



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE TRABAJO Y
ASUNTOS SOCIALES

SECRETARÍA DE ESTADO DE LA
SEGURIDAD SOCIAL

DIRECCIÓN GENERAL DE
ORDENACIÓN DE LA SEGURIDAD
SOCIAL

DEMOGRAFÍA, INMIGRACIÓN Y VIABILIDAD DEL SISTEMA DE PENSIONES. ANÁLISIS Y PROYECCIONES PARA ESPAÑA (Capítulo 1)

RESPONSABLE: Prof. JOSEP GONZÁLEZ CALVET

Investigación financiada mediante subvención recibida de acuerdo con lo previsto en la Orden TAS/1587/2006, de 17 de mayo (subvenciones para el Fomento de la Investigación de la Protección Social –FIPROS-)

La Seguridad Social no se identifica con el contenido y/o conclusiones de esta investigación, cuya total responsabilidad corresponde a sus autores.

***Demografía, Inmigración y Viabilidad
del Sistema de Pensiones. Análisis y
Proyecciones para España***

Josep González Calvet

Resumen

En este trabajo se analiza la viabilidad a largo plazo del sistema de pensiones y de protección al desempleo españoles. Para ello se construye un modelo de proyección demográfica y económica y se realizan simulaciones para múltiples escenarios desde 2009 a 2100. Los escenarios demográfico y migratorio van desde una fecundidad de 1,3 hijos/mujer hasta 2,1 hijos/mujer y desde una inmigración neta nula a una entrada neta de 400000 personas/año. La esperanza de vida para 2060 será de 90 años. Para la evolución económica se considera que habrán fluctuaciones cíclicas de la tasa de desempleo desde el 8% al 22%, con un promedio del 15%.

Como resultado se obtiene que la población española experimentará un importante y progresivo envejecimiento en las próximas 4 décadas, dándose en la década de 2050 la peor coyuntura demográfica. Como consecuencia se reducirá drásticamente el ratio activos/pasivos a entre 1,06 y 1,79, según la fecundidad e inmigración. Ello conllevará un déficit anual de entre el 2% y el 7% del PIB hacia la década de 2050, aunque con posterioridad se estabilizaría a menores niveles. La financiación de este déficit mediante aumentos de cotizaciones sería posible con aumentos de la productividad de entre el 2,2% y el 4,8% anual, según el escenario, lo que permitiría un aumento del salario real neto del 1% anual, sin afectar ni la tasa de beneficios ni los costes laborales unitarios.

Tabla de Contenido

Resumen	ii
Presentación	1
CAPÍTULO 1	
La Dinámica Demográfica	4
1.1 Introducción	5
1.2 El modelo demográfico en tiempo continuo	9
1.3 Los modelos demográficos matriciales y de tiempo discreto	12
1.4 Un modelo demográfico en tiempo discreto	14
1.5 Proyección de la fecundidad	18
1.6 Proyección de la mortalidad	26
CAPÍTULO 2	
Un modelo de crecimiento cíclico	37
2.1 Introducción	38
2.2 Macrodinámica postkeynesiana	40
2.3 Un modelo genérico de acumulación cíclica	41
2.3.1 <i>Definiciones y relaciones básicas</i>	41
2.3.2 <i>Existencia de un equilibrio y análisis de su estabilidad</i>	45
2.4 Especificación del modelo básico	46
2.4.1 <i>Las relaciones funcionales</i>	46
2.4.2 <i>Análisis de la estabilidad</i>	49
2.4.3 <i>Simulación y análisis de los parámetros</i>	53
2.5 Interpretación económica del modelo básico	56
2.6 Ampliaciones del modelo	56
2.6.1 <i>El sector financiero</i>	56
2.6.2 <i>Incorporación del sector exterior y del sector público</i>	61
CAPÍTULO 3	
Simulaciones	67
3.1 Introducción	68
3.2 Las simulaciones de la población	69
3.2.1. <i>Proyecciones de la población en ausencia de migraciones</i>	69
3.2.1.1. <i>Hipótesis demográficas</i>	69
3.2.1.2. <i>Principales resultados</i>	71
Hipótesis de fecundidad 1,3 hijos/mujer	71
Hipótesis de fecundidad 1,4 hijos/mujer y 1,46 hijos/mujer	75
Hipótesis de fecundidad 1,6 hijos/mujer	77
Hipótesis de fecundidad 1,71 hijos/mujer (INE)	80
Hipótesis de fecundidad 1,8 hijos/mujer	82
Hipótesis de fecundidad 2,1 hijos/mujer	84
Pirámides de población proyectadas	86

3.2.1.3 <i>Proyección de las poblaciones activa y jubilada</i>	90
Proyecciones de la población activa	90
Proyecciones de la población jubilada	93
El efecto de retrasar la edad de jubilación	97
3.2.2. <i>Proyecciones de la población en presencia de migraciones</i>	99
3.2.2.1. <i>Hipótesis demográficas y migratorias</i>	100
3.2.2.2. <i>Principales resultados demográficos con flujos migratorios</i>	100
Hipótesis de fecundidad de 1,3 hijos / mujer	100
Hipótesis de constancia de la fecundidad al nivel de 2008 (1,46 hijos/mujer)	105
Hipótesis de fecundidad del INE (1,71 hijos/mujer)	107
Hipótesis de fecundidad de renovación generacional (2,1 hijos/mujer)	109
3.2.2.3 <i>Población activa y jubilada en presencia de migraciones</i>	111
3.2.2.3 <i>A modo de resumen</i>	113
3.3 Simulaciones del modelo económico	114
3.3.1 <i>Simulaciones con población estable</i>	114
3.2 Proyecciones con el modelo demográfico	118
3.3 El reequilibrio financiero del sistema de protección social	122
3.3.1 <i>Reducción de las prestaciones</i>	123
3.3.2 <i>Aumento de las cotizaciones</i>	124
3.3.3 <i>Viabilidad de un aumento en las cotizaciones sociales</i>	126
3.4. A modo de resumen	129
3.5 Conclusiones	131
Bibliografía	134

Presentación

El sistema de pensiones español actual es el resultado del desarrollo y aplicación de una legislación promulgada en tiempos de la dictadura que fue objeto de importantes reformas y extensiones desde la década de los 80 del pasado siglo hasta hace bien poco. Aunque inicialmente dirigido a los trabajadores por cuenta ajena del pujante sector industrial del desarrollismo franquista, el sistema de pensiones se ha acabado extendiendo a todos los asalariados y a los trabajadores por cuenta propia de todos los sectores. Además, aunque en su origen se trataba de un sistema meramente contributivo, con el tiempo se han ido incorporando importantes elementos de universalización básicamente a través de las pensiones no contributivas y mediante el mecanismo de las pensiones mínimas.

Así, el incipiente sistema de protección de la vejez que generaba excedentes muy importantes hace medio siglo, se ha convertido en la principal, cuando no la única, fuente de ingresos de la población mayor, de 65 o más años, y representa el 9% del PIB, esto es, equivale a una quinta parte de la remuneración de los asalariados. Las previsiones de su evolución futura son que el peso de las pensiones en el PIB va a seguir creciendo a corto, medio y largo plazo, en mayor o menor cuantía según cuál sea el comportamiento demográfico y migratorio que acabe dándose en el futuro. Ello ha propiciado un importante debate sobre la sostenibilidad del sistema público de pensiones y ha dado lugar a todo tipo de propuestas, desde medidas de desmantelamiento y sustitución del sistema público por uno privado de capitalización a propuestas de financiar las pensiones públicas no sólo con las cotizaciones sociales sino con el conjunto de los ingresos fiscales.

En el presente trabajo se analiza la viabilidad del sistema público de protección social (pensiones y desempleo) considerando que ambos elementos son una parte indisociable de la remuneración del trabajo, sea por cuenta propia o ajena. A partir de esta premisa, se analiza la viabilidad del sistema sobre la base de que la única fuente de financiación son las cotizaciones de los trabajadores activos. Nuestra hipótesis de partida es, por tanto, el mantenimiento del statu quo, y por consiguiente que no van a haber cambios importantes en la distribución de la renta a corto, medio o largo plazo.

Se adopta esta hipótesis, entre otras razones porque cualquier intento de extender las fuentes de financiación de las pensiones implicaría entrar en una discusión profunda de la fiscalidad española, de su diseño y eficacia, de su impacto redistributivo y, en definitiva, entrar en la trascendental discusión de la distribución de la renta. Es éste un debate que ningún gobierno ni partido político español se ha atrevido a plantear, ni siquiera de forma velada al discutir algún impuesto. Sin embargo se trata de una cuestión crucial que subyace a todo el sistema fiscal, al problema del fraude, a las reformas del sistema de pensiones o del mercado laboral, una cuestión que nadie ha planteado de forma abierta porque significa debatir sobre qué sociedad queremos y con qué distribución de poder.

Para el análisis de la sostenibilidad del sistema de pensiones es necesario considerar la evolución demográfica y económica futura por lo que se ha construido un modelo de proyección demográfica que aúna la exactitud de los modelos demográficos clásicos con la flexibilidad de utilizar funciones de fecundidad y mortalidad no paramétricas, lo que ha facilitado la obtención de un enorme abanico de proyecciones según diversas hipótesis de comportamiento de la fecundidad, la mortalidad, la actividad y la inmigración. Asimismo se ha construido un modelo para el comportamiento económico que incorpora la dinámica demográfica cambiante y que, en un marco de crecimiento a largo plazo, es capaz de generar fluctuaciones económicas en la producción y en el empleo como las que presenta

la economía española a lo largo de las últimas cuatro décadas. La consideración de los ciclos económicos es decisiva porque durante los periodos de recesión-depresión es cuando el sistema de protección social experimenta su máxima tensión financiera.

