fondo de pensiones es el patrimonio, sin personalidad jurídica, constituido exclusivamente para dar cumplimiento al plan adscrito a él. Al carecer de personalidad jurídica, deberá ser administrado por una entidad gestora con el concurso de una entidad depositaria.

Los elementos personales que conforman el plan son:

- Sujetos constituyentes:
  - Promotor, que insta a su creación o desenvolvimiento
  - Partícipes: personas físicas en cuyo interés se constituye el plan (realice, o no, aportaciones)
- Beneficiarios: personas físicas con derecho a la percepción de prestaciones, hayan sido, o no, partícipes.

2. Aspectos financieros y actuariales de los fondos de pensiones

Los planes de pensiones se instrumentas mediante sistemas financieros y actuariales de capitalización, que permiten establecer una equivalencia entre aportaciones y prestaciones.

Estos sistemas implican la formación de:

- Fondos de capitalización:
  - se constituyen para aportación definida con una rentabilidad mínima garantizada
  - integrado por aportaciones + rendimientos – gastos operativos
- Provisiones matemáticas:
  - Se constituyen para prestación definida y para rentas vitalicias de cuantía determinada
  - Representan un exceso VAA prestaciones – VAA aportaciones
  - Se establece en el RPFP:
    - Se determinan individualmente para cada miembro del colectivo
    - Se tomarán las bases técnicas empleadas para la valoración del plan
    - Se calculan por contingencia
    - No tienen en cuenta el coste suplementario
    - Si existe aseguramiento parcial, el plan dota la provisión matemática correspondiente al riesgo asumido directamente por el plan
- Margen de solvencia:
  - Patrimonio libre no comprometido

- El de cada plan será independiente de otros planes adscritos al mismo fondo
- Necesario cuando se garantiza la rentabilidad o se garantiza la cuantía de las prestaciones
- Su cuantía mínima se calcula como:

  $$Máx[225.000€; 2\%PM + 2\% \, Fondo \; garantía \; mínimo + 0{,}3\% \, Capitales \; en \; riesgo]$$

  Siendo los capitales en riesgo la diferencia entre la prestación garantizada y la provisión matemática constituida

3. Derechos económicos

Las aportaciones de los partícipes a los planes de pensiones, directas o imputadas, y el sistema financiero-actuarial utilizado, determinan para los citados partícipes unos derechos de contenido económico y unas prestaciones.

Son derechos consolidados de los partícipes:

- En aportación definida, la parte del fondo de capitalización que corresponde al partícipe (aportaciones + rendimientos – gastos)
- En prestación definida, la suma de la provisión matemática y el margen de solvencia correspondientes al partícipe
- En mixtos, siguen las reglas anteriores en función de la modalidad de prestación contemplada en el plan. Cuando sea una contingencia con aportación definida pero garantía mínima garantizada, el derecho es la suma del fondo de capitalización más el margen de solvencia correspondientes al partícipe.

Los partícipes solo pueden hacer efectivos sus derechos consolidades en caso de desempleo de larga duración o enfermedad grave, si las aportaciones realizadas tienen al menos 10 años de antigüedad.

Cuando se produzca el hecho que da lugar a la prestación, esta debe ajustarse al valor de los derechos consolidados (si hay una desviación desfavorable entre los derechos consolidados y la prestación exigible, esta deberá ser soportada por el promotor).

En cuanto a la movilización de los derechos:

- Los derechos de los partícipes pueden movilizarse a otro plan o planes, uno o varios PPA o a un PPSE, por decisión unilateral del partícipe (total o parcialmente) o por terminación del plan.
- Los derechos de los beneficiarios se pueden movilizar total o parcialmente si así se especifica en las condiciones previstas por el plan
- El caso de los PPE es especial, ya que:
  - Los partícipes solo pueden movilizar sus derechos cuando se extinga la relación laboral o por terminación del plan;

- Y los beneficiarios solo podrán por terminación del plan.

Los partícipes que hayan cesado las aportaciones (directas o imputadas) queda como partícipes en suspenso, continuando como elemento personal del Plan.

Cuando el derecho a las prestaciones del partícipe sea objeto de embargo, este será válido y eficaz, pero no se ejecutará hasta que se cause el derecho a la prestación. Si el partícipe embargado es titular de varios planes, serán embargados en primer lugar los planes de pensiones individuales y asociados y luego los de empleo. Lo mismo para los beneficiarios.

4. Clases de planes

Los planes de pensiones se pueden clasificar:

- Según el vínculo entre partícipes:
  - Plan individual:
    - Vínculo: No existe vínculo entre partícipes
    - Promotor: Entidad financiera
    - Aportaciones: Partícipes
    - Modalidad: Aportación definida
    - Sistema: Capitalización individual
  - Plan asociado:
    - Vínculo: Los partícipes pertenecen a una misma organización, asociación o colegio
    - Promotor: Organización
    - Aportaciones: Partícipes
    - Modalidad: Tres modalidades
    - Sistema: Capitalización individual
  - Plan de empleo:
    - Vínculo: Empresa empleadora de los partícipes
    - Promotor: Empresa
    - Aportaciones: Partícipes y promotor
    - Modalidad: Tres modalidades
    - Sistema: Capitalización individual o colectiva
- Según las obligaciones estipuladas, se tienen las siguientes modalidades:
  - Aportación definida: se conoce la aportación y se desconoce la prestación
  - Prestación definida: se conoce la prestación y se desconoce la aportación. En la prestación definida, el análisis actuarial del plan comprende tres elementos fundamentales:

- Estimación del coste actuarial total, ya que constituye la valoración a priori del coste global del plan (el coste real a posteriori dependerá del comportamiento efectivo de las distintas magnitudes):

  Siendo:

  - R_x: la renta anual de jubilación, pagadera en m-ésimos para un partícipe cuya edad actual es x
  - x_j: edad de jubilación
  - T las causas de eliminación

$$CAT = \sum_{\forall x < x_j} R_x \, {}_{x_j - x}E_x^{(T)} \ddot{a}_{x_j}^{(m)} + \sum_{\forall x \geq x_j} R_x \ddot{a}_{x_j}^{(m)}$$

  Con

$${}_{x_j - x}E_x^{(T)} = \frac{D_{x_j}^{(T)}}{D_x^{(T)}}$$

- El método de evaluación del coste actuarial, desarrollado en el siguiente apartado.
- La amortización, si procede, del coste suplementario:
  - Por servicios pasados, pudiendo hacerse de una sola vez o con una amortización en de manera constante o creciente desde la edad actual hasta la edad de jubilación
  - Por desviaciones negativas del comportamiento real de las variables, en cuyo caso se calculará como la diferencia entre la nueva provisión matemática que habría de constituirse para hacer frente a las nuevas obligaciones menos la provisión matemática que ya se tiene constituida.

- Mixto: define la cuantía de la aportación para algunos y la cuantía de la prestación para otros, o define simultáneamente los importes de aportación y prestación.

5. Conceptos relativos al coste actuarial

El análisis actuarial de un plan de pensiones comprende tres elementos: el coste actuarial total, los métodos de evaluación del coste actuarial, y la amortización del coste suplementario, si lo hay.

Coste actuarial total (CAT)

Es el valor actual actuarial de las prestaciones reconocidas en las especificaciones del plan para el conjunto de partícipes y beneficiarios del mismo. Es el valor actual actuarial de las obligaciones por prestaciones futuras no causadas previstas en el plan de pensiones.

Coste normal (CN)

Es el coste resultante para cada año de funcionamiento del plan de pensiones según el método de valoración actuarial fijado en dicho plan y de acuerdo con las hipótesis económicas, financieras y demográficas previstas en el mismo. Dicho de otra manera, es el importe que debe abonar anualmente el partícipe y/o promotor en base a su edad de entrada en el colectivo, para garantizar las prestaciones prometidas en el plan → es el importe necesario para que se le reconozca una cuota de aportación b_x a la jubilación:

$$CN_{x_a} = b_{x_a} \ddot{a}^{(m)}_{x_j} \; {}_{x_j - x_a}E^{(T)}_{x_a}$$

Fracción de la prestación de jubilación reconocida a la edad alcanzada para percibirla de forma vitalicia a partir de la edad de jubilación	Factor de actualización actuarial desde la edad de jubilación hasta la edad alcanzada, sujeta a todas las causas de salida del colectivo de activos

Coste por servicios pasados

Es el coste, determinado de acuerdo con el método de valoración actuarial, correspondiente a los derechos reconocidos explícitamente a los partícipes por períodos anteriores a la implantación de un plan de pensiones o resultantes de la incorporación de mejoras en las prestaciones del plan. Se calcula como la provisión matemática que debería tener el plan menos la que tiene. Este coste se debe amortizar poco a poco.

Coste suplementario (CS)

Es el coste anual adicional al CN correspondiente a:

- La amortización del coste por servicios pasados; y/o
- Las desviaciones negativas en el comportamiento real de las variables económicas, financieras y demográficas con respecto al previsto.

$$CS_{x_a} = b^{s}_{x_a} \ddot{a}^{(m)}_{x_j} \; {}_{x_j - x_a}E^{(T)}_{x_a}$$

Coste anual (CA)

Cuota de aportación anual total que abona el partícipe y/o el promotor a una edad La aportación anual al plan de pensiones vendrá determinada por la suma de las siguientes magnitudes según proceda:

- Las contribuciones correspondientes a cualquier contingencia respecto de las que no esté definida la prestación.
- El coste normal y suplementario, en su caso, correspondiente, a las prestaciones definidas de jubilación.
- El coste anual correspondiente a la cobertura de cada una de las otras contingencias en que esté definida la prestación.

- La dotación a reservas patrimoniales destinadas a la cobertura del margen de solvencia.
- La dotación destinada a la atención de los gastos institucionales imputables al plan.

Necesariamente se tendrá en cuenta el límite financiero que establecido legalmente condiciona las aportaciones anuales correspondientes a cada partícipe, y, en su caso, se atenderá al límite fiscal si así lo estipula el propio plan.

6. Métodos de valoración del coste actuarial

La elección del método supone una distinta distribución anual de la cuantía de las aportaciones a lo largo de los años. Por ello debe tenerse en consideración fundamentalmente la capacidad real de financiación del colectivo afiliado.

Los métodos que determinan unas aportaciones iniciales más elevadas pueden reducir el coste final del plan de pensiones, ya que la cuantía del fondo de pensiones puede crecer con mayor rapidez debido a que, a igual rédito de capitalización positivo, se obtendrán mayor montante de intereses.

Los métodos de evaluación del coste actuarial de los planes de pensiones los podemos clasificar en dos grupos: el primer grupo es el denominado método de las prestaciones devengadas; el segundo grupo es el denominado método de las prestaciones proyectadas.

En todos los métodos de evaluación del coste anual actuarial debemos establecer si es el coste anual se referencia a la edad:

- de entrada: es aquella edad que el partícipe tenía o tiene el día de entrar en la empresa. Por tanto, si el plan de pensiones comienza en una fecha posterior al momento en que comenzó su andadura la empresa, existirán una serie de trabajadores para los que los cálculos actuariales se referencian a una fecha anterior al arranque del plan. Por tanto, si un trabajador entró en la empresa cuando tenía 30 años, cuando arranca el plan tiene 45 años y se jubilará previsiblemente a los 65 años, entonces, en el caso de la edad de entrada, todos los cálculos irán referenciados a su edad de entrada (30 años) y la duración teórica del plan será 35 años (es decir: 65-30=35).

- Alcanzada: edad que el partícipe tiene el día de arrancar el plan. Aunque el plan de pensiones comience en una fecha posterior al momento en que comenzó su andadura la empresa, para todos los trabajadores los cálculos actuariales se referencian a la fecha de arranque del plan. Por tanto, si un trabajador entró en la empresa cuando tenía 30 años, cuando arranca el plan tiene 45 años y se jubilará previsiblemente a los 65 años, entonces, en el caso de la edad alcanzada, todos los cálculos irán referenciados a la edad de arranque (40 años) y la duración teórica del plan será 25 años (es decir: 65-40=25).

Todos los métodos que se explican a continuación van referenciados a la edad de entrada. Para referenciarlos a la edad alcanzada, sólo habría que modificar el dato de edad, por lo que la duración para la evaluación del coste anual actuarial se acortará (en el caso explicado más arriba pasa de una duración de 35 años a una duración de 25 años).

Asignación de beneficios (o prestaciones devengadas)

Este método también se conoce como método unit credit o método de los beneficios acumulados.

Cada año se asigna una parte de la prestación total a reconocer en la fecha de jubilación, proporcional a los años previstos de permanencia en el colectivo o a la suma total de salarios a la edad de jubilación.

La esencia de este método radica en que el coste de cada unidad de beneficio se asocia al año en el cual se acredita el citado beneficio.

Los beneficios previstos en el plan se atribuyen a los años en los cuales se generan dichos beneficios.

Este método no ofrece dificultad cuando se trata de garantizar una determinada prestación por cada año de permanencia en la empresa, pudiendo estar fijada esta prestación en porcentaje del salario del empleado.

El coste de todos los beneficios acreditados durante un año determinado en un plan de pensiones se obtiene sumando los costes individuales correspondientes a cada miembro del plan de pensiones obtenidos en función de la edad.

Prestación acumulativa constante. Cálculo del coste en base a la edad de entrada

Siendo:

- x_e: edad de entrada
- x_j: edad de jubilación
- B_{xj}: valor actual actuarial de la prestación a la edad x_j (si la prestación es una renta R anual constante prepagable vitalicia, entonces $B_{xj} = R \cdot \ddot{a}_{xj}$)

Se define:

$$b_x = \frac{B_{x_j}}{x_j - x_e}$$

Verificándose que:

$$B_{x_j} = \sum_{h=x_e}^{x_j-1} b_h$$

Entonces se define el coste normal como:

$$C_x = {}_{x_j-x}E_x^{(T)} b_x$$

La provisión matemática o pasivo actuarial por el método prospectivo:

$${}_tV_{x_e} = {}_{x_j-x_e-t}E_{x_e+t}^{(T)} t b_x$$

Prestación acumulativa dependiente del salario. Cálculo del coste en base a la edad de entrada.

Siendo:

- x_e: edad de entrada
- x_j: edad de jubilación
- B_{xj}: valor actual actuarial de la prestación a la edad x_j (si la prestación es una renta R anual constante prepagable vitalicia, entonces $B_{xj} = R\cdot\ddot{a}_{xj}$)
- s_x: salario de una persona de edad x
- S_{xj}: suma de todos los salarios percibidos por una persona desde su entrada en el colectivo hasta su edad de jubilación x_j.

Entonces:

$$b_x = \frac{B_{x_j}}{S_{x_j}} s_x = K s_x$$

Verificándose que:

$$S_{x_j} = \sum_{h=x_e}^{x_j-1} s_h$$

$$B_{x_j} = \sum_{h=x_e}^{x_j-1} b_h = K \sum_{h=x_e}^{x_j-1} s_h = K S_{x_j}$$

El coste normal:

$$C_x = {}_{x_j-x}E_x^{(T)} b_x$$

La provisión matemática o pasivo actuarial por el método prospectivo:

$${}_tV_{x_e} = {}_{x_j-x_e-t}E_{x_e+t}^{(T)} \sum_{x=1}^{t} b_x$$

Como $x = x_e + t$, entonces:

$${}_tV_{x_e} = {}_{x_j-x}E_x^{(T)} \sum_{x=1}^{t} b_x$$

Asignación del coste (o prestaciones proyectadas)

También llamado método de los beneficios proyectados.