Las conclusiones que se obtienen con esos instrumentos no son muy distintas de las que dictaría el sentido común económico y, pese a ser muy simples, tienen un profundo calado. La primera conclusión es que si a largo plazo la población de edad avanzada es una proporción mucho mayor que la actual, la participación de sus ingresos en el PIB deberá ser proporcionalmente mucho mayor que la actual. De no ser así, la pobreza entre la población en edad avanzada aumentará. La segunda conclusión es que si la renta real per cápita a largo plazo aumenta, nada impide que las pensiones reales también aumenten. Se trata, por tanto, "sólo" de un problema de distribución de la renta.

En el texto que sigue se presenta, en el primer capítulo, el modelo de proyección demográfica. A continuación, en el capítulo segundo, se desarrolla el modelo económico en que se basarán las proyecciones. Se trata de dos capítulos bastante formales en los que se describe con detalle los modelos que se utilizan para realizar las proyecciones.

Los resultados que se obtienen con los modelos anteriores se presentan en lo que es el tercer y último capítulo. Este tercer capítulo está organizado en tres partes para exponer, en primer lugar, los resultados de las proyecciones demográficas en ausencia de inmigración, en segundo lugar el decisivo impacto que la inmigración puede llegar a tener y finalmente, cómo va a repercutir todo ello en la evolución económica y en las cuentas del sistema de pensiones. En los últimos apartados se explica cómo podría financiarse la protección social y qué requisitos deberían cumplirse para que el sistema fuera viable con una relación pensión/salario similar a la actual. También se expone el impacto del retraso en la edad de jubilación y se explica porqué no son aceptables otras reformas que reduzcan la relación pensión/salario. El capítulo termina con las conclusiones de la investigación.

CAPÍTULO 1

La Dinámica Demográfica

1.1 Introducción

En los modelos económicos convencionales la población se considera exógena y sólo se tiene en cuenta de forma indirecta, como determinante de la oferta de mano de obra. Su influencia sobre la economía se ejerce a través del mercado laboral, afectando el nivel empleo, los salarios y, por ende, la distribución de la renta.

Para los economistas clásicos, en cambio, la población era un elemento esencial para explicar el comportamiento de la economía en el largo plazo. De hecho, el estado estacionario surgía como solución de equilibrio entre la dinámica de la población y las capacidades expansivas del sistema económico.

Para Adam Smith, la escasez relativa de mano de obra hacía variar los salarios reales de forma que el nivel de éstos constituía un incentivo (o desincentivo) a la reproducción de la mano de obra:

"La demanda de hombres, al igual que la de otras mercancías, regula de una manera necesaria la producción de la especie, acelerándola cuando va lenta o frenándola cuando se aviva demasiado. Esta misma demanda es la que regula las condiciones de procreación en todos los países del mundo" (Smith, 1776, ps.77)

Esta escasez relativa de fuerza de trabajo dependía, en su sistema, de tres factores:

- a) la denominada "extensión del mercado", es decir, el nivel de actividad económica que, según el grado de desarrollo económico y el grado de funcionamiento de la concurrencia era creciente a largo plazo;
- b) la evolución del proceso de "división del trabajo" que no era continua y que tendía a reducir la mano de obra requerida por el proceso de producción;
- c) los movimientos demográficos que seguían la evolución de los salarios reales con un retraso de una generación y que, por lo tanto, dentro de una tendencia expansiva derivada de la mejora general del nivel de vida, podían presentar fluctuaciones (Smith, 1776).

En el sistema de Smith, la expansión de la población era la causa de un estado estacionario al cual la economía llegaría en el muy largo plazo una vez agotadas todas las posibilidades del proceso de división del trabajo, dentro del entorno natural e institucional de aquella sociedad. El estado estacionario se explicaba porque el crecimiento de la población conllevaba un incremento de la demanda de alimentos, mientras que la producción zootécnica presentaba rendimientos decrecientes. Por lo tanto, a largo plazo, la agricultura estrangularía el crecimiento económico del sistema.

A lo largo de este proceso los alimentos se harían cada vez más costosos porque la productividad del sector agropecuario crecía más lentamente que la del sector manufacturero por lo que la evolución de los costes de alimentación irían erosionando el margen de beneficio hasta que éste fuera insuficiente para continuar el proceso de acumulación. En este punto, por tanto, el sistema llegaría al máximo desarrollo posible. Se estabilizaría el nivel de los salarios, los beneficios serían los justos para reponer el capital y, finalmente, la población tendería a estabilizarse (Sylos Labini, 1988).

David Ricardo hizo suya la doctrina malthusiana de la población aun cuando, para él, el primer factor limitador de la expansión eran las rentas crecientes de los terratenientes.

Sin embargo, en último término, el crecimiento de las rentas es una consecuencia lógica de la presión que una población en aumento ejerce sobre una oferta limitada de tierras cultivables que, además, presenta una fertilidad en el margen progresivamente menor -y, por lo tanto, unos costes marginales en aumento-. En consecuencia, el estado estacionario surge del hecho que la explotación de tierras menos productivas permite aumentar las rentas a expensas de los beneficios, con lo cual se acaba deteniendo el proceso de acumulación (Ricardo, 1817, 1820).

Lo relevante, sin embargo, es que esta conclusión se puede generalizar al caso en qué no hubiera terratenientes. De no haberlos, no deberían pagarse rentas y, por tanto, aumentaría la intensidad de los cultivos hasta que la tasa de beneficio se igualara para todos los agricultores y manufactureros al mismo nivel que el de la tierra menos fértil, lo cual permitiría ampliar mucho más la producción. Pero, de nuevo, a partir de esta situación, cualquier aumento de la producción de alimentos haría disminuir el tipo de beneficio por debajo del necesario para la reposición del capital (Pasinetti, 1960; Robinson y Eatwell, 1976). Mientras tanto, la población habría ido creciendo al ritmo de la producción alimentaria y, finalmente, tendería a estabilizarse por la imposibilidad de ampliar la producción alimentaria. El estado y la población estacionarias serían el resultado de los rendimientos decrecientes, intensivos y extensivos, de la producción alimentaria.

La principal diferencia entre los análisis de Smith y Ricardo radica en el hecho que Ricardo hace suya la tesis malthusiana de que la población tiende a reproducirse más rápidamente de lo que crece la producción de alimentos puesto que la tierra presenta una fertilidad decreciente. Esta tasa de reproducción más elevada dará lugar a una persistente presión demográfica que mantendrá los salarios a largo plazo en el nivel de subsistencia, aunque puedan experimentar oscilaciones coyunturales en el corto plazo. En cambio, para Smith los salarios reales son crecientes a largo plazo, a medida que la división del trabajo hace que el "trabajo (directo) requerido" sea más productivo. Pero lo más importante para nosotros es que, para ambos autores, el crecimiento de la población interacciona con el sistema económico y condiciona el proceso de producción, distribución y acumulación a largo plazo. Y aún más, Adam Smith establece explícitamente que la dinámica de la población viene regulada por las fuerzas económicas a través del vínculo de la evolución salarial. El salario, por lo tanto, acaba operando como el elemento regulador de la tasa neta de reproducción de la población.

No hace falta destacar que los argumentos de Smith y Ricardo tienen limitaciones muy importantes: se refieren sólo a posiciones de muy largo plazo, no consideran para nada los efectos de la estructura demográfica y no contemplan las inmensas posibilidades de los cambios técnicos.

En el análisis de la dinámica del sistema capitalista, Karl Marx realizó una serie de agudas observaciones demográficas. Según Marx, el sistema capitalista tiende a crear una *sobrepoblación relativa* en edad de trabajar -el llamado ejército industrial de reserva- que tiene, como mínimo, dos efectos importantes: el primero, el de presionar sobre la oferta de mano de obra de forma que los salarios tiendan a ser siempre lo más bajos posible -un mínimo de subsistencia condicionado social e históricamente-; el segundo, el de tener siempre a disposición un remanente de mano de obra utilizable en los momentos de expansión excepcional.

Sin embargo, pese al ejército de reserva, el carácter limitado de la población total implica que en periodos expansivos prolongados puedan aparecer escaseces de mano de obra que

siempre acaban teniendo un papel clave en el final de la expansión. A medida que la diferencia entre mano de obra empleada y mano de obra disponible para trabajar se reduce en términos relativos, los salarios reales empiezan a aumentar, los márgenes de beneficio se erosionan y la acumulación pierde fuelle hasta pararse. Es una de las primeras y más clásicas explicaciones de las crisis y los ciclos económicos que dio Marx (Goodwin, 1967).

A diferencia de Malthus, Marx pensaba que el crecimiento de la población no es autónomo ni desbordante sino que viene determinado por las condiciones económico-sociales y técnicas de cada sociedad. Para Marx, las fuerzas productivas -la productividad, el cambio técnico y la acumulación- crecían más rápidamente que la población, por lo que constantemente se generaba la sobrepoblación relativa y el sobrante de mano de obra indicados. Por consiguiente, según Marx, la miseria de las clases inferiores no era un problema de reproducción excesiva de la mano de obra sino un problema de distribución de la renta y la riqueza generada. El optimismo tecnocientifista de Marx lo llevó a pensar, hasta casi al final de su vida, que era posible una expansión indefinida del nivel de vida material con una población en aumento.

Estas ideas de los clásicos han tenido muy poca acogida en el análisis económico moderno, que sólo ha incorporado parcialmente alguna. Por un lado, las teorías heterodoxas del ciclo económico han incorporado sólo el mecanismo marxiano de la sobrepoblación relativa como determinante de la evolución de los salarios y la distribución de la renta (Kalecki, 1954; Goodwin, 1967; Kalecki, 1971). Por otra parte, desde la teoría económica convencional, se ha retomado alguna de las ideas de Smith y se ha tratado de explicar el comportamiento reproductor de la familia (Becker, 1960; Becker, 1981) con resultados que pese a ser muy sugerentes desde el punto de vista formal, son muy discutibles (Carrasco, 1991; Madariaga, 2006) han tenido muy escasa relevancia en el trabajo de análisis y predicción demográfica (Hoyo y García, 1988), hasta tiempos recientes en que la creciente facilidad de las simulaciones numéricas ha impulsado el uso de modelos. Ello ha permitido incorporar y estudiar de forma explícita la interacción entre la población y la demografía con modelos de generaciones convencionales con capital humano, aunque los resultados distan de ser concluyentes.

El olvido de la cuestión demográfica en la literatura sobre dinámica económica se puede justificar desde dos puntos de vista. El primero, que si lo que se trata de averiguar son los mecanismos económicos que explican la trayectoria del sistema económico, entonces los cambios demográficos se pueden considerar exógenos. Desde otro punto de vista, la relación con la población no se aborda porque no hay teorías claramente aceptadas y contrastadas que vinculen economía y demografía. Aun cuando, en los últimos diez años, las publicaciones sobre este tema han crecido muy rápidamente -por ejemplo, el *Journal of Population Economics* empezó a editarse en 1988-, su significación práctica sigue siendo muy baja, puesto que se trata de trabajos teóricos no especificables empíricamente (por ejemplo, Day, et. al., 1989; Feichtinger y Sorger, 1989; Feichtinger y Dockner, 1990; Blanchet y Kessler, 1991) excepto los trabajos sobre el mercado laboral (Johnson y Zimmerman, 1993) y de algunas raras excepciones (Lee y Lapkoff, 1988). Un trabajo claramente novedoso que mejora estas carencias es el de Lee y Mason (2010, publicación electrónica en 2009), en el que se estudia la interacción teórica entre capital humano y demografía en los diversos sentidos (efecto sobre el ahorro, sobre la productividad, sobre el cambio demográfico) con un importante soporte empírico, que permite identificar patrones de comportamiento.

En cualquier caso, los demógrafos han identificado varios fenómenos de covariación entre condiciones económicas y comportamiento demográfico, de forma que se pueden establecer una serie de proposiciones genéricas que son de aceptación general. Así, es sabido que hay factores económicos muy importantes para explicar el cambio demográfico del siglo XX tales como la incorporación de la mujer al mercado de trabajo y la instauración de los sistemas de protección social. También se acepta que las situaciones de expansión económica facilitan la independencia económica de los jóvenes y la convivencia de las parejas. Análogamente, en tiempos de recesión las parejas tienden a retrasar el tener hijos, aun cuando la edad de la madre acaba siendo el factor determinante de la fecundidad. Finalmente, también se sabe que el aumento del nivel de vida va acompañado de la reducción de la natalidad y del retardo en la edad en que se tiene el primer hijo, así como también comporta que se reduzca la mortalidad y se alargue la esperanza de vida. Pero estas proposiciones no permiten ir demasiado más allá (Hoyo y García, 1988) puesto que, desde el punto de vista demográfico, el impacto de los factores socioculturales -religión, costumbres, educación obligatoria- y técnicos -sanidad, contracepción- sigue siendo mucho más importante (Keyfitz, 1985; Leguina, 1973).

El hecho que los factores económicos parezcan explicar sólo una pequeña parte del comportamiento demográfico apoya la posición de tomar la población como una variable exógena a la hora de realizar análisis económicos. Aún así, hace falta recordar que la mano de obra es un input del sistema económico y que, por otro lado, el conjunto de la población es, también, la destinataria de la output. En consecuencia, tanto la cuantía como la composición de la población afectan de forma simultánea el funcionamiento del sistema económico desde tres ámbitos diferentes: la producción, la distribución y la demanda final. De aquí que la posición simplista de considerar una tasa n de crecimiento fijo de la población -y, por lo tanto, una población de composición estable- es una simplificación que, en muchos de casos, no es aceptable (Fair y Domínguez, 1991), y menos todavía si el objeto de estudio son los sistemas de pensiones y de bienestar social.

El modelo de generaciones de Samuelson (1958) permite ilustrar la importancia de la composición de la población incluso en contextos elementales. Así, en su modelo, una población estable simplificada no sólo determina la tasa de crecimiento económico y el tipo de interés de equilibrio sino que puede llevar a sendas dinámicas socialmente ineficientes. Por lo tanto, es fácil ver que un comportamiento demográfico más complicado puede tener unos efectos económicos muy complejos.

De ahí que cualquier análisis de un sistema de Seguridad Social tenga que incorporar algún tipo de representación de la dinámica demográfica. Y si el análisis se quiere referir a los sistemas reales, entonces el supuesto de población estable sólo es válido como referencia teórica o como distribución límite de condiciones demográficas fijas, pero nunca servirá para representar situaciones de importantes cambios demográficos como los de la segunda mitad del s. XX. Este extremo es muy importante porque una gran parte de la literatura teórica -modelos de generaciones sucesivas- considera sólo poblaciones estables por la sencilla razón de que son formalmente fáciles de tratar. Tampoco se debe caer en el extremo de gran parte de la literatura empírica, que acaba reduciéndose a simples proyecciones sin un marco teórico donde poderlas encajar.

En los apartados siguientes se presenta el modelo demográfico de proyección empleado que, como veremos, deriva sus propiedades asintóticas formales del modelo de la población estable, pero que se puede especificar directamente en términos de los datos

de los que se dispone. El modelo tiene una limitación importante que conviene resaltar de entrada: es un modelo que depende exclusivamente de factores demográficos y, por lo tanto, es exógeno al sistema económico. La razón por la cual no se introducen feed-backs desde la economía a la población es básicamente heurística: aunque no hay ningún problema de especificación y se pueden incorporar las relaciones correspondientes, por el momento no hay ninguna teoría suficientemente satisfactoria, desde el punto de vista de su capacidad explicativa y predictiva, como para incluirla. Por ello, esta interacción se introducirá de forma indirecta, como hipótesis de comportamiento o escenario derivado de determinadas situaciones económicas.

1.2 El modelo demográfico en tiempo continuo

La dinámica de una población a través del tiempo se puede formular de una forma relativamente simple a partir de las funciones de fecundidad y supervivencia, partiendo de una población inicial. La primera formulación completa de este modelo fue realizada por Alfred J. Lotka en 1911. El modelo se refiere sólo a la población femenina por consideraciones de orden práctico -la fecundidad femenina está fisiológicamente mucho mejor acotada y definida y, estadísticamente, los datos son mucho más fiables-, pero es extensible al conjunto de la población (Samuelson, 1976).

En el momento inicial se tiene una población femenina con una estructura de edades determinada, $P_0(a)$. Los futuros nacimientos sólo podrán provenir de la descendencia que directamente tengan estas mujeres o de la que tenga su descendencia femenina.

La probabilidad que una mujer tenga una niña entre la edad a y la edad $a + da$ es $b(a)$, la función de fecundidad, que depende de la edad, es decir, que entre la edad a y la edad $a + da$ cada mujer da a luz $b(a)$ niñas. Se considera que la fertilidad femenina tiene unos límites de edad, de forma que la edad mínima para poder engendrar hijos es α y la máxima es β .

La probabilidad que una mujer esté viva a la edad a se definirá por la función de supervivencia, $l(a)$, que también depende de la edad.

A partir de estos datos se puede expresar el número de niñas que nacerán entre el momento t y el momento $t + dt$, como una función $B(t)$ que tendrá dos componentes: el número de niñas engendrada por la población inicial de mujeres y el número de niñas engendradas por las descendientes de la población inicial.

El número de niñas engendradas entre t y $t + dt$ por la población femenina inicial será (siempre que t sea menor que β años puesto que, de no ser así, todas las mujeres de la población inicial habrían superado la edad reproductiva):

$$G(t) = \int_t^{\beta} \frac{l(a)}{l(a-t)} P_0(a-t) b(a) da \quad [1.1]$$

En esta ecuación el primer término expresa la proporción de la población inicial que sobrevive a los t años la cual, al ser multiplicada por la población inicial de edad $a-t$, nos da la población inicial sobreviviente en edad de reproducción en el momento t . Al multiplicar esta población por la tasa de fecundidad se obtiene el número de niñas que se engendra en cada edad a , entre t y $t + dt$. Finalmente, al integrar, se obtiene el número total de niñas nacidas de la población inicial entre el momento t y el momento $t + dt$.

El número de nacimientos provenientes de la descendencia de la población inicial entre el momento t y $t + dt$, dependerá del número de niñas nacidas a años antes que todavía estén vivas, es decir, de $B(t-a)l(a)$, de forma que se podrá expresar como:

$$\int_{\alpha}^{\beta} B(t-a)l(a)b(a)da \quad [1.2]$$

Así, el número total de nacimientos en cualquier momento t se podrá expresar como la suma de las expresiones [1.1] y [1.2]:

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t-a)l(a)b(a)da + G(t) \quad [1.3]$$

Finalmente, cuando t sea más grande que β , entonces $G(t)$ se anula.

Esta ecuación determina totalmente la trayectoria de la población femenina. Por extensión, conociendo la tasa de masculinidad de los nacimientos, la función de supervivencia masculina y la población masculina inicial se obtendría la trayectoria para el conjunto de la población.