Estos métodos distribuyen el coste de las prestaciones de forma regular (constante, o creciente según reglas de formación de progresión geométrica o aritmética) a lo largo de permanencia del partícipe en el colectivo.

Los métodos de evaluación del coste actuarial anual englobados bajo esta denominación se caracterizan por las siguientes notas fundamentales:

- El coste anual se obtiene teniendo en cuenta el total de los beneficios futuros previstos en el plan de pensiones, en vez del beneficio acreditado en un ejercicio determinado.
- El coste a priori una vez calculado es constante, o sigue una ley de variación previamente establecida (ley geométrica o ley aritmética).

Podemos dividir el método de beneficios proyectados en dos grandes grupos:

- El método agregado: supone el tratamiento del colectivo como un todo, con el objeto de obtener valores medios, es decir, aplicando el sistema financiero actuarial de capitalización colectiva.
- El método individual: en este segundo grupo, el coste global del plan se obtiene sumando los costes correspondientes a cada individuo del colectivo, calculados éstos separadamente aplicando el sistema financiero actuarial de capitalización individual. Este segundo grupo comprende, desde el punto de vista actuarial, los métodos equivalentes a los de la determinación de la prima anual constante o variable en los seguros ordinarios de vida.

En ambos métodos, el agregado y el individual, debemos establecer si el coste anual se referencia a la edad de entrada o si, por el contrario, se referencia a la edad alcanzada.

Cuota de aportación constante. Método agregado. Cálculo del coste en base a la edad de entrada.

Siendo:

- x_e: edad de entrada
- x_j: edad de jubilación
- B_{xj}: valor actual actuarial de la prestación a la edad x_j (si la prestación es una renta R anual constante prepagable vitalicia, entonces $B_{xj} = R \cdot \ddot{a}_{xj}$)

Entonces, el coste normal, constante e igual para todos:

$$\bar{C} = \frac{\sum_{h=x_e}^{x_j} {}_{x_j-h}E_h^{(T)} B_{x_j}}{\sum_{h=x_e}^{x_j} l_h \ddot{a}_{h:x_j-h}^{(T)}}$$

Cuota de aportación constante. Método individual. Cálculo del coste en base a la edad de entrada.

Siendo:

- x_e: edad de entrada
- x_j: edad de jubilación
- B_{xj}: valor actual actuarial de la prestación a la edad x_j (si la prestación es una renta R anual constante prepagable vitalicia, entonces $B_{xj} = R \cdot \ddot{a}_{xj}$)

Entonces, el coste normal:

$$C_x = \frac{{}_{x_j - x_e}E_{x_e}^{(T)} B_{x_j}}{\ddot{a}_{x_e:x_j - x_e}^{(T)}}$$

La provisión matemática o pasivo actuarial:

$${}_tV_{x_e} = {}_{x_j - x_e - t}E_{x_{e+t}}^{(T)} B_{x_j} - C_x \ddot{a}_{x_e + t:x_j - x_e - t}^{(T)}$$

Cuota de aportación creciente. Método individual. Cálculo del coste en base a la edad de entrada.

Siendo:

- x_e: edad de entrada
- x_j: edad de jubilación
- B_{xj}: valor actual actuarial de la prestación a la edad x_j (si la prestación es una renta R anual constante prepagable vitalicia, entonces $B_{xj} = R \cdot \ddot{a}_{xj}$)

Entonces, definimos un coste normal que crece geométricamente. UN caso particular es que el coste normal crezca geométricamente a una tasa c en función, por ejemplo, de los crecimientos salariales, siendo, por ejemplo, $C_x = t_x \cdot w_x$ (es decir, un porcentaje del salario).

$$C_x = \frac{{}_{x_j - x_e}E_{x_e}^{(T)} B_{x_j}}{{}^{(c)}\ddot{a}_{x_e:x_j - x_e}^{(T)}}$$

La provisión matemática o pasivo actuarial:

$${}_tV_{x_e} = {}_{x_j - x_e - t}E_{x_{e+t}}^{(T)} B_{x_j} - C_x {}^{(c)}\ddot{a}_{x_e + t:x_j - x_e - t}^{(T)}$$

7. Pasivo actuarial. Balance actuarial de un plan de pensiones

Pasivo actuarial

El concepto de pasivo actuarial equivale al de reserva matemática en los seguros de vida, y se define como el coste adicional asociado al reconocimiento en el plan de pensiones de un coste adicional o suplementario debido al reconocimiento de obligaciones devengadas que no tienen un respaldo económico en las provisiones.

Dichas obligaciones devengadas provienen de los años de antigüedad en la empresa anteriores al plan de pensiones.

El pasivo actuarial inicial del partícipe será:

- Por el método prospectivo, la diferencia entre el valor actual de las prestaciones totales reconocidas menos el valor actual de los costes anuales normales futuros
- Por el método retrospectivo, la capitalización actuarial de los costes anuales normales de los miembros del colectivo, calculados de acuerdo a la edad de entrada xe que tenían en la fecha desde que se les reconocen los beneficios del plan.

Balance actuarial

El balance actuarial del sistema de pensiones es el estado financiero que relaciona las obligaciones de los cotizantes y pensionistas del sistema de pensiones a una fecha determinada con los diferentes activos que respaldan tales obligaciones, sean financieras, reales o por cotizaciones.

En un sistema de capitalización, en el balance actuarial solo aparecen activos financieros y/o reales por derechos de propiedad.

En un sistema de reparto puro, aparecen activos por cotizaciones, no protegidos por derechos de propiedad a favor de cotizantes y pensionistas.

El objetivo del balance actuarial es ser la imagen fiel del patrimonio al principio y fin del ciclo económico y, por comparación, determinar el resultado.

Sus principales partidas serían:

- Por el lado del activo:
  - el activo financiero y real: son las inversiones. En el sistema de pensiones de la Seguridad Social, sería el Fondo de Reserva que se crea con el superávit de las cotizaciones.
  - el activo por cotizaciones (activo oculto): Intuitivamente se puede interpretar como el máximo pasivo que puede ser respaldado en el largo plazo para la tasa de cotización determinada sin requerir contribuciones extraordinarias del promotor, si las condiciones a la fecha de efecto del balance se mantuvieran sin cambios.
  - el déficit acumulado, en su caso;

- Por el lado del pasivo:
    - el pasivo con pensionistas: recoge las obligaciones con pensionistas, es decir, las provisiones técnicas de las pensiones en vigor.
    - el pasivo con cotizantes: recoge las provisiones técnicas de derechos en curso de adquisición.
    - el superávit acumulado, en su caso.

Dependiendo del signo de la diferencia entre activo y pasivo, hablaremos de déficit o superávit. El sistema será solvente cuando Activo > Pasivo, es decir, cuando el déficit acumulado sea cero o negativo.

La solvencia del sistema de pensiones se define como la capacidad razonable del sistema de cumplir sus compromisos sin que el promotor tenga que aportar recursos extraordinarios para cubrir el déficit actuarial, y/o la aptitud de poder desarrollar su actividad (recaudar cotizaciones y pagar pensiones) sin tener que modificar sus parámetros básicos o lo que es lo mismo sus bases técnicas o tener que poner en marcha un mecanismo financiero de ajuste automático.

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 53. Mutuas Colaboradoras con la Seguridad Social. Colectivos protegidos. Recursos que gestionan las Mutuas. Marco jurídico. Desarrollo de la colaboración con la Seguridad Social.

Edición Julio 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1. Mutuas colaboradoras con la Seguridad Social. Marco jurídico

Las empresas y autónomos tienen que cubrir con una mutua obligatoriamente la incapacidad temporal por contingencia común de sus trabajadores. Ahora bien, la cobertura de las contingencias profesionales con una Mutua es totalmente voluntaria, pudiendo optar por la protección de estas contingencias a través de una entidad gestora de la Seguridad Social (Instituto Nacional de la Seguridad Social e Instituto Social de la Marina) o de una Mutua. Independientemente de la opción realizada por el empresario, el contenido y alcance de la obligación de cotizar es exactamente el mismo.

Si el empresario optase porque esta protección se realice por parte de una Mutua, deberá suscribir un Convenio de Asociación, que recogerá los derechos y obligaciones de los empresarios, y cuyo plazo de vigencia será de un año.

Marco jurídico

Cumpliendo el mandato de la disposición adicional vigesimocuarta de la Ley 27/2011, sobre actualización, adecuación y modernización del sistema de Seguridad Social, que establecía que se procediera a reformar el marco normativo de las Mutuas, se promulgó la Ley 35/2014, de 26 de diciembre, por la que se modifica el entonces vigente TRLGSS en relación con el régimen jurídico de las Mutuas de Accidentes de Trabajo y Enfermedades Profesionales de la Seguridad Social, que han pasado a denominarse Mutuas Colaboradoras con la Seguridad Social, con el objetivo de modernizar el funcionamiento y gestión de estas entidades privadas, reforzando los niveles de transparencia y eficiencia, y contribuyendo en mayor medida a la lucha contra el absentismo laboral injustificado y a la sostenibilidad del sistema de la Seguridad Social.

Históricamente, las Mutuas surgieron como asociaciones que se constituyeron con el único objeto de colaborar en la gestión de las prestaciones derivadas de las contingencias profesionales, sin embargo su evolución ha llevado a colaborar en otras prestaciones, lo que ha motivado, entre otras razones, su cambio dedenominación, sin modificar su naturaleza jurídica de entidades privadas a las que el Estado autoriza para colaborar en el ejercicio de determinadas funciones del sector administrativo.

La norma básica es el Texto Refundido de la Ley General de la Seguridad Social, aprobado por Real Decreto Legislativo 8/2015 (TRLGSS), en sus artículos 79 a 101, junto con la siguiente normativa en lo que no se oponga a la nueva regulación y que debería haberse adaptado en un plazo de 6 meses (disp. final quinta de la Ley 35/2014):

- El Reglamento que regula la colaboración de las Mutuas de Colaboradoras con la Seguridad Social en la gestión de la Seguridad Social, aprobado por Real Decreto 1993/1995, de 7 de diciembre.
- La Ley General de Sanidad de 25 de abril de 1986, en materia de asistencia sanitaria.

- Reglamento General de la Gestión Financiera de la Seguridad Social, aprobado por Real Decreto 696/2018, de 29 de junio, y Orden Ministerial de 22 de febrero de 1996 que lo desarrolla.
- El Real Decreto 1630/2011, de 14 de noviembre, regula la prestación de servicios sanitarios y de recuperación por las Mutuas.
- Orden TAS/4054/2005, de 27 de diciembre, por la que se desarrollan los criterios técnicos para la liquidación de capitales coste de pensiones y otras prestaciones periódicas de la Seguridad Social.
- Artículo 32 de la Ley 31/1995, de 8 de noviembre, de Prevención de Riesgos Laborales, junto con la Orden TAS/3623/2006, de 28 de noviembre, que regula las actividades preventivas en el ámbito de la Seguridad Social y la financiación de la Fundación para la Prevención de Riesgos Laborales y el Real Decreto 860/2018, de 13 de julio, que regula las actividades preventivas de la acción protectora de la Seguridad Social a realizar por las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social.
- Real Decreto Legislativo 5/2000, de 4 de agosto, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley sobre Infracciones y Sanciones en el Orden Social (TRLISOS) contiene en la Sección tercera del capítulo III, las «Infracciones de las Mutuas Colaboradoras con la Seguridad Social».

Definición, objeto y naturaleza

Definición

El artículo 80.1 del TRLGSS, las define de la siguiente forma:

Son Mutuas Colaboradoras con la Seguridad Social las asociaciones privadas de empresarios constituidas mediante autorización del Ministerio de Inclusión, Seguridad Social y Migraciones e inscripción en el Registro especial dependiente de este, que tienen por finalidad colaborar en la gestión de la Seguridad Social, bajo la dirección y tutela del mismo, sin ánimo de lucro y asumiendo sus asociados responsabilidad mancomunada en los supuestos y con el alcance establecidos en esta ley.

Las Mutuas Colaboradoras con la Seguridad Social, una vez constituidas, adquieren personalidad jurídica y capacidad de obrar para el cumplimiento de sus fines. El ámbito de actuación de las mismas se extiende a todo el territorio del Estado.

Objeto

El citado art. 80, en su apartado 2.º dispone que es objeto de las Mutuas Colaboradoras con la Seguridad Social el desarrollo, mediante la colaboración con el Ministerio de Inclusión, Seguridad Social y Migraciones, de las siguientes actividades de la Seguridad Social:

- La gestión de las prestaciones económicas y de la asistencia sanitaria, incluida la rehabilitación, comprendidas en la protección de las contingencias de accidentes de trabajo (AT) y enfermedades profesionales (EP) de la Seguridad Social, así como de las actividades de prevención.
- La gestión de la prestación económica por incapacidad temporal (IT) derivada de contingencias comunes.
- La gestión de las prestaciones por riesgo durante el embarazo y riesgo durante la lactancia natural.
- La gestión de las prestaciones económicas por cese en la actividad de los trabajadores por cuenta propia en los términos establecidos en el título V, por la que se establece un sistema específico de protección por cese de actividad de los trabajadores autónomos.
- La gestión de la prestación por cuidado de menores afectados por cáncer u otra enfermedad grave.
- Las demás actividades de la Seguridad Social que les sean atribuidas legalmente.

Naturaleza

El artículo 80 bajo el título de «Definición y objeto», regula otras cuestiones conexas. Así, el apartado 4.º del artículo 80 ayuda a esclarecer la naturaleza de las Mutuas, al disponer que *las Mutuas Colaboradoras con la Seguridad Social forman parte del sector público estatal de carácter administrativo, de conformidad con la naturaleza pública de sus funciones y de los recursos económicos que gestionan, sin perjuicio de la naturaleza privada de la entidad*. Por ello, hemos de diferenciar dos aspectos:

- Su naturaleza del ente privado: En consecuencia, no son de aplicación los privilegios que el TRLGSS asigna a las Entidades Gestoras, ni su régimen jurídico-económico, sino el de las personas jurídico-privadas, con excepciones, como la exención tributaria regulada en el artículo 84.5 y la exención parcial del artículo 9 de la Ley del Impuesto de Sociedades.
- Se le atribuyen funciones públicas: Como también son públicos los recursos que gestiona.

Otros caracteres

La colaboración de las Mutuas en la gestión de la Seguridad Social no podrá servir de fundamento a operaciones de lucro mercantil ni comprenderá actividades de captación de empresas asociadas o de trabajadores adheridos. Tampoco podrá dar lugar a la concesión de beneficios de ninguna clase a favor de los empresarios asociados, ni a la sustitución de estos en las obligaciones que les correspondan por su condición de empresarios.

Las reclamaciones que tengan por objeto prestaciones y servicios de la Seguridad Social objeto de la colaboración en su gestión, se sustanciarán ante el orden jurisdiccional social.

Las obligaciones económicas que se atribuyan a las Mutuas serán pagadas con cargo a los recursos públicos adscritos para el desarrollo de la colaboración.

Constitución. Requisitos

Viene regulado en el art. 81 TRLGSS: La constitución de una mutua colaboradora con la Seguridad Social exige el cumplimiento de los siguientes requisitos:

- Que concurran un mínimo de cincuenta empresarios, quienes a su vez cuenten con un mínimo de treinta mil trabajadores y un volumen de cotización por contingencias profesionales no inferior a veinte millones de euros.
- Que limiten su actividad al ejercicio de las funciones establecidas en el artículo 80.
- Que presten fianza, en la cuantía que establezcan las disposiciones de aplicación y desarrollo de esta ley, para garantizar el cumplimiento de sus obligaciones.
- Que exista autorización del Ministerio de Inclusión, Seguridad Social y Migraciones, previa aprobación de los estatutos de la mutua, e inscripción en el registro administrativo dependiente del mismo.

El Ministerio de Inclusión, Seguridad Social y Migraciones, una vez comprobada la concurrencia de los requisitos establecidos en las letras a), b) y c) del apartado anterior y que los estatutos se ajustan al ordenamiento jurídico, autorizará la constitución de la mutua colaboradora con la Seguridad Social y ordenará su inscripción en el Registro de Mutuas Colaboradoras con la Seguridad Social dependiente del mismo. La orden de autorización se publicará en el «Boletín Oficial del Estado», en la que asimismo se consignará su número de registro, adquiriendo desde entonces personalidad jurídica.

La denominación de la mutua incluirá la expresión «Mutua Colaboradora con la Seguridad Social», seguida del número con el que haya sido inscrita. La denominación deberá ser utilizada en todos los centros y dependencias de la entidad, así como en sus relaciones con sus asociados, adheridos y trabajadores protegidos, y con terceros.

2. Colectivos protegidos

Tanto los empresarios como los trabajadores por cuenta propia (autónomos), en el momento de cumplir ante la TGSS sus respectivas obligaciones de inscripción de empresa, afiliación y alta, deberán hacer constar la Entidad Gestora o la Mutua Colaboradora por la que hayan optado para proteger las contingencias profesionales), la prestación económica por Incapacidad Temporal derivada de contingencias comunes (IT) y la protección por cese de actividad.

La opción a favor de una Mutua Colaboradora tendrá el siguiente alcance:

- Los empresarios que opten por una Mutua para la protección de los AT y EP deberán formalizar con la misma el convenio de asociación y proteger en la misma entidad a todos los trabajadores correspondientes a los centros de trabajo situados en la misma provincia. Igualmente, los empresarios asociados podrán optar por que la misma Mutua gestione la prestación económica por Incapacidad Temporal derivada de contingencias comunes. El convenio de asociación es el instrumento por el que se formaliza la asociación a la Mutua y tendrá un periodo de vigencia de un año, que podrá prorrogarse por periodos de igual duración. En este convenio se determinarán los derechos y obligaciones de los asociados y de la Mutua, con declaración expresa de la responsabilidad mancomunada de los asociados.
- Los trabajadores comprendidos en el ámbito de aplicación del RETA (Régimen Especial de Trabajadores Autónomos), deberán formalizar las contingencias profesionales, la incapacidad temporal y cese de actividad con una mutua (no se da la opción de elección de una entidad gestora), debiendo optar por la misma mutua colaboradora para toda la acción protectora indicada.
- Los trabajadores por cuenta propia incluidos en el REM (Régimen Especial de Trabajadores del Mar) podrán optar por proteger las contingencias profesionales con la entidad gestora o con una mutua. En todo caso, deberán formalizar la protección por cese de actividad con la entidad gestora o con la mutua con quien protejan las contingencias profesionales.
- La protección se formalizará mediante documento de adhesión, por el cual el trabajador por cuenta propia se incorpora al ámbito gestor de la mutua de forma externa a la base asociativa de la misma y sin adquirir los derechos y obligaciones derivados de la asociación. El periodo de vigencia de la adhesión será de un año, pudiendo prorrogarse por periodos de igual duración.

Las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social deberán aceptar toda proposición de asociación y de adhesión que se les formule, sin que la falta de pago de las cotizaciones sociales les excuse del cumplimiento de la obligación ni constituya causa de resolución del convenio.

Las prestaciones y los servicios que deberán gestionar las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social forman parte de la acción protectora del sistema y se dispensarán a favor de los trabajadores al servicio de los empresarios asociados y de los trabajadores por cuenta propia (autónomos) adheridos conforme a las normas del régimen de la Seguridad Social en el que estén encuadrados y con el mismo alcance que dispensan las entidades gestoras en los supuestos atribuidos a las mismas.

3. Recursos que gestionan las mutuas

Financiación (art. 84.1 TRLGSS)

La Tesorería General de la Seguridad Social entregará a las mutuas las cuotas por accidentes de trabajo y enfermedades profesionales ingresadas en aquella por los empresarios asociados a cada una o por los trabajadores por cuenta propia adheridos, así como la fracción de cuota correspondiente a la gestión de la prestación económica por incapacidad temporal derivada de contingencias comunes, la cuota por cese en la actividad de los trabajadores autónomos y el resto de cotizaciones que correspondan por las contingencias y prestaciones que gestionen, previa deducción de las aportaciones destinadas a las entidades públicas del sistema por el reaseguro obligatorio y por la gestión de los servicios comunes, así como de las cantidades que, en su caso, se establezcan legalmente.

También se financian con los rendimientos, contraprestaciones y compensaciones obtenidos tanto de la inversión financiera de estos recursos como de la enajenación y cese de la adscripción por cualquier título de los bienes muebles e inmuebles de la Seguridad Social que estén adscritos a las Mutuas y, en general, mediante cualquier ingreso obtenido en virtud del ejercicio de la colaboración.

Patrimonio

Una de las principales peculiaridades de las mutuas es que, en una misma entidad, coexisten dos patrimonios de propiedad diferente: uno, propiedad de la Seguridad Social y otro, propiedad de la mutua, que constituye el llamado patrimonio histórico.

Esta dualidad de patrimonios se recoge en los artículos 92 y 93 del TRLGSS y 3 del reglamento.

Patrimonio de la Seguridad Social

Los ingresos que hemos comentado en el ap. anterior, establecidos en el artículo 84.1, así como los bienes muebles e inmuebles en que puedan invertirse los mismos y, en general, los derechos, acciones y recursos relacionados con ellos, forman parte del patrimonio de la Seguridad Social y están adscritos a las mutuas para el desarrollo de las funciones de la Seguridad Social atribuidas, siempre bajo la dirección y tutela del Ministerio de Inclusión, Seguridad Social y Migraciones.

La adquisición por cualquier título de los inmuebles necesarios para el desarrollo de las funciones atribuidas y su enajenación se acordará por las mutuas, previa autorización del Ministerio, correspondiendo a la Tesorería General de la Seguridad Social (TGSS) la formalización del acto en los términos autorizados, y se titularán e inscribirán en el Registro de la Propiedad a nombre del servicio común. La adquisición llevará implícita su adscripción a la mutua autorizada. Igualmente, las entidades podrán solicitar autorización para que se les adscriban inmuebles del patrimonio de la Seguridad Social adscritos a las Entidades Gestoras, los servicios comunes u otras mutuas, así como para la desadscripción de aquellos afectados, lo que requerirá conformidad de los interesados y obligará a compensar económicamente a la entidad cedente.

Corresponde a las mutuas la conservación, disfrute, mejora y defensa de los bienes adscritos, bajo la dirección y tutela del Ministerio. Respecto de los bienes inmuebles, corresponderá a aquellas el ejercicio de las acciones posesorias, y a la TGSS, el ejercicio de las acciones dominicales.

No obstante la titularidad pública del patrimonio, dada la gestión singularizada del mismo y el régimen económico-financiero establecido para las actividades de la colaboración, los bienes que integran el patrimonio adscrito estarán sujetos a los resultados de la gestión, pudiendo liquidarse para atender las necesidades de la misma y el pago de prestaciones u otras obligaciones derivadas de las actividades de colaboración, sin perjuicio de la responsabilidad mancomunada de los empresarios asociados

Patrimonio histórico

Los bienes incorporados al patrimonio de las mutuas con anterioridad al 1 de enero de 1967 o durante el periodo comprendido entre esa fecha y el 31 de diciembre de 1975, siempre que en este último caso se trate de bienes que provengan del 20 % del exceso de excedentes, así como los que procedan de recursos distintos de los que tengan su origen en las cuotas de Seguridad Social, constituyen el patrimonio histórico de las mutuas, cuya propiedad les corresponde en su calidad de asociación de empresarios, sin perjuicio de la tutela que corresponde al Ministerio.

Este patrimonio histórico se halla igualmente afectado estrictamente al fin social de la entidad, sin que de su dedicación al mismo puedan derivarse rendimientos o incrementos patrimoniales que, a su vez, constituyan gravamen para el patrimonio único de la Seguridad Social. Considerando la estricta afectación de este patrimonio a los fines de colaboración de las mutuas con la Seguridad Social, ni los bienes ni los rendimientos que, en su caso, produzcan pueden desviarse hacia la realización de actividades mercantiles.

No obstante, previa autorización del Ministerio y en los términos que se establezcan reglamentariamente, formarán parte del patrimonio histórico de las mutuas los siguientes ingresos:

- Las mutuas que cuenten con bienes inmuebles integrantes de su patrimonio histórico, destinados a ubicar centros y servicios sanitarios o administrativos adscritos al desarrollo de las actividades propias de la colaboración con la Seguridad Social que tienen encomendada, podrán imputar en sus correspondientes cuentas de resultados un canon o coste de compensación por la utilización de tales inmuebles.

- Las mutuas que posean inmuebles vacíos que pertenezcan a su patrimonio histórico que, por las circunstancias concurrentes, no puedan ser utilizados para la ubicación de centros y servicios sanitarios o administrativos para el desarrollo de actividades propias de la colaboración con la Seguridad Social y sean susceptibles de ser alquilados a terceros, podrán hacerlo a precios de mercado.
- Las mutuas podrán percibir de las empresas que contribuyan eficazmente a la reducción de las contingencias profesionales de la Seguridad Social parte de los incentivos contemplados en el artículo 97.2 de la ley, previo acuerdo de las partes. Reglamentariamente, se establecerá el límite máximo de participación de las mutuas en dichos incentivos.

Las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social gozarán de exención tributaria en los términos que se establecen para las entidades gestoras en el artículo 76.1 del TRLGSS.

Reservas

Como ya hemos comentado, las mutuas no pueden dar lugar a que sus asociados perciben beneficios:

En cada uno de los ámbitos, se constituirá una reserva de estabilización que se dotará con el resultado económico positivo obtenido anualmente, cuyo destino será corregir las posibles desigualdades entre los diferentes ejercicios. Las cuantías de las reservas serán las siguientes:

- Reserva de estabilización de contingencias profesionales. Cuantía mínima equivalente al 20 % de la media anual de las cuotas ingresadas en el último trienio por las contingencias y prestaciones señaladas en el apartado 1 a), el cual, voluntariamente, podrá elevarse hasta el 30 %, que constituirá el nivel máximo de dotación de la reserva.
- Reserva de estabilización de contingencias comunes. Cuantía mínima del 5 % de las cuotas ingresadas durante el ejercicio económico por las mencionadas contingencias, con incremento voluntario hasta el 20 %, que constituirá el nivel máximo de cobertura.
- Reserva de estabilización por cese de actividad. Cuantía mínima equivalente al 5%, con incremento voluntario hasta el 20 %, que constituirá el nivel máximo de cobertura.

Los excedentes que resulten después de dotar las reservas anteriormente descritas se aplicarán conforme ordena el art. 96 TRLGSS a la dotación de reservas complementarias, de asistencia social y al fondo de reserva de Seguridad Social.

4. Desarrollo de la colaboración en la gestión de la Seguridad Social

Ya hemos hablado de las actividades que constituyen el objeto de las Mutuas, descritas en el art. 80.2 TRLGSS. El art. 82 recoge las particularidades de las prestaciones y servicios gestionados:

Contingencias profesionales

En relación con las contingencias profesionales: Corresponderá a las mutuas la determinación inicial del carácter profesional de la contingencia, sin perjuicio de su posible revisión o calificación por la entidad gestora competente.

Los actos que dicten las mutuas, por los que reconozcan, suspendan, anulen o extingan derechos en los supuestos atribuidos a las mismas, deberán ser motivados, formalizados por escrito y notificado al interesado y al empresario si media relación laboral.

Las prestaciones sanitarias comprendidas en la protección de las contingencias profesionales se dispensarán a través de los medios e instalaciones gestionados por las mutuas, mediante convenios con otras mutuas o con las administraciones públicas sanitarias, así como mediante conciertos con medios privados.

Actividades preventivas

Las actividades preventivas de la acción protectora de la Seguridad Social son prestaciones asistenciales a favor de los empresarios asociados y de sus trabajadores dependientes, así como de los trabajadores por cuenta propia (autónomos) adheridos, dirigidas a asistir a los mismos en el control y, en su caso, reducción de los accidentes de trabajo y de las enfermedades profesionales de la Seguridad Social. También comprenderán actividades de asesoramiento a las empresas asociadas y a los trabajadores autónomos al objeto de que adapten sus puestos de trabajo y estructuras para la recolocación de los trabajadores accidentados o con patologías de origen profesional, así como actividades de investigación, desarrollo e innovación a realizar directamente por las mutuas, dirigidas a la reducción de las contingencias profesionales de la Seguridad Social.

Las mutuas elaborarán sus respectivos planes de actividades preventivas ajustándose a los programas, actividades y prioridades que se determinen anualmente por la Secretaría de Estado de la Seguridad Social.

En ningún caso las actividades preventivas a realizar por las mutuas podrán suponer la sustitución de las empresas en el cumplimiento de las obligaciones establecidas en la Ley 31/1995, de 8 de noviembre, de Prevención de Riesgos Laborales.

Gestión de la prestación económica por incapacidad temporal

En relación con la gestión de la prestación económica por incapacidad temporal derivada de contingencias comunes a favor de los trabajadores al servicio de los empresarios asociados y de los trabajadores por cuenta propia adheridos:

- Corresponde a las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social la función de declaración del derecho a la prestación económica, así como las de denegación, suspensión, anulación y declaración de extinción del mismo, sin perjuicio del control sanitario de las altas y bajas médicas por parte de los servicios públicos de salud. Los actos que se dicten en el ejercicio de estas funciones serán motivados y se formalizarán por escrito, estando supeditada su eficacia a la notificación al beneficiario. Asimismo, se notificarán al empresario en los supuestos en que el beneficiario mantenga relación laboral.

Recibido el parte médico de baja, la mutua comprobará el cumplimiento por el beneficiario de los requisitos de afiliación, alta, periodo de carencia y restantes exigidos en el régimen de la Seguridad Social correspondiente y determinará el importe del subsidio, adoptando el acuerdo de declaración inicial del derecho a la prestación.

- Cuando las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social, a la vista de los informes médicos y sus actuaciones de control y seguimiento, consideren que el beneficiario podría no estar impedido para el trabajo, podrán formular propuestas motivadas de alta médica a través de los médicos dependientes de las mismas, dirigidas a la Inspección Médica de los Servicios Públicos de Salud.

  La Inspección Médica de los Servicios Públicos de Salud, si lo considera necesario, citará al trabajador para revisión médica y comunicará a la mutua y al Instituto Nacional de la Seguridad Social la estimación de la propuesta de alta o su denegación. La estimación de la propuesta de alta dará lugar a que la mutua notifique la extinción del derecho al trabajador y a la empresa, señalando la fecha de efectos de esta.