La solución de la ecuación integral [1.3] se puede obtener de varias formas (Keyfitz, 1968; Hoppensteadt, 1976; Impagliazzo, 1985). Lotka lo resolvió probando directamente funciones exponenciales y mostrando que, por las propiedades demográficas de las funciones, había una exponencial dominante que daba la tasa de reproducción neta o tasa de renovación de la población. Pero probablemente, la forma más simple y elegante es mediante la aplicación de transformadas de Laplace, aprovechando que la parte derecha de [1.3] es una convolución, es decir, una integral de límites finitos con unos argumentos en el integrante, $B(t-a)$ y $\Phi(a) = l(a)b(a)$, tales que su suma da t , que es una variable independiente de la variable de integración, a . Tomando las transformadas sobre [1.3], y representando con un asterisco la transformada de cada función se tendrá que $B^*(r)$ es la transformada de $B(t)$:

$$B^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} B(t)dt \quad [1.4]$$

Por el teorema de la convolución, la transformada de una convolución es el producto de las transformadas. Por lo tanto, denominando $G^*(r)$ a la transformada de $G(t)$ y $\Phi^*(r)$ a la de $\Phi(a)$, se tendrá que la expresión [1.3] se convierte en:

$$B^*(r) = G^*(r) + B^*(r) \Phi^*(r) \quad [1.5]$$

que se puede resolver muy fácilmente por la transformada $B^*(r)$:

$$B^*(r) = \frac{G^*(r)}{1 - \Phi^*(r)} \quad [1.6]$$

Si el lado derecho de la expresión [1.6] tiene transformada inversa, entonces esta función es la función $B(t)$ que se está buscando, es decir, la inversa de $B^*(r)$. Se puede demostrar que esta función existe y es única siempre que $B^*(r)$ se pueda expandir en fracciones parciales y que la serie sea absolutamente convergente (Keyfitz, 1968; Impagliazzo, 1985), con lo que queda:

$$B^*(r) = \frac{Q_1}{r - r_1} + \frac{Q_2}{r - r_2} + \frac{Q_3}{r - r_3} + \dots \quad [1.7]$$

dónde las r_i son las raíces, en número finito o infinito, de la ecuación característica que deriva de la función de fecundidad neta, $\Phi(a)$:

$$\Phi^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-ra} \Phi(a) da = 1 \quad [1.8]$$

Tomando la transformada inversa de [1.7] se obtiene la función que se está buscando:

$$B(t) = G(t) + Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + Q_3 e^{r_3 t} + \dots \quad [1.9]$$

dónde las r_i son las raíces de la ecuación característica [1.8] y las Q_i son constantes arbitrarias, el valor de las cuales viene dado por las expresiones:

$$Q_i = \frac{\int_0^{\beta} e^{-r_i t} G(t) dt}{\int_0^{\beta} a e^{-r_i a} l(a) b(a) da}, \quad i=1,2,3 \dots \quad [1.10]$$

Debido a las propiedades demográficas de las funciones empleadas -todas las funciones demográficas son no negativas-, se cumplen todas las condiciones necesarias y suficientes para permitir el desarrollo en serie de [1.6] y que la serie [1.7] sea absolutamente convergente.

En lo que a la trayectoria de la solución se refiere, hay que destacar que sólo una de las raíces r_i de la ecuación [1.8] es real y todas las demás son raíces complejas conjugadas que tienen una parte real menor en valor absoluto, puesto que $\Phi^*(r)$ es una función monótonamente decreciente -la primera derivada de la función es negativa- que toma el valor ∞ para $r = -\infty$ y toma el valor 0, para $r = \infty$. Por lo tanto, la trayectoria de la solución está dominada por la raíz real mientras que las raíces complejas determinan oscilaciones decrecientes a medida que t aumenta. En el punto de cruce de $\Phi^*(r)$ con el eje de las ordenadas, la función toma un valor que se conoce como la tasa neta de reproducción, la cual representa el potencial reproductivo de la población. A medida que t crece, la población se va aproximando paulatinamente a una población estable, puesto que las

funciones de fecundidad y supervivencia son constantes (Keyfitz, 1968; Hoppensteadt, 1976; Impagliazzo, 1985; Keyfitz, 1985).

La principal ventaja del modelo en tiempo continuo es que permite expresar de forma exacta y muy sintética el comportamiento de la población. Por otro lado, la ampliación de sus límites, introduciendo variaciones dependientes del tiempo en la fecundidad y en la supervivencia o incluyendo flujos migratorios, no presenta ninguna dificultad analítica, salvo que los cálculos son mucho más complicados. Asimismo el modelo permite derivar fácilmente expresiones analíticas para los efectos de cambios en alguna variable que afecte el comportamiento demográfico o deducir proposiciones demográficas de validez general como, por ejemplo, la existencia de una población estable o la tasa neta de reproducción.

La importancia y solidez de estos resultados radica en que se obtienen precisamente por el carácter genérico de las funciones que se emplean en el modelo, lo que le da validez general. Pero cuando se trata de usarlo en la práctica demográfica, aparecen gran cantidad de dificultades, puesto que si se quiere lograr un mínimo de precisión hace falta emplear funciones de supervivencia y de fecundidad que pueden ser muy complejas. Por otra parte, los datos empíricos son discretos puesto que van referidos a periodos o intervalos temporales, de forma que, para poder emplear el modelo, hace falta interpolar funciones continuas que, normalmente, no permiten ajustar ni los picos ni las discontinuidades muy acusadas o, si lo hacen, es a expensas de emplear funciones mucho más complicadas. Con todo ello, la dificultad de solucionar analíticamente una especificación empírica del modelo es, a efectos prácticos, insuperable, y no queda más remedio que emplear aproximaciones más o menos precisas y utilizar técnicas numéricas. En cualquier caso, la exactitud formal del modelo se pierde por la acumulación de errores de aproximación e interpolación de funciones que se suman al error que siempre incorporan los datos.

1.3 Los modelos demográficos matriciales y de tiempo discreto

De forma alternativa se pueden emplear otros modelos. El más conocido es el modelo matricial de Leslie (Keyfitz, 1968; Impagliazzo, 1985; Keyfitz, 1985) en el que partiendo de un vector inicial de la población, agrupada por intervalos de edad, y de una matriz que incluye en la primera fila la fecundidad por intervalos de edad y, en la diagonal, la supervivencia -la matriz de proyección-, se obtiene, multiplicando, el vector de población para el periodo siguiente y, repitiendo el proceso de forma iterativa, se obtiene la población por intervalos de edad para cualquier periodo futuro.

Dado que la matriz de proyección es no negativa y es irreducible (Impagliazzo, 1985), tendrá un autovalor o valor propio dominante que será una raíz real positiva de su ecuación característica. Por otro lado, debido a la forma de la matriz, la ecuación característica tendrá todos los coeficientes negativos excepto el correspondiente al término de orden más elevado, por lo cual, sólo habrá una raíz real positiva de módulo más grande que todas las demás. La ecuación tiene una forma similar a [1.8] y la trayectoria de la población tenderá hacia una población estable regida por la raíz dominante a medida que vaya aumentando el tiempo de proyección. Si los intervalos de edad sobre los cuales se construye la matriz se van haciendo más y más pequeños, el modelo matricial se va

aproximando al continuo, de forma que se puede establecer su equivalencia asintótica (Keyfitz, 1968; Samuelson, 1976; Keyfitz, 1985).

Lotka y Cole presentaron un modelo alternativo formulado como un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas de forma que la población para cada grupo de edad y periodo no son sino los supervivientes del grupo de edad precedente en el periodo anterior. Los nacimientos de cada periodo se expresan como la suma del número de personas de cada intervalo de edad por el número de hijos por persona e intervalo de edad. Este conjunto de ecuaciones se puede expresar de forma matricial y, entonces el modelo es formalmente idéntico al de Leslie (Samuelson, 1976; Impagliazzo, 1985) y, por lo tanto, en el límite equivale al modelo continuo.

Debido a la equivalencia asintótica entre los modelos discretos y los continuos, se puede obtener el mismo tipo de proposiciones teóricas, pese a que el trabajo analítico es más laborioso y la notación no es tan sintética. Pero, en cambio, los modelos discretos presentan la ventaja de ser calculables por simple iteración, sin necesidad de buscar soluciones analíticas y, además, son directamente especificables con los datos empíricos, sin necesidad de realizar ajustes de funciones.

Pese a estas ventajas de cálculo el modelo discreto siempre presenta error puesto que se aproxima el movimiento continuo de la población por un proceso en diferencias finitas. El error que se comete es el de aproximar una función exponencial mediante una diferencia finita de primer orden -el método de Euler-, error que se caracteriza porque es acumulativo pero, al mismo tiempo, su magnitud absoluta y relativa disminuye a medida que se reduce la diferencia o intervalo de cálculo -si el error inicial es ε y se reduce el intervalo de cálculo a $1/\tau$, entonces el nuevo error ε es menor que ε/τ , y se hace más pequeño el exponente -el módulo de las raíces de la ecuación característica- (Gerald y Wheatley, 1989). Para poblaciones humanas el grado de error es muy pequeño debido al bajo valor del módulo de r_i . A título de ejemplo, empleando intervalos de 5 años y con tasas altas de fecundidad, el error en la raíz real puede ser del 6 por 10000, que en proyecciones a 100 años, representa en torno el 1% de error, y a 1000 años, el error acumulado podría llegar a ser alrededor del 12 % (Keyfitz y Flieger, 1971; Keyfitz, 1985). Pero, si el intervalo de cálculo se reduce a un año, el error acumulado, incluso con alta fecundidad, disminuye a una fracción despreciable.

En el trabajo práctico, este error es inferior al que se comete si se quiere emplear el modelo continuo, pues al interpolar funciones continuas a los datos de la población inicial, que están agrupados por intervalos de edad, se cometen errores del orden de un 0,5%-3%, con polinomios de grado 15 a 20 y sólo empleando funciones más complejas o de grado bastante más elevado, bajará del 0,5%. Con funciones tan complejas no hay solución analítica y entonces hay que aproximar la solución mediante técnicas numéricas que introducen errores adicionales, sólo reducibles incrementando exponencialmente los cálculos numéricos. Por lo tanto, en el trabajo práctico, aunque la precisión global del modelo continuo podría ser elevada su uso para la proyección de la población sería, en general, ineficiente debido a su alto coste computacional en comparación con el modelo discreto, a igualdad de nivel de error.

Finalmente, hay que destacar que el modelo discreto permite ser tan preciso como lo sea la recogida de datos, de forma que puede reflejar las discontinuidades observadas o, si se dispone de información trimestral o mensual se puede formular el modelo en periodos

más cortos y, por lo tanto, aumentar todavía más su precisión. Por último, desde el punto de vista práctico, con el modelo discreto es mucho más sencillo hacer proyecciones que incorporen especificaciones flexibles de las variables demográficas, flujos migratorios o, incluso, distribuciones de probabilidad.

Por lo tanto, hay suficientes razones de orden práctico para decantarse por el uso de estructuras discretas a la hora de construir el modelo demográfico de proyección.

1.4 Un modelo demográfico en tiempo discreto

En el modelo en diferencias finitas que se presenta a continuación se adopta como duración del intervalo temporal una unidad de tiempo que correspondería a un año, por la simple razón de que los datos demográficos disponibles están referidos a periodos anuales. El modelo se plantea para el conjunto de la población pero se mantienen separados los dos sexos en todo momento. La separación de sexos es conveniente porque los datos sobre fecundidad femenina son mucho más exactos y porque la edad reproductora en la mujer está biológicamente bien delimitada. Además, se debe considerar el hecho que el potencial reproductivo máximo de una población humana viene determinado por la población femenina puesto que un grupo reducido de hombres sería suficiente para la reproducción. En consecuencia, desde el punto de vista demográfico, la variable más determinante es el número de mujeres en edad reproductora.

Como antes, se parte de una población inicial P_0 de la cual se conoce su distribución por intervalos de edad y sexo,

$$P_0 = \sum_0^{\infty} P_0^a = \sum_0^{\infty} D_0^a + \sum_0^{\infty} H_0^a \quad [1.11]$$

En la ecuación el subíndice expresa el momento del tiempo al cual están referidas las variables, el sobreíndice se refiere a los diferentes grupos de edad, D son las mujeres y H los varones. El límite de la suma se toma como infinito aunque, a efectos prácticos y en rigor se puede fijar una cota máxima de la vida humana, ω . De forma análoga, la fecundidad vendrá dada por la función $b(a)$, sólo referida a las mujeres y que puede consistir en un conjunto de valores discretos, esto es, un vector. La proporción de mujeres en los nacimientos vendrá dada por $0 < d < 1$ que se considera fijo. Mediante esta convención se evita el tener un doble conjunto de variables independientes y todos los problemas que tiene asociados (Samuelson, 1976). Las edades mínima y máxima de procreación para las mujeres son, respectivamente, α y β . La supervivencia vendrá dada para cada sexo por las funciones $l_D(a)$, $l_H(a)$, que también pueden ser dos vectores. Todas estas funciones y parámetros podrían especificarse de forma que experimenten variación en el tiempo -y así se hace en las proyecciones- o, incluso, que incorporaran distribuciones de probabilidad.

Según lo anterior, el número de nacimientos B_t en cada periodo será la descendencia proveniente de la población inicial más la que proviene de las generaciones posteriores, de forma similar a como se había hecho para el modelo continuo. Por lo tanto, siempre que $\alpha < t < \beta$, se tendrá que:

$$B_t = \sum_{\alpha}^{\beta} dB_{t-a} b(a) l(a) + \sum_t^{\beta} D_0^{a-t} b(a) \frac{l_D(a)}{l_D(a-t)} \quad [1.12]$$

El primer término de la ecuación [1.12] expresa el número de nacimientos provenientes de las mujeres nacidas hace a años, mientras que el segundo término recoge la descendencia directa de la población femenina inicial que todavía está en edad reproductora, $G(t)$. Es fácil ver que esta expresión es la misma que la ecuación [1.3] del modelo continuo, pero en términos discretos. En forma más sintética, la ecuación de nacimientos se puede escribir refiriéndola sólo al número de mujeres en edad reproductora en cualquier momento del tiempo:

$$B_t = \sum_{\alpha}^{\beta} D_{t-a}^0 b(a) l_D(a) + G(t) = \sum_{\alpha}^{\beta} D_t^a b(a) \quad [1.13]$$

es decir, la suma del número de mujeres de cada grupo de edad entre α y β multiplicado por su fecundidad específica. Finalmente, si se separan los recién nacidos por sexos, denominando d a la proporción de mujeres entre los recién nacidos, queda:

$$B_t = P_t^0 = D_t^0 + H_t^0 = \sum_{\alpha}^{\beta} D_t^a b(a) = d \sum_{\alpha}^{\beta} D_t^a b(a) + (1-d) \sum_{\alpha}^{\beta} D_t^a b(a) \quad [1.14]$$

Por lo tanto, la dinámica de la población por edades y sexos queda recogida por las ecuaciones de los nacimientos más las que expresan la evolución de cada grupo de edad como el conjunto de los supervivientes del grupo de edad precedente en el periodo anterior:

$$D_t^0 = dB_t = d \sum_{\alpha}^{\beta} D_{t-a}^0 b(a) l_D(a), \forall t > \beta \quad [1.15a]$$

$$D_t^a = D_{t-1}^{a-1} l_D(a-1), \forall a \geq 1 \quad [1.15b]$$

$$H_t^0 = (1-d) \sum_{\alpha}^{\beta} D_{t-a}^0 b(a) l_D(a), \forall t > \beta \quad [1.16a]$$

$$H_t^a = H_{t-1}^{a-1} l_H(a-1), \forall a \geq 1 \quad [1.16b]$$

Las expresiones [1.15 a, b] y [1.16 a, b] recogen el movimiento completo del conjunto de la población por sexos y para todos los grupos de edad. Aún así, la ecuación que rige el movimiento del sistema es la de la descendencia femenina [1.15 a], que es una ecuación en diferencias finitas, homogénea, de coeficientes constantes y de orden β . En el supuesto de que $t < \beta$, se debería añadir el término $G(t)$ a la expresión anterior la cual, al estar formulada en términos de las condiciones iniciales, es directamente calculable. La ecuación característica de la expresión [1.15 a] se obtiene de inmediato al sustituir D_{t-k} por r^k e igualar a cero.

$$r^{\beta} - \Phi(\alpha) r^{\beta-\alpha} - \Phi(\alpha+1) r^{\beta-\alpha-1} - \Phi(\alpha+2) r^{\beta-\alpha-2} \dots - \Phi(\beta) = 0 \quad [1.17]$$

Dado que la edad mínima para procrear es α , aunque el orden del polinomio es β , todos los términos de orden más grande que $\beta - \alpha$ y menores que β serán nulos. Los coeficientes son los mismos que los de la ecuación original, es decir, que se tendrá $\Phi(a) = dl(a)b(a) > 0$. En consecuencia, el polinomio sólo presenta un cambio de signo y un solo coeficiente positivo, por lo cual, de acuerdo con la regla de los signos de Descartes sólo habrá una raíz real positiva y, además, por el carácter real de los $\Phi(a)$, si hay raíces complejas, aparecerán en pares conjugados.

Debido a los valores que toman los coeficientes $\Phi(a)$ y a los valores de $\alpha=15$ y $\beta=50$, normalmente habrá otra raíz real negativa cuando β sea par o, si β es impar, todas las demás serán complejas. En cualquier caso se puede demostrar que el módulo de la raíz positiva es más grande que el de cualquier otra raíz o bien, reformulando la ecuación [1.15a] en términos de un sistema simultáneo de primer orden, se puede probar que la matriz del sistema es no negativa e irreducible (Impagliazzo, 1985), por lo cual, por los teoremas de Perron-Frobenius tendrá un valor propio dominante real que será la única raíz positiva de la ecuación característica del sistema. Finalmente, puesto que las condiciones iniciales son números reales, la solución debe ser real y, en consecuencia, no contendrá parte imaginaria.

La solución de la ecuación tendrá la forma de una suma de funciones exponenciales:

$$D_t^0 = a_1 r_1^t + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{\rho_j} a_{ij} t^{j-1} r_i^t \quad [1.18]$$

dónde a_i y a_{ij} son constantes que se calculan a partir de los datos iniciales por grupos de edad, n es el número de raíces diferentes, ρ_j el número de raíces idénticas a r_j o multiplicidad de r_j , el primer término recoge la dinámica originada por la única raíz real positiva y el segundo la dinámica proveniente de las raíces complejas y o/negativas.

Por las características de las raíces, la trayectoria de la solución estará regida por r_1 y experimentará oscilaciones, regidas por las otras r_i , que irán disminuyendo a medida que aumente el tiempo de proyección.

Conociendo D_{0t} se obtiene de inmediato H_{0t} por sustitución en la ecuación [1.16 a] y, por las expresiones [1.15 b], [1.16 b] se va obteniendo por simple iteración la trayectoria de los otros grupos de la población, por edad y sexo.