  Cuando, excepcionalmente, la Inspección Médica del servicio público de salud no conteste a la propuesta de alta formulada por la mutua en la forma y plazo establecidos (cinco días desde la notificación de la propuesta), esta última podrá solicitar la emisión del parte de alta al Instituto Nacional de la Seguridad Social. El plazo para resolver la solicitud será de cinco días hábiles desde el siguiente a su recepción.

- Las comunicaciones que se realicen entre los médicos de las mutuas, los pertenecientes al servicio público de salud y las entidades gestoras se realizarán preferentemente por medios electrónicos, siendo válidas y eficaces desde el momento en que se reciban en el centro donde aquellos desarrollen sus funciones.

  Las mutuas no podrán desarrollar las funciones de gestión de la prestación a través de medios concertados, sin perjuicio de recabar, en los términos establecidos en la letra d), los servicios de los centros sanitarios autorizados para realizar pruebas diagnósticas o tratamientos terapéuticos y rehabilitadores que las mismas soliciten.

- Las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social podrán realizar actos de control y seguimiento a partir del día de la baja médica. La incomparecencia injustificada del beneficiario para reconocimiento médico será causa de extinción del derecho a la prestación económica.

Asimismo, las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social podrán realizar pruebas diagnósticas y tratamientos terapéuticos y rehabilitadores, con la finalidad de evitar la prolongación innecesaria de las bajas médicas, previa autorización del médico del servicio público de salud y consentimiento informado del paciente.

Los resultados de estas pruebas y tratamientos se pondrán a disposición del facultativo del servicio público de salud que asista al trabajador a través de los servicios de interoperabilidad del Sistema Nacional de Salud, para su incorporación en la historia clínica electrónica del paciente.

Las pruebas diagnósticas y los tratamientos terapéuticos y rehabilitadores se realizarán principalmente en los centros asistenciales gestionados por las mutuas para dispensar la asistencia derivada de las contingencias profesionales y, con carácter subsidiario, podrán realizarse en centros concertados, autorizados para dispensar sus servicios en el ámbito de las contingencias profesionales. En ningún caso las pruebas y tratamientos supondrán la asunción de la prestación de asistencia sanitaria derivada de contingencias comunes ni dará lugar a la dotación de recursos destinados a esta última.

- Las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social podrán celebrar convenios y acuerdos con las entidades gestoras de la Seguridad Social y con los servicios públicos de salud, previa autorización del Ministerio de Empleo y Seguridad Social, para la realización en los centros asistenciales que gestionan, de reconocimientos médicos, pruebas diagnósticas, informes, tratamientos sanitarios y rehabilitadores, incluidas intervenciones quirúrgicas, que aquellos les soliciten, en el margen que permita su destino a las funciones de la colaboración. Los convenios y acuerdos autorizados fijarán las compensaciones económicas que hayan de satisfacerse como compensación a la mutua por los servicios dispensados, así como la forma y condiciones de pago.
- Las entidades gestoras de la Seguridad Social o las mutuas colaboradoras con la Seguridad Social podrán establecer acuerdos de colaboración, con el fin de mejorar la eficacia en la gestión y el control de la incapacidad temporal, con el Instituto Nacional de Gestión Sanitaria o los servicios de salud de las comunidades autónomas.
- La mutuas colaboradoras con la Seguridad Social asumirán a su cargo, sin perjuicio del posible resarcimiento posterior por los servicios de salud o por las entidades gestoras de la Seguridad Social, el coste originado por la realización de pruebas diagnósticas, tratamientos y procesos de recuperación funcional dirigidos a evitar la prolongación innecesaria de los procesos de baja laboral por contingencias comunes de los trabajadores del sistema de la Seguridad Social y que deriven de los acuerdos o convenios que se celebren de acuerdo con lo previsto reglamentariamente.

EJERCICIO 2.

Área de Ciencias Actuariales

Tema 54. Series temporales y procesos estocásticos. Modelos estacionarios lineales. Proceso lineal general. Procesos autorregresivos. Procesos de medias móviles. Procesos autorregresivos de medias móviles (ARMA). Modelos lineales no estacionarios. Procesos autorregresivos integrados de medias móviles (ARIMA). Procesos ARIMA estacionales. Identificación. Diagnóstico. Predicción.

Edición noviembre 2025

C.S. Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

1 Introducción

La econometría, como ciencia que pretende dar soporte métrico a la economía divide su ámbito en tres tipos de datos. Los de sección cruzada o transversales que son aquellos que se toman en un momento del tiempo determinado, los de series temporales que son aquellos cuyo análisis toma la sucesión de momentos del tiempo y los combinados que mezclan ambas aproximaciones siendo los datos de panel o análisis longitudinal uno de los subtipos más frecuentes.

En el ámbito económico (más particularmente en las finanzas y en la macroeconomía), la medición de las variables a lo largo del tiempo es una de las aproximaciones más relevantes de la econometría.

2 Series temporales y procesos estocásticos

2.1 Series temporales

Una serie temporal (o simplemente una serie) es una secuencia de *N* observaciones (datos) ordenadas y equidistantes cronológicamente sobre una característica (serie univariante o escalar) o sobre varias características (serie multivariante o vectorial) de una unidad observable en diferentes momentos.

Esta sucesión en el caso univariante se suele representar como una matriz columna de orden 1xN, $\boldsymbol{y} = [y_1, ..., y_N]'$ mientras que en el caso multivariante se denota por una sucesión de $\boldsymbol{y_t} = [y_{t1}, ..., y_{tM}]'$ $(M \geq 2)$ para la observación *t* de un conjunto de *N* observaciones, donde existen un total de M variables tal que

$$\boldsymbol{Y} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1'} \\ \boldsymbol{y_2'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_N'} \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1j} & y_{1M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{t1} & \cdots & y_{tj} & y_{tM} \\ y_{N1} & \cdots & y_{Nj} & y_{NM} \end{pmatrix} \tag{1}$$

2.1.1 Componentes

Una serie temporal puede ser descompuesta en dos tipologías distintas. De un lado se encuentran aquellas series temporales deterministas y de otro lado las estocásticas.

Las series temporales deterministas son aquellas cuya variabilidad no está sujeta a ningún componente aleatorio por lo que es posible conocer con precisión, una vez identificadas las componentes de la serie, sus valores futuros.

Estos componentes, en las series deterministas son: la tendencia, la variabilidad cíclica y la variabilidad estacional.

Tendencia Se puede definir como un cambio a largo plazo que se produce en relación al nivel medio, o el cambio a largo plazo de la media. La tendencia se identifica con un movimiento suave de la serie a largo plazo.

Estacionalidad Los componentes estacionales son movimientos periodicos que se repiten en intervalos cortos de tiempo, con duración constante o casi constante.

Cíclica La componente cíclica se define como movimientos irregulares de duración superior al año alrededor de la tendencia.

La adición de una última componente aleatoria convierte a la serie determinista en un proceso estocástico.

2.2 Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias , ordenadas y equidistantes cronológicamente, referidas a una (proceso univariante o escalar) o a varias (proceso multivariante o vectorial) características de una unidad observable en diferentes momentos. Es decir, un proceso estocástico es una serie temporal en la cual las observaciones son variables aleatorias.

Aunque es posible concebir ciertos experimentos controlados (repetibles varias veces bajo idénticas condiciones de partida) que permitan obtener diferentes realizaciones particulares finitas de un proceso estocástico, en general es imposible, prohibitivamente costoso, o moralmente inaceptable ejecutar dichos experimentos. La imposibilidad de controlar las condiciones a partir de las que se desarrollan las actividades en las que están implicadas las unidades observables a las que se refieren, es lo que hace que muchos procesos estocásticos sólo puedan observarse una única vez.

En general, una serie temporal se refiere a un período muestral que tan sólo es una parte de la historia del proceso estocástico del que procede dicha serie. No obstante, si las circunstancias sociales o naturales del período muestral al que se refiere la serie considerada se mantienen relativamente estables después de dicho período, entonces se espera que las conclusiones obtenidas del análisis de dicha serie sean aplicables también a momentos posteriores, al menos a corto plazo. Esta idea justifica el empleo de un modelo elaborado con una muestra dada para describir la evolución temporal de un proceso estocástico después del período muestral considerado. Denotaremos estos procesos con la misma notación que las series pero empleando mayúsculas.

2.2.1 Procesos estacionarios

Un proceso estocástico (Y_t) es estacionario cuando las propiedades estadísticas de cualquier secuencia finita $Y_{t1}, Y_{t2}, ..., Y_{tn}$ $(n \geq 1)$ de componentes de (Y_t) son semejantes a las de la secuencia Y_{t1+h} , $Y_{t2+h}, ..., Y_{tn+h}$ para cualquier número entero *h*.

En términos generales, se dice que un proceso estocástico es estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende sólo de la distancia o rezago entre estos dos periodos, y no del tiempo en el cual se calculó la covarianza. En la bibliografía sobre series de tiempo, un proceso estocástico como éste se conoce como proceso estocástico débilmente estacionario, estacionario covariante, estacionario de segundo orden o proceso estocástico en amplio sentido.

Los requisitos de estacionariedad estricta implican que las distribuciones marginales de todas las variables sean idénticas y las distribuciones finito-dimensionales de cualquier conjunto de variables sólo dependan de los retardos entre ellas.

Un modelo es no estacionario cuando no cumple las condiciones anteriores.

2.2.2 Pruebas de estacionariedad

Para la identificación de un proceso estocástico como estacionario o no estacionario es habitual realizar una serie de comprobaciones debido a la importancia de que el proceso sea estocástico para su análisis y explotación. Entre los métodos de comprobación destacan tres: el gráfico, el análisis de correlograma y el análisis de la raiz unitaria.

Método gráfico El método gráfico es el más sencillo y a la vez el más impreciso. Una vez expuesta la serie ordenada en periodos, consiste en observar si su media o su varianza contienen alguna tendencia. Habrá tendencia en media cuando la serie presente algún tipo de inclinación a lo largo del tiempo en lugar de oscilar en torno a un valor y tendencia en varianza cuando los dientes de sierra de la presenten variaciones en su amplitud.

Análisis del correlograma El Correlograma se construye como la sucesión de la función de correlación sobre cada periodo. Dicha función de correlación se obtiene como $\rho_t = \frac{\text{Covarianza del rezago } t}{\text{varianza}}$. A menudo estos datos se obtienen para la muestra en lugar de para la población. Un proceso será estacionario cuando el correlograma arroje valores que decrecen muy rápidamente hacia el cero conforme se suceden los periodos.

Análisis de la raiz unitaria El objetivo de este análisis es descartar que un proceso estocástico presente un parámetro autorregresivo de valor 1 dado que esto nos llevaría a un proceso de paseo aleatorio que es, por definición, no-estacionario.

3 Modelos estacionarios lineales

Una serie temporal (o simplemente una serie) es una secuencia de *N* observaciones (datos) ordenadas y equidistantes cronológicamente. Cuando dicha serie temporal tiene solamente una característica se dice que la serie es univariante o escalar.

Dado que el objetivo es explicar el valor que toma en el momento t una variable económica que presenta dependencia temporal, una forma de trabajar es recoger información sobre el pasado de la variable, observar su evolución en el tiempo y explotar el patrón de regularidad que muestran los datos. A lo largo de la exposición nos centraremos en modelos estacionarios en media y varianza.

3.1 Definición

Un modelo univariante de series temporales se descompone en dos partes. De un lado, para el proceso Y_t se puede identificar una parte sistemática o regular, que es predecible y está relacionada con las partes sistemáticas pasadas y de otro una parte aleatoria, llamada también innovación que no está relacionada ni con las innovaciones anteriores ni con las posteriores, ni con la parte sistemática del modelo. Tal que

$$Y_t = PS_t + a_t \qquad t = 1, 2, ... \tag{2}$$

A la hora de construir un modelo estadístico estocástico para una variable económica, el problema es formular la parte sistemática de tal manera que el elemento residual sea una innovación, en el mundo Normal, un ruido blanco. Si la serie Y la suponemos de media cero, un modelo teórico capaz de describir su comportamiento sería

$$Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, ...) + a_t \qquad t = 1, 2, ... \tag{3}$$

De hecho, en el caso de los procesos estacionarios con distribución normal y media cero, la teoría de procesos estocásticos señala que, bajo condiciones muy generales, Y_t se puede expresar como combinación lineal de los valores pasados infinitos de Y más una innovación ruido blanco:

$$Y_t = \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + ... + a_t \qquad t = 1, 2, ... \tag{4}$$

Las condiciones generales que ha de cumplir el proceso son:

1. Que el proceso sea no anticipante, es decir, que el presente no venga determinado por el futuro, luego el valor de Y en el momento t no puede depender de valores futuros de Y o de las innovaciones *a*.
2. Que el proceso sea invertible, es decir, que el presente dependa de forma convergente de su propio pasado lo que implica que la influencia de Y_{t-k} en Y_t ha de ir disminuyendo conforme nos alejemos en el pasado. Esta condición se cumple si los parámetros del modelo general cumplen la siguiente restricción: $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 < \infty$

Por otro lado, es de utilidad definir el operador de retardos L como $L^n Y_t = Y_{t-n}$ pudiendo reescribir la ecuación anterior como

$$\Pi_\infty(L) Y_t = a_t \tag{5}$$

Una forma alternativa es definir el proceso de la siguiente forma:

$$Y_t = \frac{a_t}{\Pi_\infty(L)} = \Psi_\infty(L)a_t = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ...)a_t = a_t + a_{t-1}\psi_1 + a_{t-2}\psi_2 + ...) \tag{6}$$

que describe el proceso como una combinación lineal del ruido blanco y su pasado infinito. Su condición de estacionaridad viene dada por $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$ lo que implica que el valor presente depende de forma convergente de las innovaciones pasadas, es decir, la influencia de la innovación a_{t-k} va desapareciendo conforme se aleja en el pasado.

No obstante, la mayoría de las series no son infinitas, por lo que es necesario aproximar los valores del polinomio de orden infinito a un cociente finito tal que

$$\Pi_\infty(L) \approx \frac{\phi_p(L)}{\theta_q(L)} \tag{7}$$

Donde $\phi_p(L)$ y $\theta_q(L)$ son polinomios en el operador de retardos finitos de orden p y q respectivamente por lo que

$$\Pi_\infty(L)Y_t \approx \frac{\phi_p(L)}{\theta_q(L)}Y_t = a_t \longrightarrow \phi_p(L)Y_t = \theta_q(L)a_t \tag{8}$$

Por lo que podemos decir que un proceso de series temporales univariante se compone de dos posibilidades que se pueden dar simultaneamente o no. Por un lado, un proceso autorregresivo, cuando el valor presente de la variable se representa en funci ´on de su propio pasado mas una innovacion contemporanea. Por otro lado, un proceso de medias moviles cuando el valor presente de la variable se representa en funcion de todas las innovaciones presente y pasadas. Y, finalmente, una combinacion de ambos. Estos modelos se denominan, respectivamente AR(p), MA(q) y ARMA(p,q).