La especificación empírica para la simulación de la población se ha realizado en términos del sistema de ecuaciones en diferencias finitas [1.15] y [1.16] aunque, de hecho, las rutinas informáticas se han programado empleando los instrumentos del álgebra matricial. En concreto, la matriz de proyección y los vectores de composición de la población pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} D_t^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_t^\alpha \\ \vdots \\ D_t^\beta \\ \vdots \\ D_t^\omega \\ H_t^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ H_t^\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & d\Phi(\alpha) & \dots & d\Phi(\beta) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_D(1) & & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & l_D(2) & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \dots & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & l_D(\alpha) & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & \dots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & l_D(\beta) & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \dots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & l_D(\omega-1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & (1-d)\Phi(\alpha) & \dots & (1-d)\Phi(\beta) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & l_H(1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & l_H(\omega-1) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_{t-1}^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{t-1}^{\alpha-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{t-1}^{\beta-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{t-1}^\omega \\ H_{t-1}^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ H_{t-1}^\omega \end{bmatrix}$$

[1.19]

En la expresión anterior, ω es la edad límite de vida y, las $\Phi(a)$, las funciones de fecundidad neta, es decir, $b(a)l_D(a)$. La partición separa las submatrices correspondientes a los hombres y a las mujeres. Por otra parte, está claro que la matriz de proyección es no negativa, puesto que todos los elementos son nulos o positivos y dado que la submatriz formada por las β primeras filas y columnas es una matriz irreducible y rige la dinámica del sistema.

En la exposición del modelo, los coeficientes l_D , l_H y $\Phi(a) = b(a)l_D(a)$ que recogen la información sobre supervivencia y fecundidad por edades se han supuesto fijos con el fin de mostrar las propiedades formales del modelo discreto. Si estos valores van variando con el tiempo también irán variando los valores de las raíces características y, por lo tanto, la trayectoria dinámica de la población se irá ajustando constantemente a las nuevas condiciones. Aún así, las propiedades del modelo se mantendrán, puesto que derivan de las características formales de cualquier relación demográfica. El estudio de estos cambios tiene mucho interés desde la perspectiva práctica puesto que permite evaluar los efectos de diferentes comportamientos demográficos.

En la especificación empírica es posible introducir modificaciones en el valor de los parámetros a medida que va variando el tiempo, de acuerdo con hipótesis previamente establecidas. Con este objetivo, se modifica la rutina de cálculo de forma que antes de realizar cada iteración evalúe primero los nuevos valores de los coeficientes – o de las funciones de fecundidad y de supervivencia-. Nuevamente, con este sistema se vuelve a emplear la técnica de aproximar un comportamiento continuo -los cambios de comportamiento demográficos- mediante instrumentos discretos pero, tal y como hemos visto anteriormente, los errores que se cometen son de un orden despreciable puesto que los cambios en la mortalidad o en la fecundidad son suaves y lentos -dentro de la escala temporal de validez de un modelo de proyección-.

1.5 Proyección de la fecundidad

La fecundidad femenina ha experimentado tres cambios durante las últimas décadas. Por una parte ha habido una importante disminución en valores absolutos del número de hijos por mujer a cada edad, desde los años 70 hasta finales de los 90. Por otra, a grandes rasgos, se ha dado un atraso progresivo de la edad a la cual la mujer tiene el primer hijo y de la edad de fecundidad máxima o edad modal. Finalmente, ha habido un cambio en la distribución de los nacimientos por edad de la madre, tendiendo a concentrarse cada vez más en el intervalo central de edades, entre los 25 y 35 años, en lugar de hacerlo en edades más jóvenes entre los 20 y 30 años.

En la figura que sigue se representa la fecundidad femenina en España desde 2000 hasta 2008.

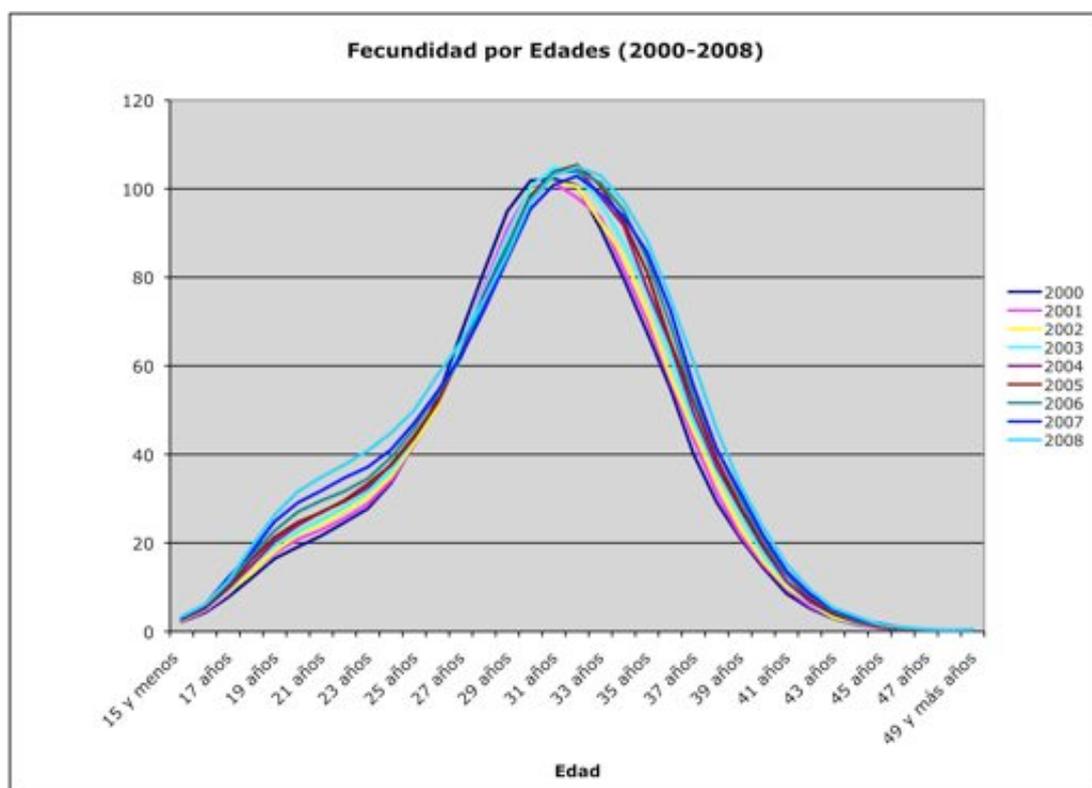


Figura 1.1: Fecundidad por 1000 mujeres según la edad. España, varios años. Fuente INE

Nótese que la curva de fecundidad por edades es cada vez más simétrica, dado que la edad modal ha ido aumentando, pero se conserva una protuberancia a la izquierda de la curva, que indica que la fecundidad a edades tempranas tiene un peso específico importante. Dicha protuberancia era inexistente en los años 70 y 80 del siglo pasado, pues la fecundidad estaba concentrada a edades más bajas que en la actualidad, pero a medida que la edad modal fue aumentando, se insinuó desde mitad de los años 90 una ligera protuberancia. Pero desde finales de los noventa y principios de este siglo hasta la actualidad, la protuberancia ha ido ganando importancia. En buena parte ello es debido al peso creciente de la población inmigrante de origen extranjero, cuya fecundidad tiene un patrón de comportamiento claramente distinto, con mayor fecundidad y mucho más concentrada a edades tempranas.

En la Figura 1.2. se representa la fecundidad por edades de las españolas (1,38 hijos/mujer), las extranjeras (1,81 hijos/mujer) y la conjunta (1,46 hijos/mujer), para el año 2008, que muestra muy claramente los fenómenos comentados.

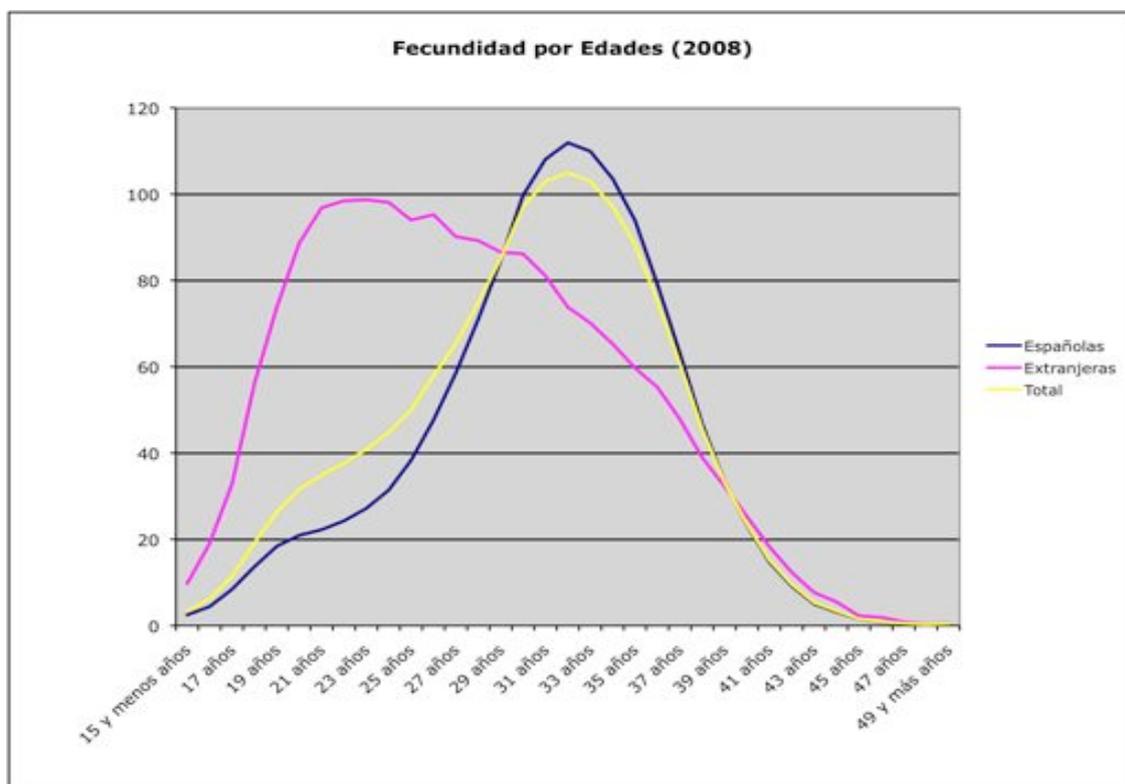


Figura 1.2: Fecundidad por edades según nacionalidad, año 2008. Fuente: INE

A partir de la evolución observada en las últimas décadas es de prever que en el futuro inmediato seguirá aumentando la edad a la cual se tiene el primer hijo y también la edad modal aunque, por razones biológicas, este último cambio ya no puede ir mucho más allá.

Con el fin de poder expresar los cambios en la fecundidad según los patrones observados y previsibles, se ha procedido al ajuste de diferentes funciones a los datos y de entre las diferentes especificaciones satisfactorias se ha elegido aquella que, manteniendo un buen ajuste a las observaciones, fuera susceptible de ser formulada en términos que permitieran expresar estas variaciones a lo largo del tiempo.

Las funciones de densidad clásicas se ajustan muy bien a los datos de fecundidad por edades. Por ejemplo, los datos de 1975 quedan muy bien ajustadas por una función de Valor Extremo, con un $|R^2|$ de 0.991. Para 1986 una LogNormal, se ajusta con un $|R^2|$ de 0.992. Los datos para 1991 se ajustan asimismo muy bien a una Logística, con $|R^2|$ de 0.996 o a una Normal, con $|R^2|$ de 0.993. El ajuste con una Normal a los datos de 2002, da una $|R^2|$ de 0.994. Obsérvese sin embargo, que se trata de distribuciones bastante diferentes entre sí y que, por lo tanto, no sirven al propósito antes enunciado de permitir un desplazamiento importante del centro de la distribución desde un extremo al otro, o de variar las asimetrías de la distribución real de los datos.

La opción adoptada ha consistido en buscar por tanteo una formulación que cumpliera las siguientes tres propiedades. En primer lugar, que diera un buen ajuste a los datos históricos observados. En segundo lugar, que fuera posible modificarla a conveniencia mediante funciones dependientes del tiempo sobre alguno de sus parámetros y, finalmente, que tuviera lo suficiente estabilidad numérica como para ser proyectada hacia el futuro para periodos largos.

Tras varias pruebas, una relación que funciona muy bien para el periodo 1975-1995 es una modificación de la función de densidad logística en la que se permite la variación de los parámetros fijos (González Calvet, 1994):

$$b(a,t) = \alpha(t) \frac{f(a,t)}{(1 + f(a,t))^{\beta(t)}} \quad [1.20]$$

En el pico logístico el exponente del denominador, $\beta(t)$ vale 2. En cambio aquí se ha convertido en un parámetro que depende del tiempo y que cambia la asimetría de la distribución, desplazando la moda hacia un extremo o el otro de la función de densidad, según que su valor sea mayor o menor que 2. De forma análoga, el parámetro de escala $\alpha(t)$ es variable con el fin de recoger los cambios en la cuantía total de la fecundidad. Por último, la función $f(a,t)$ también varía con el tiempo para equilibrar, junto con los otros parámetros, los cambios que se producen en la distribución.

La función $f(a,t)$ es la siguiente:

$$f(a,t) = e^{-(a-\mu(t))/\sigma(t)} \quad [1.21]$$

donde $\mu(t)$ es el parámetro que fija el centro de la distribución y $\sigma(t)$ es un parámetro de dispersión. En ambos casos dichos parámetros varían con el tiempo. En la curva logística, estos parámetros corresponden a la media y al error standard de la distribución.

Al extender este funcional a los datos de 1990-2008 se ha comprobado que el ajuste era globalmente muy bueno, con $|R^2| \geq 0,99$, pero se subestimaba la fecundidad a edades tempranas, esto es, no se tenía en cuenta la protuberancia y se sobreestimaba la fecundidad a edades tardías. Por ello se ha buscado una nueva especificación, eligiendo finalmente la función de densidad de la curva Normal centrada en la edad modal, a la que se añade como complemento otro pico Normal centrado a edades tempranas. El ajuste de este funcional a los datos de 2002 a 2008 es extraordinariamente bueno y es el que finalmente hemos adoptado. Los $|R^2|$ superan todos los años el 0,999. La forma del funcional es:

$$b(a,t) = \alpha_1(t) \frac{e^{-\frac{(-\mu_1+x)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} + \alpha_2(t) \frac{e^{-\frac{(-\mu_2+x)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \quad [1.22]$$

Los coeficientes α_i son parámetros de escala, mientras que los parámetros μ_i y σ_i son, respectivamente la media y la desviación standard de cada pico Normal. El ajuste del valor de los parámetros de este funcional se ha efectuado mediante técnicas de ajuste no lineal por mínimos cuadrados ponderados.

En la figura 1.3 se muestra el ajuste de este funcional a los datos. Las observaciones se representan con una línea punteada y el funcional ajustado con una curva continua.

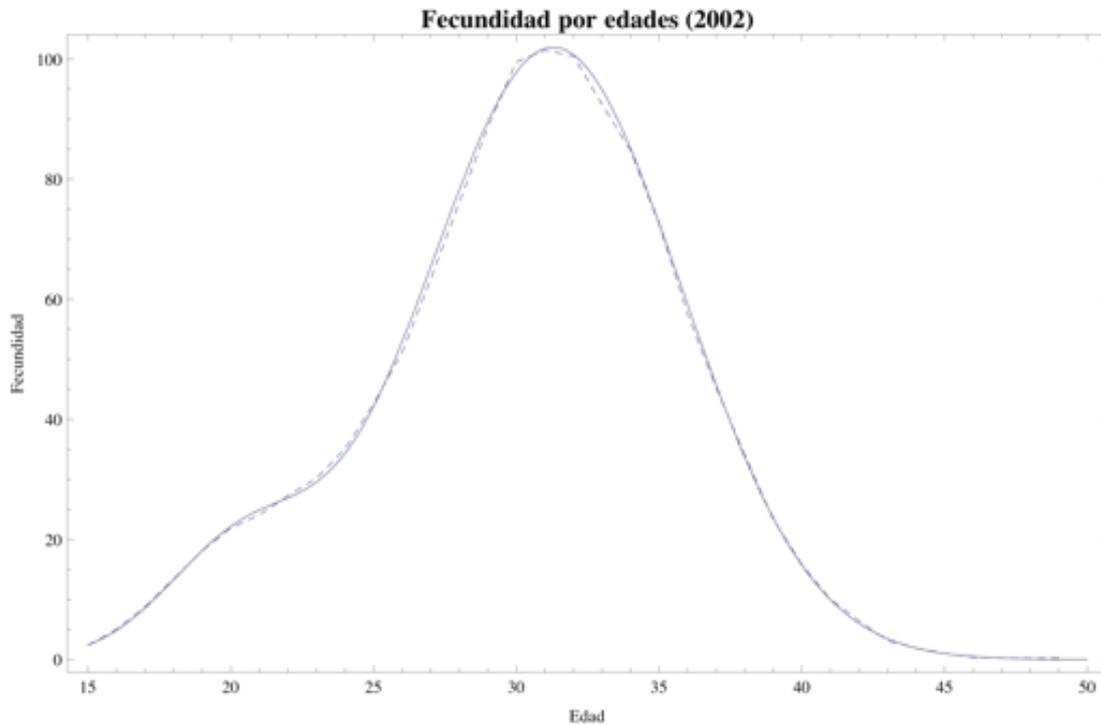


Figura 1.3: Ajuste de la fecundidad por edades, año 2002

Los parámetros de la función ajustada son los siguientes:

$$\alpha_1 = 118,803$$

$$\alpha_2 = 1150$$

$$\mu_1 = 20,3744$$

$$\mu_2 = 31,3$$

$$\sigma_1 = 2,63809$$

$$\sigma_2 = 4,5$$

$$|R^2| = 0,9993$$

Para el intervalo que recoge el periodo muestral 2000-2008, se ha ajustado la curva a los datos de cada año y, después, se ha interpolado una función dependiente del tiempo entre los valores estimados para cada parámetro en esos años con el fin de obtener una función de fecundidad de comportamiento suave a lo largo del periodo.

El ajuste del funcional a los datos de 2008 se representa en la figura 1.4, en la que la línea a trazos representa los datos y, la continua, la función ajustada.