4 Modelos ARMA

4.1 Procesos autorregresivos AR(p)

Un proceso autorregresivo de orden p expresa Y_t en función de su pasado hasta el retardo $t-p$ así como su innovación contemporánea tal que

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + a_t a_t \sim RB(0, \sigma^2) \tag{9}$$

Un proceso AR(p) cumple las condiciones de estacionariedad para cualquier valor de los parámetros sí y solo sí el módulo de las raíces del polinomio autorregresivo $\phi_p(L)$ está fuera del círculo unidad. Para el caso AR(1) es fácil comprobar que dado el polinomio autorregresivo $\phi_1(L) = 1 - \phi L$ la condición de estacionariedad implica que $|L| = |\frac{1}{\phi}| > 1 \Rightarrow |\phi| < 1.$

Las otras dos condiciones que tiene que cumplir el modelo lineal general y, por lo tanto, también el AR(p) como aproximación al mismo, es que el modelo fuera no anticipante e invertible. Todo modelo autorregresivo finito, AR(p), cumple estas dos condiciones para cualquier valor de los parámetros autorregresivos ya que, por definición, está escrito en forma autorregresiva. Es decir, es no anticipante porque su formulación hace depender al valor de Y_t de su pasado y no de su futuro y es invertible porque su formulación finita hace que se cumpla obligatoriamente la condición $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 < \infty$

4.1.1 Características

Las características del proceso estacionario AR(p) son:

Media

$$E(Y_t) = E(\phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + a_t) = \phi_1 E(Y_{t-1}) + ... + \phi_p E(Y_{t-p}) + E(a_t)$$

Dado que el proceso es estacionario, la media es constante por lo que $E(Y_t) = E(Y_{t-p}) = 0$. Si la media fuese distinta de cero podríamos reescribir el proceso como

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + a_t$$

cuya media es

$$E(Y_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - ... - \phi_p}$$

Función de autocorrelación La función de autocorrelación,$\rho_k, k = 0, 1, 2, ...$de un proceso AR(p) decrece exponencialmente hacia cero sin truncarse. Su forma es $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + ... + \phi_n \rho_{k-n}$. Con coeficientes de correlación $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

Autocovarianzas Las autocovarianzas de un proceso AR(p) son

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-k} - E(Y_{t-k})) = E(Y_t, Y_{t-k}) = \\ &= \phi_1 E(Y_{t-1} Y_{t-k}) + \phi_2 E(Y_{t-2} Y_{t-k}) + E(a_t Y_{t-k}) = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}\end{aligned}$$

4.2 Procesos de Medias Móviles: MA(q)

Un proceso de medias móviles de orden q expresa Y_t en función de la innovación contemporánea y sus q retardos tal que

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - ... - \theta_q a_{t-q} \qquad a_t \sim RB(0, \sigma^2) \tag{10}$$

Un modelo MA(q) cumple las condiciones de estacionariedad ya que será estacionario bajo las mismas condiciones que el modelo general, es decir, si se cumple la condición de que la sucesión de los parámetros del modelo es convergente: $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 = \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2 < \infty$. Por otro lado, es invertible cuando el modulo de las raíces del polinomio de medias móviles$\theta_q(L)$ está fuera del circulo unidad.

4.2.1 Características

Las características de un proceso de medias móviles MA(q) son

Media Dado que la media de las innovaciones son 0, la media del proceso será 0 salvo la existencia de una constante en el proceso, la cuál ejercerá como esperanza.

Función de autocovarianzas La varianza es constante y finita en un proceso MA(q). Su función de autocovarianzas está truncada a partir del retardo q, es decir

$$\rho_k = \begin{cases} \rho_k \neq 0 = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} & k = 1, 2, ..., q \\ \rho_k = 0 & k > q \end{cases}$$

La función de autocovarianzas $\gamma_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...$ es

$$\gamma_k = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-k} - E(Y_t))] \tag{11}$$

4.3 Procesos ARMA(p,q)

Los procesos autorregresivos de medias móviles determinan Y_t en función de su pasado hasta el retardo *p*, de la innovación contemporánea y el pasado de la innovación hasta el retardo *q*:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + ... + \theta_q a_{t-q} \quad a_t \sim RB(0, \sigma^2) \tag{12}$$

Que, en términos del operador de retardos se puede expresar como

$$(1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p) Y_t = (1 - \theta_1 L - ... - \theta_q L^q) a_t \Rightarrow \phi_p(L) Y_t = \theta_q(L) a_t \tag{13}$$

Un proceso autorregresivo de medias móviles finito ARMA(*p, q*) es estacionario sí y solo sí el modulo de las raíces del polinomio autorregresivo $\phi_p(L)$ está fuera del circulo unidad. Las condiciones de estacionariedad del modelo ARMA(*p, q*) vienen impuestas por la parte autorregresiva, dado que la parte de medias móviles finita siempre es estacionaria.

Por otro lado Un proceso autorregresivo de medias móviles finito ARMA(p, q) es invertible sí y solo sí el modulo de las raíces del polinomio medias móviles $\theta_q(L)$ está fuera del circulo unidad, dado que la parte autorregresiva finita siempre es invertible porque está directamente escrita en forma autorregresiva.

4.3.1 Caracteristicas

El modelo ARMA(*p,q*) va a compartir las características de los modelos AR(p) y MA(q) ya que contiene ambas estructuras a la vez. El modelo ARMA(*p,q*) tiene media cero en caso de no incluir una constante, varianza constante y finita y una función de autocovarianzas infinita. La función de autocorrelación es infinita decreciendo rápidamente hacia cero pero sin truncarse.

5 Modelos ARIMA

Si definimos el siguiente modelo ARMA(*p,q)* como

$$\Phi_p(L)Y_t = \Theta_q(L)a_t \tag{14}$$

Donde el polinomio AR se puede factorizar en función de sus *p* raíces$L_1, L_2, ..., L_p$

$$\Phi_p(L) = (1 - L_1^{-1}L)(1 - L_2^{-1}L)...(1 - L_p^{1}L)$$

donde suponemos que $(p-1)$ raíces son estacionarias y una de ellas, unitaria $L_i = 1$. En este caso el polinomio AR se puede reescribir como

$$\Phi_p(L) = (1 - L_1^{-1}L)(1 - L_2^{-1}L)...(1 - L_p^{1}L) = \varphi_{p-1}(L)(1 - (1)^{-1}L)$$

$$\Phi_p(L) = \varphi_{p-1}(L)(1 - L)$$

Si sustituimos este resultado en la especificación general de un proceso ARMA tenemos que

$$\varphi_{p-1}(L)\Delta Y_t = \Theta_q(L)a_t \tag{15}$$

Donde $\Delta = (1 - L)$ que recoge la raíz unitaria. En este caso se dice que el proceso es integrado de orden 1. De forma general se puede decir que es integrado de orden *d* $Y_t \sim I(d)$ cuando

$$\varphi_{p-d}(L)\Delta^d Y_t = \Theta_q(L)a_t \tag{16}$$

Por tanto, Un proceso Y_t es integrado de orden *d*, $Y_t \sim I(d)$, si Y_t no es estacionario, pero su diferencia de orden d, $\Delta^d Y_t$, sigue un proceso ARMA($p-d, q$) estacionario e invertible. El orden de integración del proceso es el número de diferencias que hay que tomar al proceso para conseguir la estacionariedad en media, o lo que es lo mismo, el número de raíces unitarias del proceso. En la práctica, los procesos que surgen más habitualmente en el análisis de las series temporales económicas son los I(0) e I(1) , encontrándose los I(2) con mucha menos frecuencia.

En definitiva, un modelo

$$\Phi_p(L)\Delta^d Y_t = \delta + \Theta_q(L)a_t \tag{17}$$

Es un modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles (p,d,q) o ARIMA(p,d,q) donde los polinomios autorregresivo estacionario ($\Phi_p(L)$) e invertible de medias móviles $\Theta_q(L)$ no tienen raíces comunes. Así pues *p* es el orden del polinomio autorregresivo estacionario, *d* es el orden de integración de la serie, es decir, el número de diferencias que hay que tomar a la serie para que sea estacionaria, y *q* es el orden del polinomio de medias móviles invertible.

5.1 Paseo aleatorio

Un proceso estocástico univariante no estacionario (Y_t) es un paseo aleatorio, ARIMA (0,1,0) cuando

$$Y_t = Y_{t-1} + a_t$$

Este proceso es no estacionario ya que su media es igual a Y_t pero su varianza es igual a $t\sigma^2$ dado que se compone de la suma de la secuencia aleatoria.

Un paseo aleatorio es un proceso AR(1) cuyo parámetro autoregresivo es 1. Un paseo aleatorio en primeras diferencias con $\mu = 0$ es un proceso de ruido blanco. La evolución de la serie no tiene una característica presente en los procesos estacionarios y que se denomina reversión a la media: la serie se mueve aleatoriamente hacia arriba y hacia abajo, sin mostrar ninguna inclinación a dirigirse a ningún punto en particular. Es decir, para este modelo el nivel promedio de la serie va cambiando de forma estocástica a lo largo del tiempo, por lo que se dice que este modelo tiene tendencia estocástica.

En lo que se refiere a la FAC del modelo se caracteriza porque sus coeficientes decrecen muy lentamente.

Un paseo aleatorio constituye el caso más sencillo de lo que suele denominarse un proceso integrado de orden 1 ó I(1).

El modelo puede presentar una deriva, expresada en la constante δ. Este parámetro de deriva tiene el mismo papel que el parámetro de la pendiente en el modelo determinista lineal. Pero, de la misma manera que el modelo de paseo aleatorio no tiene un nivel promedio al que volver, el modelo de paseo aleatorio con deriva no tiene una tendencia lineal a la que retornar cuando un shock estacionario lo aleja de la misma. La serie con tendencia determinista oscila aleatoriamente en torno a una tendencia lineal de pendiente constante y, si se separa de ella, tiende a retornar rápidamente, mientras que si la serie con tendencia estocástica se separa de la línea de tendencia de pendiente δ no tiende a volver.

6 Identificación. Diagnóstico. Predicción.

Una vez expuestas las características teóricas básicas de los modelos ARIMA, la cuestión central del análisis de series es el ajuste de uno de esos modelos para la explicación de una serie dada. Box y Jenkins describieron una metodología para este ajuste basada en cuatro etapas consistentes en:

1. Identificación del modelo que mejor se puede ajustar
2. Estimación de los parámetros.
3. Diagnósis de los residuos para comprobar que son, efectivamente, ruido blanco.
4. Por último, la predicción de valores de la serie.

Este procedimiento es iterativo. Además, se prefieren, en general, los modelos que sean capaces de representar la serie con el mínimo de parámetros posibles lo que se denomina parametrización escueta o parsimonia.

6.1 Identificación

El objetivo de la identificación es detectar la estructura no estacionaria, si existe, y, posteriormente, la estructura ARMA estacionaria. Por tanto, en un primer momento habrán de analizarse las posibles transformaciones que requiere el proceso para convertirlo en estacionario en media y varianza.

6.1.1 Estacionariedad en varianza

Una serie será estacionaria en varianza cuando pueda mantenerse el supuesto de que existe una única varianza para toda la serie temporal. Si la serie no es estacionaria en varianza, se utilizan las transformaciones estabilizadoras de varianza, es decir, las transformaciones Box-Cox

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{Y_t^{\lambda}-1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln Y_t & \lambda = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Las transformaciones Box-Cox incluye una familia infinita de funciones: raíz cuadrada, inversa, etc. Como las series económicas suelen ser positivas y sin valores cero, la transformación más utilizada en la práctica económica es la logarítmica.

Los instrumentos que se utilizan para analizar la estacionariedad en varianza de una serie son el gráfico de la serie original y de las transformaciones correspondientes.

6.1.2 Estacionariedad en media

El objetivo es determinar si la serie es estacionaria en media, es decir, si oscila en torno a un nivel constante o no. Para tomar esta decisión nos basaremos en las características que diferencian las series estacionarias de las no estacionarias. En particular, una serie es no estacionaria en media

- cuando presenta tendencia o varios tramos con medias diferentes.
- un proceso con alguna raíz unitaria presenta una función de autocorrelación muestral con un decaimiento muy lento, no siendo necesario que se mantenga próximo a la unidad

Como se ha señalado anteriormente, si la serie no es estacionaria en media se puede lograr la estacionariedad transformándola tomando diferencias. Así, si la serie no es estacionaria en media, se tomarán *d* sucesivas diferencias de orden 1 sobre la serie hasta obtener una serie estacionaria. No obstante, la determinación del número exacto de diferencias es complejo ya que es posible que haya raices autorregresivas proximas a la unidad y, por tanto, muy similares a un paseo aleatorio; y, por otro lado es posible caer en una sobrediferenciación.

Los métodos de identificación son, en general:

- Gráfico de la serie original y las transformaciones correspondientes, para observar si se cumple o no la condición de estacionariedad de oscilar en torno a un nivel constante.
- Correlograma estimado de la serie original y de las transformaciones correspondientes, para comprobar si decrece rápidamente hacia cero o no.
- Contrastes de raíces unitarias. El contraste más usado en este caso es el contraste de Dickey-Fuller , consistente en realizar un constraste de un modelo modificado, que es un modelo de regresión, como

  $$\Delta Y_t = \beta Y_{t-1} + a_t \beta = \phi - 1 \tag{19}$$

  Donde la hipótesis nula es que el valor de $\beta = 0$ frente a una hipotesis alternativa con $\beta < 1$. El test se realiza sobre un estadistico t habitual para un modelo de regresión, con los valores críticos tabulados al no seguir distribución conocida. Para AR(p) el test se denomina Dickey-Fuller aumentado y, en este caso, el modelo de regresión tiene la forma

$$\Delta Y_t = \beta Y_{t-1} + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + ... + \alpha_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + a_t \qquad \beta = \sum_{i=1}^{p} \phi_i - 1 \qquad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i} \phi_{p-i+j} \tag{20}$$

6.1.3 Identificación del modelo estacionario

Una vez determinado el orden de diferenciación, es preceptivo identificar los órdenes p y q del modelo. Las características dinámicas del proceso estacionario están recogidas en la función de autocorrelación, FAC, por lo que ésta será el instrumento básico para identificar los ordenes p y q del modelo ARMA adecuado para representar las características de la serie estacionaria Z_t ($Z_t = (1-L)^d Y_t$). Los coeficientes de autocorrelación muestral son:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t-k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{T} (Z_t - \bar{Z})^2} \tag{21}$$

Donde hay que comparar las funciones de autocorrelación muestrales con las FAC teóricas cuyas carácteristicas son que para el caso de los modelos MA(q) esta se anula para $j > q$, en el caso AR(p) decrece muy rápidamente sin anularse y en el caso ARMA(p,q) tiene un decrecimiento muy rápido pero no se anula.

Tanto para el AR(p) como para el ARMA(p,q) la identificación por este método no es sencilla pues coinciden ambos rasgos. Para ello se usa la función de autocorrelación parcial cuyos coeficientes de autocorrelación parcial p_k mide el grado de asociación lineal existente entre entre las variables Y_t e Y_{t-k} una vez ajustado el efecto lineal de todas las variables intermedias. Su calculo se puede obtener mediante la regresión:

$$Y_t - \bar{Y} = p_{k1}(Y_{t-1} - \bar{Y}) + ... + p_{kk}(Y_{t-k} - \bar{Y}) \tag{22}$$

donde la secuencia $\hat{p}_{kk}(k = 1, 2, ...)$ de coeficientes minimocuadráticos estimados en estas regresiones es la función de autocorrelación parcial.

En el caso de las FACP estas presentan las características que AR(p) esta se anula para $j > q$, en el caso MA(q) decrece muy rápidamente sin anularse y en el caso ARMA(p,q) tiene un decrecimiento muy rápido pero no se anula.

La identificación, en una primera aproximación, no tiene por qué ser exacta, pudiendo identificar pautas en el caso de los ARMA que facilite su identificación.

6.2 Diagnosis

Una vez seleccionado el modelo y estimados sus parámetros de acuerdo con los distintos métodos consistentes (Mínimos Cuadrados o Máxima Verosimilitud) el siguiente paso es estudiar si las estimaciones de los coeficientes del modelo son significativas y cumplen las condicio-nes de estacionariedad e invertibilidad y si los residuos del modelo tienen un comportamiento similar a las innovaciones, es decir, si son ruido blanco.

6.2.1 Análisis de coeficientes

El análisis de los coeficientes consiste en la determinación tanto de si su valor es igual a 1, como ya se ha especificado antes, o si son coeficientes significativos. El estudio de este segundo aspecto suele realizarse a través de una prueba t, tal y como se realiza con los modelos econométricos generales siendo el estadístico

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\sqrt{V(\hat{\beta}_i)}} \sim N(0,1) \tag{23}$$

6.2.2 Análisis de residuos

En el caso de un modelo ARMA correctamente identificado, la innovación puede expresarse como

$$a_t = \frac{\Phi_p(L)}{\Theta_q(L)} Y_t \tag{24}$$

que debe ser ruido blanco. Sus estimaciones deben comportarse como tal también, esto es, deben tener media cero, varianza constante y autocorrelaciones nulas.

Media 0 El contraste de la media 0 es posible efectuarlo mediante un análisis gráfico o, de forma más precisa, mediante el contraste de hipótesis nula de media 0 tal que

$$t = \sqrt{T} \frac{\bar{\hat{a}}}{\sqrt{V(\hat{a})}} \sim N(0,1) \tag{25}$$

Varianza constante Mediante el método gráfico de los residuos, si su dispersión es constante se puede concluir que la varianza de a_t también lo es.

Ausencia de correlación serial Si los residuos se comportaran como un ruido blanco, los coeficientes de la FAC y FACP muestrales deben ser prácticamente nulos para todos los retardos. También es posible realizar tanto contrastes de significatividad individual o conjunta para los coeficientes de autocorrelación. El contraste más usado para la significación conjunta es el propuesto por Ljung-Box.

Contraste de normalidad Como conclusión se comprueba que efectivamente la distribución que sigue la innovación es una distribución normal. Para ello se usa el estadístico de Jarque-Bera.

6.2.3 Elección entre modelos

Como se ha expuesto anteriormente, uno de los principios de selección de modelos es aquel que satisfaga mayor simplicidad. No obstante, existen otros criterios que justifican una selección distinta. Estos son el criterio de AIC (Akaike) y el SBC (Schwartz). De entre los modelos estimados se elegirá aquel que menores valores de ambos criterios ofrezca, prefiriendose el AIC.

6.3 Predicción

Suponiendo que el modelo que se ha estimado cumple con los requisitos estadísticos de significación, la última fase del proceso consiste en la predicción de valores para algún momento futuro basadas en el conjunto de información que se dispone. Denotando T como la última observación disponible, el objetivo es predecir el valor que tomará la serie en los periodos $T+\ell$. A la predicción $Y_{T+\ell}$ con información hasta el momento T la denotaremos como $Y_T(\ell)$.

En general, va a ser muy difícil determinar completamente la forma de la función de densidad sin hacer supuestos muy fuertes y poco realistas sobre la forma de esta función. Un objetivo menos ambicioso sería diseñar unos intervalos de confianza alrededor del valor $Y_{T+\ell}$ que permitirán una predicción a un cierto grado de confianza.

Por predictor óptimo (o predicción óptima) se denomina a aquel que es la mejor en el sentido de que minimiza una determinada función de pérdida. Lo más usual es minimizar el Error Cuadrático Medio de Predicción, por lo que diremos que $Y_T(\ell)$ es un predictor óptimo si minimiza el ECMP, es decir, si cumple que:

$$E[Y_{t+\ell} - Y_T(\ell)]^2 \leq E[Y_{t+\ell} - Y_T^*(\ell)]^2 \tag{26}$$

Se puede demostrar que, bajo condiciones de regularidad muy débiles, el predictor por punto óptimo viene dado por la esperanza condicionada al conjunto de información. Nada garantiza que esta esperanza condicionada sea una función lineal del pasado de la serie. Pero si el proceso sigue una distribución normal, se puede demostrar que la esperanza condicio- nada se puede expresar como una función lineal del conjunto de información.

6.3.1 Predicción por intervalo

La predicción óptima por intervalo se construirá a partir de la distribución del error de predicción ($e_T(\ell)$) que, bajo el supuesto de que $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$ es:

$$e_T(\ell) = Y_{t+\ell} - Y_T(\ell) \sim N(0, V(e_T(\ell))) \tag{27}$$

Donde, tipificando, se obtiente que

$$\frac{Y_{T+\ell} - Y_T(\ell) - 0}{\sqrt{V(e_T(\ell))}} \sim N(0, 1) \tag{28}$$

Por lo que el intervalo de predicción de probabilidad $(1-\alpha)$% es:

$$[Y_T(\ell) - \mathcal{N}_{\alpha/2}\sqrt{V(e_T(\ell))}, Y_T(\ell) + \mathcal{N}_{\alpha/2}\sqrt{V(e_T(\ell))}] \tag{29}$$

EJERCICIO 2

Área de Ciencias Actuariales

Tema 55. Fórmulas aplicables en las proyecciones económicas del sistema de pensiones de la Seguridad Social: número de pensiones, gasto en pensiones, estimación de la población activa, número de afiliados al sistema e ingresos por cotizaciones sociales.

Edición noviembre 2025

C.S Actuarios, Estadísticos y Economistas de la Administración de la Seguridad Social

Fórmulas aplicables en las proyecciones económicas del sistema de pensiones de la Seguridad Social: número de pensiones, gasto en pensiones, estimación de la población activa, número de afiliados al sistema e ingresos por cotizaciones sociales.

Introducción

La planificación económico-financiera requiere de un conjunto de materiales para establecer el equilibrio entre ingresos y gastos por prestaciones. Es necesario acudir a la demografía, biometría, estadística y economía exigiendo un análisis de esta relación y entre las variables endógenas y exógenas al propio sistema de previsión social.

Las variables endógenas son las que son impulsadas por el propio sistema, como el control del fraude, mejora en la gestión o modificaciones normativas- reglamentarias, que forman parte de la política de protección social y toma de decisión del gobierno. Mientras que las variables exógenas vendrían a ser la evolución demográfica y económica, vienen determinadas por la evolución de la población y el cuadro macroeconómico y las previsiones, así como los programas de estabilidad y que establecen unos valores para los parámetros básicos.

Las funciones de planificación económica y financiera de la Seguridad Social consisten en el desarrollo de las funciones económico-financieras (que establece el departamento ministerial correspondiente). En este sentido se refieren a la planificación y estudios económico-financieros y demográficos, la elaboración de informes económicos en relación a las disposiciones que incidan en la financiación y gasto de la seguridad social y el diseño, desarrollo y mantenimiento del sistema estadístico contable.

Así mismo el diseño técnico de un plan de previsión debe tener en cuenta la cobertura que se ofrece:

- Los individuos afectados
- El tipo y clases de prestaciones
- Las cuantías

La forma en la que se va a realizar la financiación (sistemas financieros) y cómo se va a verificar la suficiencia financiera del sistema en el que se fundamenta el plan de previsión.

Para ello se realizará un seguimiento que debe comprobar que se ejecuta el plan trazado así como la corrección de las posibles desviaciones que puedan ocurrir.

Todo esto debe llevarse a cabo a través de un plan de revisión y contraste de las variables que hayan intervenido en el planteamiento general, de forma que puedan rectificarse en cualquier momento, las previsiones.

Ejemplos de las variables que intervienen son:

A medio y largo plazo:

- Los elementos biométricos: Se debe estudiar y hacer hipótesis sobre la demografía, así como estimaciones que sirvan para establecer distintos valores de:
    - Probabilidades de muerte y supervivencia según edades (como mínimo)
    - Planteamientos multidecrementales (supervivencia en distintos estados, muerte por distintas causas)
- Elementos financieros y económicos:
    - Tipo de interés
    - Cuantía de las pensiones
    - Tasa de desempleo
    - Afiliación

A un **plazo mayor** se debe estudiar y ver la consistencia de

- Dentro de los elementos demográficos se analizará la evolución de:
    - La tasa de nupcialidad
    - La tasa de fecundidad y la de natalidad
    - La tasa de dependencia
    - La tasa de mortimorbilidad
    - El crecimiento poblacional
- Dentro de los elementos económicos, principalmente las estimaciones y proyecciones de crecimiento económico.
- Pero además se debe tener en cuenta posibles cambios en los elementos jurídicos y las políticas, como modificaciones en la previsión social, regulación de convenios colectivos, el campo de aplicación, ámbito de protección, etc.

El principio básico que ha de dominar en las distintas formas de cobertura es conseguir el **equilibrio entre las prestaciones y las aportaciones en un horizonte temporal determinado**. El equilibrio se establece en función del sistema financiero actuarial que se haya elegido para la protección social.

La **planificación financiero actuarial** es la necesaria realización de los estudios a medio y largo plazo con el objetivo de controlar u comprobar la viabilidad futura de los sistemas de protección.

Existen distintos procedimientos a aplicar en los distintos modelos en función de las repercusiones que se pretenden validar.

- Modelos actuariales autónomos
- Modelos econométricos
    - Técnicas de regresión
    - Otras técnicas
    - Modelos mixtos

La principal diferencia entre unos y otros es el criterio de estimación de los valores medios, siendo el método de mínimos cuadrados ordinarios más usado en las técnicas econométricas mientras que en las técnicas actuariales se usan más probabilidades promedio bajo supuestos de grandes números. La coordinación de ambos métodos reduce el número de variables exógenas (modelos mixtos).

Se desarrolla aquí los modelos actuariales (los econométricos son objeto de estudio en otros temas), que principalmente se basan en las proyecciones aplicadas a las variables demográficas y económico-financieras a medio y largo plazo.

Para ello, se deben observar las variables en un periodo de varios años así como los distintos cambios legislativos que han acontecido, haciendo escenarios con cambios legislativos que pueden acontecer en su caso.

Se usa el método de proyecciones, en las que se lleva un vector inicial de variables de t-1 a t.

Las **proyecciones financieras** de un escenario de seguridad social dependen de las siguientes **variables**:

- Nº de futuros cotizantes
- Promedio de ingresos de las cotizaciones
- Nº de futuros beneficiarios (pasivos)
- Cantidad de beneficios que será pagada en relación con los ingresos del pasado y con posibilidad de indexación
- La ingresos por inversión de la reserva

Todos estos factores dependen del entorno económico del escenario en el que se desenvuelva.

Para desarrollar asunciones robustas sobre el entorno económico futuro, es necesario en primer lugar, examinar las tendencias del pasado, las principales conclusiones que dibujan estas observaciones son la base para el desarrollo de proyecciones económicas y del mercado laboral consistentes en el largo plazo.

Las **variables económicas** necesarias para desarrollar un marco macroeconómico adecuado son:

- Crecimiento económico
- La separación del PIB entre remuneración de los trabajadores y remuneración del capital (dicho de forma amplia)
- Mano de obra, empleo y desempleo
- Salarios
- Inflación
- Tipos de interés

Las asunciones económicas generalmente son discutidas por expertos nacionales en los ministerios correspondientes, los actuarios sugieren y analizan alternativas en el largo plazo.

Por otro lado existen una multitud de aproximaciones, modelos y variables. Se describen algunas sucintamente de modo que se asegure la consistencia entre la mayoría de las variables económicas.

Variables económicas

Crecimiento económico

Las tasas reales de crecimiento económico, incremento de la productividad e inflación son variables exógenas en lo que a continuación se refiere.

El **incremento anual del PIB** resulta del incremento en el número de trabajadores junto con el incremento de la productividad por trabajador. En relación con el escenario de la proyección de la seguridad social un incremento en el número de trabajadores afecta al número de personas que contribuyen en el esquema social. El incremento en la productividad en el largo plazo normalmente afecta al nivel de salarios y por tanto en las cotizaciones, de ahí que el crecimiento del PIB tiene un impacto directo con el escenario de ingresos.

Para el corto plazo la tasa de crecimiento de PIB anual puede ser basada en las estimaciones publicadas por las organizaciones especializadas en las proyecciones económicas. Para el largo plazo la última tasa de crecimiento es la que generalmente establece el actuario como una variable exógena.

El **PIB nominal** es calculado al multiplicar el **PIB real** por el deflactor anual que corresponda, el cuál siempre es determinado expost. Su evolución futura está usualmente basada en asunciones exógenas sobre las futuras tasas de inflación.

El PIB nominal futuro es combinado con la asunción sobre la evolución de la composición de los salarios en el PIB para obtener la parte de éste que representa la remuneración de los trabajadores. La remuneración total de los trabajadores es usada más tarde como una combinación con el empleo por cuenta ajena, para determinar el promedio salarial.

Salarios

Basados en una asignación del PIB total nominal entre los ingresos del trabajo y los ingresos del capital, un primer promedio de salarios es calculado dividiendo el total de la remuneración (nº de veces que los salarios están contenidos en el PIB) por el total del número de trabajadores por cuenta ajena. La participación de salarios en el PIB es calculada desde el factor de distribución de ingresos de la economía del pasado y proyectada en relación a la probable evolución de la estructura de la economía.

A medio plazo el desarrollo real de los salarios se comprueba y corrige respecto al crecimiento de la productividad del trabajo. En situaciones específicas del mercado laboral los salarios crecerán o decrecerán más rápido que la productividad. Sin embargo si se estudia el largo plazo los salarios reales incrementarán y es lo que generalmente se asume.

Se asume que en el largo plazo hay un escenario de crecimiento del PIB y a participación en el PIB por los ingresos totales de los salarios en el periodo de proyección van de la mano, esto es, la tendencia es de crecimiento.

Las hipótesis sobre la distribución de los salarios requieren también de la simulación del impacto que tienen sobre los mismos el sistema de seguridad social. Hipótesis en las que se diferencien salarios por edad y sexo son necesarias cuando se establece un modelo así como tener en cuenta la dispersión de salarios entre cada uno de los grupos.

Inflación

La inflación representa el incremento general de los precios y se asocia con el seguimiento de los precios de una cesta de la compra (variante en el tiempo pero cuyos productos se mantienen durante largos periodos de tiempo) en intervalos regulares de tiempo. De una vez a otra el contenido de la cesta va cambiando y adaptándose a los cambios en los patrones de consumo del ciudadano medio. Para el propósito del actuario el IPC es frecuentemente usado como base estadística. En el largo plazo el deflactor del PIB y el IPC convergen (cuando no se usa la misma medida).

Las hipótesis sobre la inflación futura son necesarias para el estudio actuarial de proyección de la evolución de las pensiones, dado que éstas son ajustadas periódicamente para reflejar el incremento de precios en la economía y que no pierdan poder adquisitivo los pensionistas- Los datos del pasado sobre la inflación están generalmente disponibles y nos pueden ayudar a ver tendencias.

Tipos de interés

Los tipos de interés a corto plazo pueden ser proyectados a través de los tipos publicados por los bancos centrales del país en cuestión. En el largo plazo se deben ver como un ratio de beneficios sobre el nominal de las inversiones de la economía. Por tanto van ligados a la hipótesis hecha sobre la separación dentro del PIB de remuneraciones del trabajo y remuneraciones del capital. Sustrayendo la participación de los salarios del trabajo por cuenta ajena del PIB, se aísla el componente del capital. A través de las observaciones del pasado es posible estimar la participación del capital a través de los beneficios (intereses de capital) que se obtienen como ingresos del capital y proyectar esta participación en el futuro para determinar el nivel de intereses de capital. Para proyectar la inversión nominal en el sector privado es necesario proyectar el PIB nominal por sus componente de la demanda usando hipótesis plausibles sobre las participaciones en el futuro del sector privado y público, así como exportaciones e importaciones. El ratio proyectado de intereses de capital por inversiones nominales en el sector privado nos da un indicador de los niveles futuros de los tipos de interés.

Se tienen que realizar hipótesis igualmente respecto a la composición de las inversiones .

Otra consideración es el tamaño de las reseras del sistema de seguridad social en comparación con el total del ahorro del país. En países pequeños las reservas de la seguridad social tienen una fuerte influencia en el nivel de tipos de interés, en esos casos, al menos para el corto o medio plazo el actuario determinará el futuro tipo de interés en referencia directa con las políticas de inversión de la seguridad social.

Otras consideraciones

Generalmente se obtienen proyecciones económicas realizadas por instituciones públicas, oficinas de estadística y el propio gobierno. Es necesario que el actuario tenga en cuenta dichas proyecciones en al menos uno de sus escenarios.

Para la evaluación actuarial del esquema de seguridad social se usa las hipótesis bajo el concepto de mejor estimación, en contraste con el seguro privado que siempre tiende a tener una visión más conservadora, especialmente si se trata de nuevos productos. El sistema es financiado por trabajadores y empresarios por lo que cualquier hipótesis debe estar estrechamente ligada con las variables macroeconómicas vistas anteriormente así como las de población.

Mano de obra, empleo y desempleo

La proyección de la mano de obra o fuerza de trabajo es el **número de personas disponibles para trabajar**. La tasa se obtiene sobre la población en general.

El dato de la **población activa** suele estar disponible y generalmente desagregado por edad, sexo y otras variables. Estos datos se obtienen de las oficinas de estadística nacionales o institutos de estadística y se recomienda que el actuario utilice los mismos para sus proyecciones de empleo y desempleo.

Una vez la fuerza total de trabajo, población activa, ha sido proyectada el empleo agregado puede ser obtenido dividiendo el PIB real por el promedio de productividad del trabajo (output por trabajador).

El **desempleo** se mide como la diferencia entre la población activa proyectada y el total de empleo proyectado.

Estimación de la población activa

A la población proyectada se llega en base a las asunciones que se tomen en cuestión de mortalidad, fertilidad y migraciones aplicadas a una distribución de la población en un momento dado.

El marco demográfico para la evaluación debería empezar, idealmente, de proyecciones nacionales, estadísticas nacionales que son habitualmente utilizadas para dar forma a las proyecciones de población. En este sentido el uso de las estadísticas nacionales puede permitir que el uso de la misma fuente por parte de los que realizan la proyección poblacional y de los que realizan las evaluaciones actuariales faciliten la comunicación entre las partes. Sin embargo, las proyecciones de población no se extienden a más de 20 años como mucho mientras que esto resulta insuficiente para la tarea del actuario que requiere proyecciones de al menos 50 años, de ahí que el actuario deba extender las proyecciones nacionales cuando sea esto posible con el objetivo de satisfacer la cobertura de tiempo que éste requiere para la evaluación actuarial.

Fertilidad

Expresada habitualmente en términos de tasas de fertilidad (bruta y específica)

Actualmente las tasas de fertilidad están cayendo en los países desarrollados. En los subdesarrollados si bien sigue siendo muy alta, se prevé un decaimiento en los próximos años. Las proyecciones de población que realiza la ONU tienen en cuenta diferentes escenarios de evolución de fertilidad.

Mortalidad

Cuando el modelo lo permita, las asunciones sobre mortalidad deberían ser dinámicas, incluyendo una provisión para posibles mejoras en la esperanza de vida del futuro. Esta particularidad es muy importante en el caso de las proyecciones de la seguridad social que están pensadas para periodos de 50 o más años. Se debe tender a otros métodos más sofisticados, como es el caso de los actuarios de la OASDI (Old Age, survivors and disability insurance) de Estados Unidos proyectan la mejora en la esperanza de vida para cada una de las causas de mortalidad y combinan luego todas a fin de obtener una medida global de mejora en la esperanza de vida para todas las causas. La metodología de la ONU por otra parte está basada en la proyección de la esperanza de vida cuando naces y asentada en el modelo de tablas de vida.

En algunos países es necesario hacer provisiones específicas para las tasas de mortalidad debido a un gran número de muertes prematuras causadas por pandemias como el VIH, COVID-19 u otras posibles pandemias, en tanto que estas muertes pueden afectar a la población y eventualmente, generar una alta tasa de dependencia. En España en los años 80-90 existe un incremento importante de mortalidad en edades jóvenes debido al impacto de la heroína.

Migración

La migración es un factor volátil en la evolución de la mayoría de las poblaciones. Las asunciones que se hagan sobre este fenómeno demográfico deberían empezar con un cuidadoso análisis de la migración en el pasado, para identificar tendencias. En algunos países las migraciones so debidas o vienen como resultado de problemas políticos, guerras, etc. en cuyo caso este tipo de migraciones deben ser tenidas en cuenta en las asunciones que se realicen sobre esta magnitud demográfica, intentando buscar el patrón que subyace bajo estos movimientos.

La migración puede darse también como resultado de políticas gubernamentales que permiten la entrada de cierto número de inmigrantes por año, políticas que pueden ser usadas como un camino de establecimiento de asunciones sobre migración a corto plazo. En el largo plazo la volatilidad de estos factores, la dificultad de anticiparse a cambios políticos y la breve información que generalmente está a disposición hace que las proyecciones de migración sean poco robustas, por lo que en ocasiones se asume que es nula.

Población activa: Población en edad de trabajar - Población inactiva.

Tasa de actividad: (Población activa / Población en edad de trabajar) x 100.

Tasa de paro: (Población desempleada / Población activa) x 100

Tasa de ocupación: Representa el porcentaje de las personas con empleo sobre la población de 16 y más años.

Perceptores de ingresos Son todas aquellas personas que, en la semana de referencia, percibieron algún tipo de ingreso económico.

- El concepto de ingreso económico incluye tanto el salario, como los diferentes tipos de pensiones (jubilación, prejubilación, discapacidad, ...) o prestaciones por desempleo.

Número de pensiones, gasto en pensiones, ingresos por cotizaciones sociales.

Desarrollo de la población asegurada

Ratio de cobertura

Ratio específico de cobertura: Nº contribuyentes edad x periodo t grupo z / Nº de trabajadores de la economía edad x periodo t grupo z

La cobertura puede ser menor porque no se tenga en cuenta trabajadores de otros regímenes especiales o de autónomos, por ejemplo. Otros grupos pueden ser contribuyentes voluntarios. En la práctica las series temporales de ratios de cobertura son calculadas comparando el número actual de contribuyentes (activos) con la población cubierta. De esta manera en ocasiones existen discrepancias entre las definiciones de ratio de cobertura.

Un número de factores administrativos pueden contribuir igualmente a reducir el ratio de cobertura aún más: Conveniencia entre trabajadores y empresarios para evadir parte de sus contribuciones, economía sumergida, contratos de becarios o prácticas sin salarios y por tanto sin cotizaciones.

Una vez determinada la tasa actual de cobertura, y documentado su cálculo, la proyección ha de tener en cuenta la evolución de ésta. La proyección se basará en patrones del pasado en esta tasa, junto con factores externos por las que puede verse influida como campañas o políticas contra la evasión.

Componentes de la población asegurada

La población asegurada es un subconjunto del total de los trabajadores de una población. Es fácil determinaren cualquier momento de tiempo, los componentes de la población y el porcentaje que realmente contribuye al esquema de seguridad social. Pero la población de activos no es estática y pasan de ser empleados a desempleados y viceversa, incluso de población activa a inactiva y viceversa.

Para un año dado, las personas aseguradas pueden ser separadas en dos grupos:

- Activos que han cotizado hasta un determinado punto del año
- Inactivos que han cotizado en el pasado en algún momento (pero no en el año dado) y han acumulado derechos bajo el sistema.

Empleados	Desempleados		Inactivos
	Que reciben prestaciones	Que no reciben prestaciones o reciben subsidios	
Cotizan	Cotizan alta asimilada	No cotizan	No cotizan

Pero durante el curso de su vida profesional algunas personas aseguradas pueden tener periodos de desempleo o inactividad, sin embargo su registro de cotizaciones se mantiene en el esquema del sistema de seguridad social. Estas personas incluso pueden ser beneficiarias de sus derechos durante el periodo de inactividad (por ejemplo una incapacidad que ocurra en periodo de inactividad a una persona que tiene carencia suficiente como para acceder a la prestación contributiva por incapacidad), y cuando éstas regresan a la actividad se tienen en cuenta sus servicios pasados.

Por tanto el modelo actuarial debe ser capaz de simular estos movimientos entre actividad e inactividad de las personas protegidas.

Existen diferentes métodos para proyectar el número de personas protegidas.

Bajo un método de cohorte, los decrementos anuales por edad y por sexo son aplicados a los activos existentes en el grupo, reflejando todas las posibles causas de eliminación (por jubilación, incapacidad, muerte...). Cada año la categoría por edad y sexo es incrementada por un número ficticio de nuevos activos. El número total ficticio de nuevos activos entrantes es determinado sobre las hipótesis de base que se hayan tomado sobre el crecimiento del empleo y tasa de cobertura.

Bajo una hipótesis agregada se comienza proyectando la población empleada por sexo y edad y se aplica a esta proyección una adecuada tasa de cobertura para cada edad y sexo. Este último método asegura consistencia sobre el largo plazo entre el marco macroeconómico y las proyecciones actuariales del número de personas protegidas. Sin embargo requiere de varios ajustes para que refleje adecuadamente el comportamiento en relación con la jubilación (costumbres, modas, políticas..) y los movimientos entre el estado de actividad e inactividad.

Nuevas entradas y reentradas

La evaluación del esquema de seguridad social está usualmente hecha utilizando el método de grupo abierto, esto supone que cada año un número de nuevas personas entra a formar parte de la población activa y a participar en la escena general. Además de nuevas entradas (generalmente de edades tempranas) existen contribuyentes que habían dejado de cotizar y que regresan de nuevo a la escena. El tratamiento para estas poblaciones y las hipótesis en relación a sus movimientos dependen de la aproximación que se realice (por cohorte o agregada). El número total de nuevos entrantes y re-entrantes en un año debe ser consistente con las proyecciones actuariales en relación a la tasa de incremento de la población empleada.

Bajo la aproximación por cohorte, las hipótesis son establecidas según la distribución de entradas y reentradas por edad y sexo y estas distribuciones deben reflejar la evolución proyectada de la estructura de edad y sexo de la población proyectada.

La aproximación clásica para el número total de nuevas entradas es estimada sobre la base del incremento proyectado para el total de la población protegida., distribuido por edad y seco n base al esquema observado en el pasado y a la evolución que se espera.

Bajo la aproximación agregada, el número de nuevas entradas y rentradas se consigue comparando el número de cotizantes a la edad x y en el momento t con el mismo número en la edad x+1 y momento t+1, teniendo en cuenta todos los posibles caminos que los cotizantes tienen para dejar su estatus de cotizante entre t y t+1.

Sea Ac(x, t) el número de personas activas de edad x en el año t que han hecho al menos una contribución al sistema durante el año.

Sea S(Ac(x,t)) un subconjunto de Ac(x, t) de personas que todavía están inactivas un año después. Esto es, ni se han invalidado ni han muerto el pasado año.

$$S(Ac(x,t)) = Ac(x,t) - VAC(x,t) - DAC(x, t)$$

Donde VAC(x,t) representa los activos de edad x que han pasado a estado de incapacidad en el periodo t y DAC(x,t) los activos que han fallecido con edad x en periodo t

Se consideran las siguientes situaciones:

S(Ac(x,t))>Ac(x+1,t+1) entonces la población por categoría de edad y sexo ha disminuido durante el año, por jubilaciones o por movimientos desde activo a inactivos. En este escenario la hipótesis debe ser hecha en proporción al decrecimiento por la jubilación y la proporción de decrecimiento por movimientos de activo a inactivo.

S(Ac(x,t))<Ac(x+1,t+1) la población por estructuras de edad y sexo ha incrementado esto debe ser debido a la entrada de nuevos contribuyentes o la reentrada de anteriores contribuyentes que pasaron a inactivos y vuelven a estar activos. En este escenario las hipótesis deben ser hechas en proporción a entradas nuevas y reentradas nuevas. Esta distribución normalmente se basa en la edad, dado que las nuevas entradas son generalmente gente joven. La experiencia pasada nos sirve para especificar esta distribución.

Bajo la aproximación agregada se puede encontrar dificultades particulares cuando el número de personas que dejan de ser activas coincide con el número de nuevas entradas Una serie de ajustes son necesarios en este punto para construir un modelo consistente y para que la evaluación actuarial produzca resultados apropiados, especialmente en las proyecciones a corto plazo.

Proyecciones de ingresos por cotizaciones

La proyección de los ingresos por cotizaciones requiere hacer hipótesis sobre el crecimiento anual y la distribución de las mismas, la evolución de los topes y la densidad de las cotizaciones.

Crecimiento de ingresos por cotizaciones

La evolución de estos ingresos se considera

- Componente individual: refleja el incremento experimentado por el trabajador por sus promociones, méritos, etc. Esta componente se releja en el uso de una escala de salarios la cual usualmente está construida en base a la edad, aunque también por sexo. Sin embargo se puede considerar la construcción de una escala de salarios en base a los años de servicio si se considera que esta va a dar mejor resultado en la componente individual.

- Componente colectiva que tiene en cuenta el incremento general en los salarios observados en la economía. Esta componente representa las ganancias de productividad que generalmente quedan reflejadas (al menos en el largo plazo)en el nivel general de salarios.

Al modelar las proyecciones de salarios es importante asegurarse que tras tener en cuenta la componente individual de la escala de salarios, el resultado general de incrementos salariales es consistente con el marco macroeconómico establecido en la proyección. Una forma de mejorar este objetivo es primero determinar el futuro del promedio anual de ingresos para la población general protegida y entonces distribuir estos por edad en concordancia con la hipótesis asumida para la escala de salarios.

Si la participación se limita a un sector de la economía que se beneficia de mejores salarios que el resto de los trabajadores es apropiado al menos en el corto plazo tener una hipótesis particular para el crecimiento en este sector que para el resto del esquema del sistema.

Distribución de las ingresos

Una hipótesis de distribución de salarios para cada cohorte de participantes tiene que ser especificada cuando el nivel de beneficio o la tasa de contribución es una función del salario. En el caso del esquema de las pensiones usualmente existen topes máximos y mínimos. La hipótesis de que estas ingresos en una edad particular están distribuidas bajo una lognormal es usualmente utilizada, sin embargo, el número de personas con altos ingresos pueden quedar infraestimadas considerando la alta concentración de la riqueza. La distribución lognormal tiene las siguientes características:

- Rango de valores positivos y 0 , esto es, de (0,infinito)
- No simetría alrededor de la media
- Una cola larga (para representar ingresos altos de poca frecuencia)

Debido a su no simetría alrededor de la media, ésta resulta dar un valor muy alto para el trabajador medio mientras que realmente la proporción que puede ganar por debajo de la misma es más de un 50 % lo que hace que sea poco robusta.

La forma exacta de la logNormal depende de la especificación de dos parámetros, el valor de la media y el de la dispersión. La dispersión medida en términos absolutos (desv. Típica) o relativos (CVP).

En base a los datos que se tengan se puede estimar ambos parámetros (ver EMV de parámetros lognormal)

La distribución de los salarios de la población es una función de la escala de salarios y la distribución de los mismos por edad. Se asume que cada edad sigue una lognormal pero esto no significa necesariamente que la distribución de ingresos siga una logormal.

Total Ingresos versus ingresos cotizables

Una vez el total de ingresos tiene su distribución y han sido proyectados entonces es posible proyectar los ingresos cotizables teniendo en cuenta los parámetros que limitan la cobertura en el esquema. Por ejemplo, se asume que los ingresos se distribuyen como una lognormal puede existir un límite, un techo, a partir del cual el tener más ingresos por parte de los trabajadores no supone un mayor ingreso por parte del sistema de seguridad social al existir un tope máximo.

Densidad de las cotizaciones

Proyectado los niveles de salarios se debe calcular la cantidad de ingresos por cotizaciones que realmente serán pagados dado que algunos trabajadores pueden estar empleados solo parte del año lo que supone una reducción sobre los ingresos reales por cotización. La densidad de las cotizaciones representa el factor que es aplicado a la tasa anual de salarios para determinar la cantidad de salarios sobre los cuáles se calculan las cotizaciones. La densidad de las cotizaciones varía por edad y por sexo.

La densidad de las cotizaciones puede definirse como la proporción del año financiero durante el cual el promedio de personas activas ha hecho contribuciones al sistema. Esto es, puede ser definido como un ratio del número de contribuyentes durante el año sobre el total de asegurados que hicieron al menos una contribución durante el año. Para computar los factores de densidad los datos suelen obtenerse por número de meses cotizados, u otro periodo si éste resulta más apropiado, y por edad.

Los factores de densidad son calculados para cada edad como el promedio del número de meses de contribución entre 12.

Respecto a los trabajadores autónomos se dependerá de la situación jurídica y habrá que tener en cuenta la viable manipulación que estos trabajadores pueden tener sobe sus ingresos reales, es por ello que no suelen incluirse en los cálculos generales, sino por separado.

La proyección de los factores usualmente empieza observado el pasado, desde este punto puede ser asumido que los factores de densidad estarán relacionados cada año con cambios en las tasas de empleo (dado que es el factor principal que afecta a esta densidad). También se ha de tener en cuenta en la proyección las políticas que incrementen el cumplimiento de la normativa y por tanto reduzcan la posible evasión de cotizaciones.

Acumulación de derechos

En ocasiones cuando un riesgo es cubierto bajo alguna de las escenas del esquema (jubilación, muerte o incapacidad) ocurre que para poder establecer el derecho sobre una persona, y su elegibilidad para acceder al mismo , está en términos de meses o años de cobertura del pasado. En ocasiones algunos sistemas pueden igualmente ofrecer una compensación en lugar de una renta, o un subsidio, si los años que se han cotizado son menores que los que se debían para acceder al derecho. Las fórmulas de pensión generalmente usan un número de años o meses de servicios como parámetros para concluir el derecho (es como créditos que acumulan)

Observando los servicios en el pasado para obtener una distribución de frecuencias por edad y sexo . Bajo la base de que el stock inicial de periodos acumulados con la población actual existente nos puede dar una idea de la acumulación que habrá de derechos para una fecha de evaluación posterior. Estas hipótesis deben ir de la mano con la hipótesis de densidad de las cotizaciones.

Los créditos del pasado son añadidos a los nuevos que van emergiendo cada año como resultado de las cotizaciones pagadas por los contribuyentes. Es necesario obtener la distribución de estos créditos tanto para los activos como para los inactivos. Además de tener en cuenta posibles provisiones que permitan créditos adicionales para situaciones especiales como la incapacidad antes de la jubilación.

Incidencia de la Incapacidad

Dos aspectos se estudian aquí: la incidencia de la incapacidad en la población y la terminación de la misma (recuperación, muerte o jubilación)

El número de nuevos casos de pensiones de incapacidad durante el pasado es un buen punto de partida y se usa para estimar las tasas de incidencia del futuro. Para estimar la tasa de incidencia se deben recoger los datos por edad y por secos y debe hacerse sobre la población protegida. La incidencia de invalidez representa la probabilidad de que una persona asegurada pase a estado de incapacidad durante los años venideros en concordancia con la definición de invalidez que se determine en el esquema del sistema de seguridad social. Esto supone una gran diversidad de definiciones de invalidez según los diferentes sistemas de seguridad social, así como una diversidad en el tratamiento administrativo de las instituciones, de ahí que sea importante usar la experiencia específica del propio país para generar números correctos. La tasa de incidencia de invalidez puede ser determinada por edad y sexo. El problema que se da en muchos casos es la falta de experiencia, o datos estadísticos poco fiables, o escasos, dado que los casos de incapacidad son aislados, por lo que la experiencia del pasado puede no cubrir las expectativas del futuro. En estas ocasiones se puede usar un patrón por edad y sexo, una tabla estándar de invalidez promediada para poder reproducir un número adecuado estimado de futuros pensionistas por incapacidad. Los factores a tener en cuenta son, la población asegurada, la tasa de incidencia de incapacidad y la probabilidad de que una persona cumpla los criterios de acumulación de derechos para poder recibir la pensión.

La pensión de invalidez puede terminarse por muerte o recobro de la pensión. Es necesario contar o generar con una tabla completa con las tasas de terminación de incapacidad por edad y sexo. Estas tablas en ocasiones son seleccionadas y reflejan el factor de mortalidad y el de inicio de incapacidad. En este caso los datos sobre personas terminadas pueden ser también recolectados de acuerdo a la duración de la incapacidad.

Legitimación de los beneficiarios

El conocimiento de la estructura de la familia de las personas aseguradas es necesario de cara a proyectar los beneficios que tendrán los supervivientes. Las hipótesis necesarias sobre las que se debe girar son la probabilidad de tener esposa o esposo en el momento de la muerte, la diferencia de años entre ambos, el promedio del número de hijos susceptibles de recibir la pensión de orfandad y la edad promedio de estos hijos.

Métodos de proyección – Número de pensiones

Se usa principalmente el modelo mixto para proyecciones demográficas (censos de activos y pasivos, por edades y sexos) y financieras (coste de las pensiones actuales y las estimaciones a futuro que tendrán los supervivientes, así como nuevas incorporaciones).

Se debe justificar el uso de las bases técnico-actuariales:

1) Situación: colectivo de pensionistas origen para tratarlos como un colectivo cerrado.
    a. Los pensionistas salen del grupo por:

        i. Fallecimiento
        ii. Pérdida de condición de pensionista
        iii. Alcanzar cierta edad (como orfandad con edad límite)
    b. La cuantía:
        i. Será la que inicialmente tiene en el momento de la proyección
        ii. A medida que avanza la proyección se asocia a la pensión que corresponde al momento de estudio.

$$N_{i,n+1} = N_{i,n} \cdot P_x$$

$N_{i,n+1}$: Nº de personas que ingresaron en el colectivo en el año i y sobreviven n+1 años después

P_x: probabilidad de sobrevivir un año más a los individuos de edad x

Generación/Años	1	2	..	s	...	n
1		N_{12}		N_{1s}		N_{1n}
2		N_{22}		N_{2s}		N_{2n}
..						
s				N_{ss}		N_{sn}
..						
n						N_{nn}
Sumas	N_1	$\sum_{i=1}^{..} N_{i2}$		$\sum_{i=1}^{s} N_{is}$		$\sum_{i=1}^{n} N_{in}$

2) Tratamiento de activos: número de afiliados por posibles nuevas pensiones causadas.

    a. El número de activos puede salir del grupo de activos (y entrar en pasivos) será, para cada edad:
        i. Jubilación: probabilidad de jubilarse a cada edad, teniendo en cuenta la legislación y la probabilidad de llegar vivo a dicha edad.
        ii. Fallecimiento: probabilidades de supervivencia
        iii. Incapacidad: probabilidades de incapacitarse (por accidente, por enfermedad) teniendo en cuenta la contingencia (común o profesional)

$$l_{x+n}^{a} = l_{x}^{a} \cdot {}_{n}p_{x} \cdot \prod_{h=x}^{Z}(1-i_h)\prod_{h=x}^{Z}(1-j_h)$$

l_{x+n}^{a}: nº de supervivientes activos a la edad x+n
l_{x}^{a}: nº de supervivientes a la edad x

${}_{n}p_x$: probabilidad de que una cabeza de edad x sobreviva a x+n
i_h: probabilidad de incapacitarse a la edad h
j_h: probabilidad de jubilarse a la edad h
z: edad pensionable para la jubilación.
x debe estar entre la edad mínima permitida para trabajar y omega.
n: tiempo de permanencia

b. Cuantías: para el estudio de las cuantías debe estudiarse las pensiones actuales y la posible pensión que recibirán en función de sus salarios.

Volumen total de recursos

El volumen total de recursos vendrá determinado por la proyección del número de cotizantes con sus bases de cotización y tipo de cotización, estimando las cuotas que se espera recaudar en cada uno de los ejercicios siguientes:

$$\alpha_i \sum_{x=16}^{65} L_{xi}S_{xi} + O_{R_i} = \sum_{j=1}^{5} \sum_{x=h}^{\omega} N_{jxi}\, P_{jxi} + \sum_{x=16}^{Z} L_{xi}\,(IT)_{xi} + G_{D_i}$$

Ingresos del sistema

$$\alpha_i \sum_{x=16}^{65} L_{xi}S_{xi} + O_{R_i}$$

α_i: Tipo de cotización del año i

L_{xi}: Nº de cotizantes de edad x en el año i

S_{xi}: base de cotización de los cotizantes de edad x en el año i

O_{R_i}: recursos diversos del sistema

Gastos del sistema

$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{x=h}^{\omega} N_{jxi}\, P_{jxi} + \sum_{x=16}^{Z} L_{xi}\,(IT)_{xi} + G_{D_i}$$

N_{jxi}: número de pensiones de la clase j a la edad x en e año i

j=1-5 (entendiendo 5 clases de prestaciones: jubilación, incapacidad, viudedad, orfandad y favor de familiares)

P_{jxi}:pensión de clase j, edad x en el año i

$(IT)_{xi}$: otras prestaciones económicas a la edad x en el año i (por ejemplo la Incapacidad Temporal, ésta está sujeta al número de cotizantes que están en esta situación: L_{xi}: Número de cotizantes

G_{D_i}: gastos diversos en el año i

Número de afiliados al sistema

Este epígrafe está tomado de ***Metodología de estimación de factores estacionales para series de afiliación mensuales y diarias enero de 2025 Ministerio de Inclusión, Seguridad Social y Migraciones***

AFILIACIÓN MEDIA DEL MES: Es el promedio de los que están de alta en cada uno de los días laborables del mes.

Ventaja de este indicador: Es más estable que la cifra del último día y refleja mejor como ha sido la afiliación en el conjunto del mes.

Inconvenientes: Está influido por el momento del año. Por ejemplo, la afiliación baja habitualmente en agosto y diciembre.

AFILIACIÓN DESESTACIONALIZADA: Es una estimación en la que se corrige la influencia del momento del año, según la experiencia de los ejercicios anteriores.

La estacionalidad afecta a muchas series temporales económicas, que registran un patrón de variación de periodicidad anual. Éste se manifiesta mediante fluctuaciones del nivel de las series a lo largo del año que se reproducen de forma sistemática todos los años y que son, en parte, independientes de su comportamiento a largo plazo. Las causas profundas de esta regularidad suelen estar relacionadas con el clima, el calendario laboral o las costumbres. Los movimientos debidos a la estacionalidad son, a menudo, lo suficientemente amplios como para enmascarar otras características de los datos que pudieran resultar de interés, como es la tendencia a largo plazo. El ajuste estacional es un proceso de estimación y eliminación de los efectos debidos a la estacionalidad que, idealmente, resultará en una serie libre de fluctuaciones estacionales (relacionadas con la época del año), que conserva intactas el resto de características. El empleo y la afiliación fluctúan con el momento del año de una forma regular, resultando pertinente la desestacionalización de las series para su mejor interpretación.

El método que se utiliza actualmente para la desestacionalización en la Seguridad Social e corresponde con el enfoque de modelización de series temporales ARIMA (p,d,q), donde p hace referencia al orden autorregresivo del proceso, d al orden de integración y q al orden de la media móvil.

Este esquema se aplica tanto para la parte regular como para la parte estacional, es decir, obteniéndose un modelo SARIMA de la forma:

$$ARIMA(p, d, q) \times ARIMA(P, D, Q)_{12}$$

El modelo es estimado por Máxima Verosimilitud y el software dispone de opciones automáticas y a elección del usuario, permitiendo también la incorporación de regresores

El ajuste estacional de series temporales diarias reviste mayor complejidad que el de las series mensuales, por la posible presencia de ciclos estacionales múltiples. Además del ciclo anual, que se aprecia en el distinto nivel de cada mes en relación con la media del año, pueden existir patrones intra-mensuales que se repiten todos los meses, o semanales. La propia naturaleza de los datos diarios de afiliación, solo disponibles para días laborables, induce una estacionalidad de periodicidad semanal caracterizada por incrementos de afiliación en los lunes y descensos en los viernes. También está presente una regularidad en torno a los últimos días de cada mes, que presentan un descenso más intenso que cualquier otro día del mes. Sin embargo, estas regularidades no tienen una periodicidad fija ya que los meses tienen distinta duración (28, 30 y 31 días), hay años bisiestos y fiestas móviles como la Semana Santa, etc. En consecuencia, los ciclos estacionales tienen una periodicidad media que no es un numero entero, como ocurre con los datos trimestrales (la periodicidad en un año es 4) o los mensuales (la periodicidad en un año es 12), sino fraccionario. Así, la periodicidad del ciclo anual con datos diarios es 365,24 y la del ciclo mensual es 30,44.

Ventaja de este indicador: Es más fiable para medir la tendencia y para comparar meses consecutivos mediante la variación acumulada.

Inconvenientes: No es adecuado para medir niveles absolutos de personas que efectivamente estuvieron afiliadas ese mes, ya que es una construcción estadística

Bibliografía

Practice in Social Security Pierre Plamondont et al.

Economía y Técnica de la Seguridad Social. Financiación y Planificación. Ana Vicente

Metodología de estimación de factores estacionales para series de afiliación mensuales y diarias enero de 2025 Ministerio de Inclusión, Seguridad Social y Migraciones