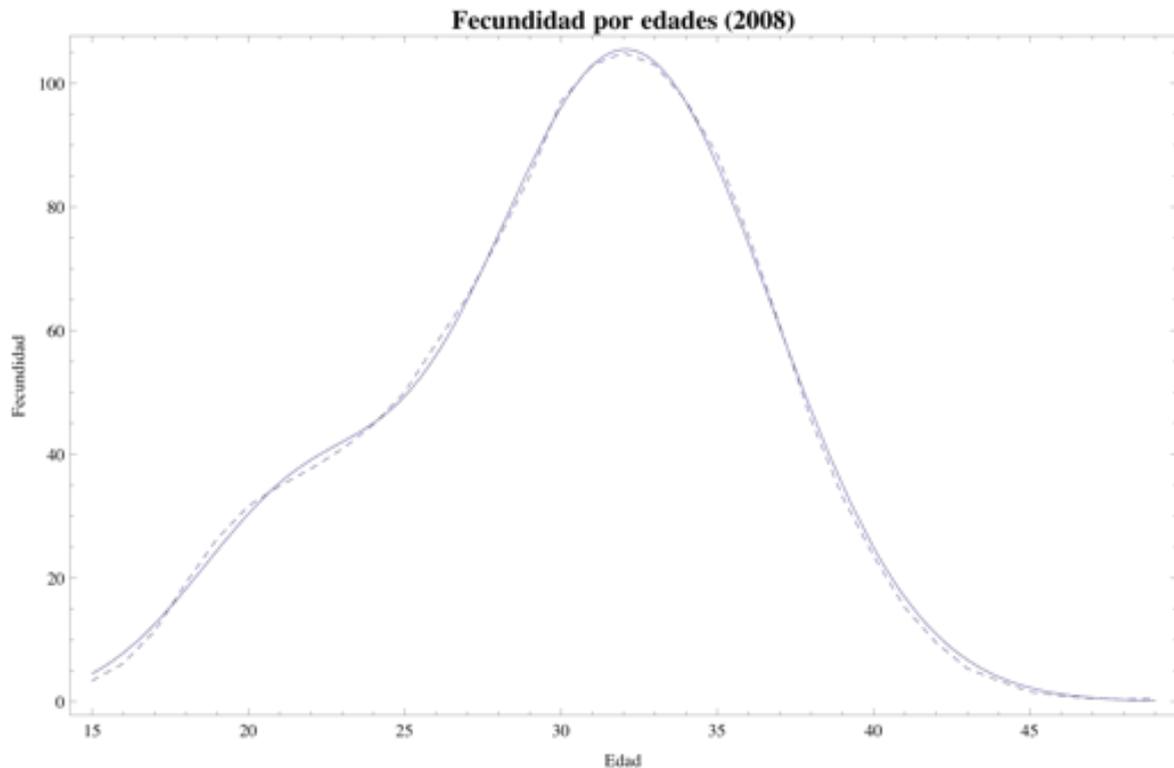


Figura 1.4: Ajuste de la fecundidad por edades, año 2008

Los parámetros ajustados para el año 2008 son los siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 244,94 \\ \alpha_2 &= 1227,26 \\ \mu_1 &= 21,448 \\ \mu_2 &= 32,1 \\ \sigma_1 &= 3,307 \\ \sigma_2 &= 4,65 \\ |R^2| &= 0,9991 \end{aligned}$$

Para el periodo de proyección, de 2008 en adelante, se toma la curva ajustada para 2008 como punto de partida y se han modificado los parámetros de la curva con el único fin de adecuar el funcional a las diferentes hipótesis de evolución.

Este proceder es poco ortodoxo, pero conviene recordar que la única finalidad de esta función de fecundidad es, solamente, la de hacer proyecciones hipotéticas sobre la base de escenarios alternativos, no la de hacer predicciones o análisis demográficos puesto que, en ese caso, la estrategia de aproximación a la estimación de la fecundidad y de su evolución es completamente diferente (Keyfitz y Flieger, 1971; Leguina, 1973; Keyfitz, 1985; INE, 2010) y va mucho más allá del propósito del presente estudio.

La ecuación de fecundidad que se alcanza en 2025 y que se mantiene hasta el final de la proyección es la que sigue:

$$b(a,t) = h_i \left[\alpha_1(t) \frac{e^{-\frac{(-\mu_1+x)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} + \alpha_2(t) \frac{e^{-\frac{(-\mu_2+x)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \right] \quad [1.23]$$

Todos los parámetros tienen la misma interpretación que en la ecuación [1.22] y el nuevo coeficiente h_i es un parámetro de escala para las distintas hipótesis o escenarios de fecundidad. En la Tabla 1.1 se indican las especificaciones de los coeficientes para las diferentes hipótesis de proyección.

<i>Curva Ajustada año 2008</i>	<i>Proyección 2025 a 2100</i>
$\alpha_1^{2008} = 244,94$	$\alpha_1^{2025} = 570$
$\alpha_2^{2008} = 1227,26$	$\alpha_2^{2025} = 1040$
$\mu_1^{2008} = 21,448$	$\mu_1^{2025} = 23,5$
$\mu_2^{2008} = 32,1$	$\mu_2^{2025} = 34$
$\sigma_1^{2008} = 3,307$	$\sigma_1^{2025} = 4,5$
$\sigma_2^{2008} = 4,65$	$\sigma_2^{2025} = 4$
$h_{1,46}^{2008} = 1$	$h_{1,3}^{2025} = 0,813973$
	$h_{1,4}^{2025} = 0,876586$
	$h_{1,46}^{2025} = 0,913446$
	$h_{1,6}^{2025} = 1,00181$
	$h_{1,71}^{2025} = 1,07069$
	$h_{1,8}^{2025} = 1,12704$
	$h_{2,1}^{2025} = 1,31488$

Tabla 1.1: Valores de los coeficientes para la proyección de la fecundidad (de 1,3 a 2,1 hijos/mujer)

En la figura 1.5 se representan las ecuaciones ajustadas de fecundidad para tres momentos del tiempo, para el año 2002, el 2008 y el 2025, una vez realizada la transición a la nueva fecundidad. Para los dos primeros años, los datos aparecen como una línea a trazos, a los que se superpone el ajuste del funcional representado con una línea continua. Para el año 2025 se representa sólo la curva continua, esto es la proyección del funcional, para una hipótesis de fecundidad de 1,5 hijos/mujer. Debe destacarse que el centro de la curva -la edad modal- se va desplazando hacia la derecha, desde los 31 años en 2002 a los 34 en el 2025 y que, al mismo tiempo, la protuberancia en el lado izquierdo (fecundidad a edades más tempranas) va aumentando a lo largo de la proyección.

El peso que se concede a la fecundidad a edades tempranas aumenta con el tiempo debido, por una parte, al peso creciente que sin duda tendrá la inmigración en la población española futura y a que la equiparación laboral de la mujer con el varón será cada vez mayor, lo que llevará a decisiones de adelantar la edad a la que se tienen los hijos con el fin de que una vez iniciada una carrera laboral no se vea interrumpida en sus momentos de mayor dinamismo, entre los 30 y los 40 años.

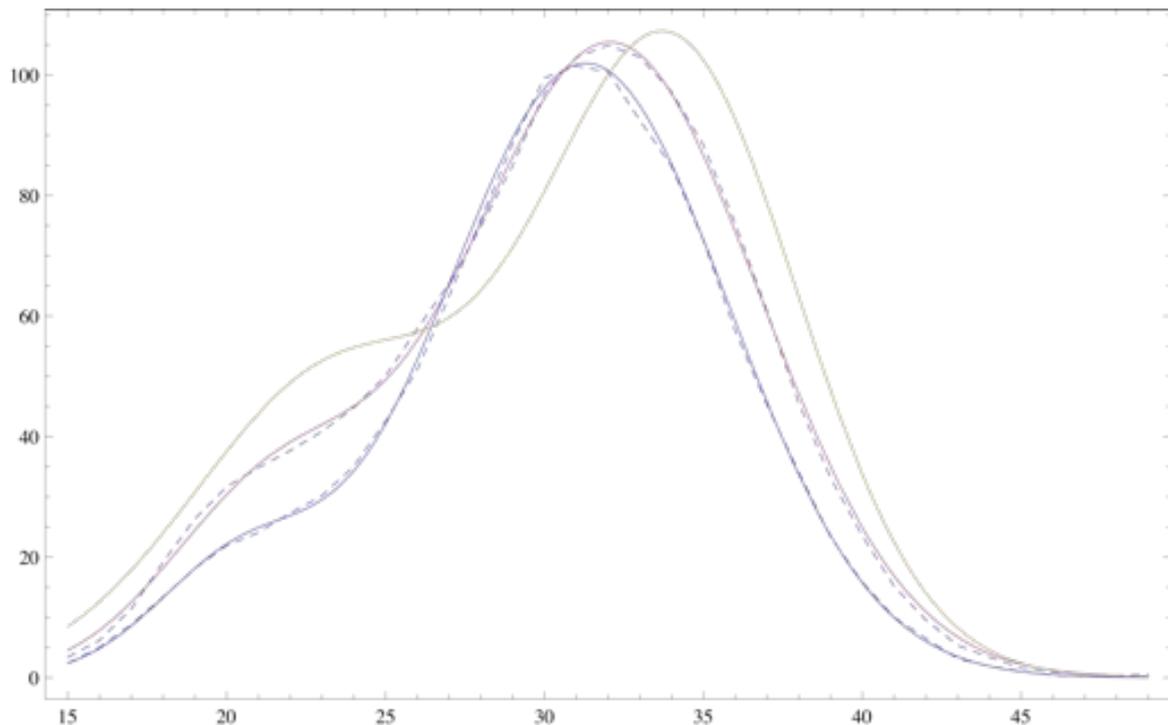


Figura 1.5: Fecundidad por edades en 2002, 2008 y proyección para 2025

La transición entre la situación original de 2008 y el régimen final de 2025, se ha realizado mediante un cambio lineal en la media de la distribución y en los coeficientes que ponderan el peso de cada curva normal dentro de la distribución final a lo largo del periodo de 2009 a 2025, momento en que los nuevos valores de los parámetros se estabilizan.

Para la proyección de la fecundidad, se consideran 7 hipótesis distintas para cubrir un amplísimo rango de posibilidades. La más pesimista es de 1,3 hijos/mujer, y la más optimista, 2,1 hijos/mujer. A ellas se suman las hipótesis intermedias de 1,4 hijos/mujer, 1,6 hijos/mujer y 1,8 hijos/mujer. Además, se añade la hipótesis de constancia de la fecundidad al nivel de 2008 (1,459 hijos/mujer) y la hipótesis de las recientes proyecciones del INE para 2009-2049, de 1,71 hijos/mujer.

Con el fin de ilustrar el comportamiento de la función de fecundidad en el tiempo, en la figura 1.6 se representa la proyección de la fecundidad bajo la hipótesis más pesimista de que disminuirá hasta los 1,3 hijos por mujer en 2025, con un periodo de transición de 15 años a contar desde 2009, y que la edad modal se irá aproximando al límite de 34 años, en un periodo similar. Estas hipótesis se pueden reformular con sólo cambiar el valor del coeficiente de escala del funcional y, por lo tanto, no tienen mayor trascendencia que la de plantear escenarios alternativos más o menos plausibles.

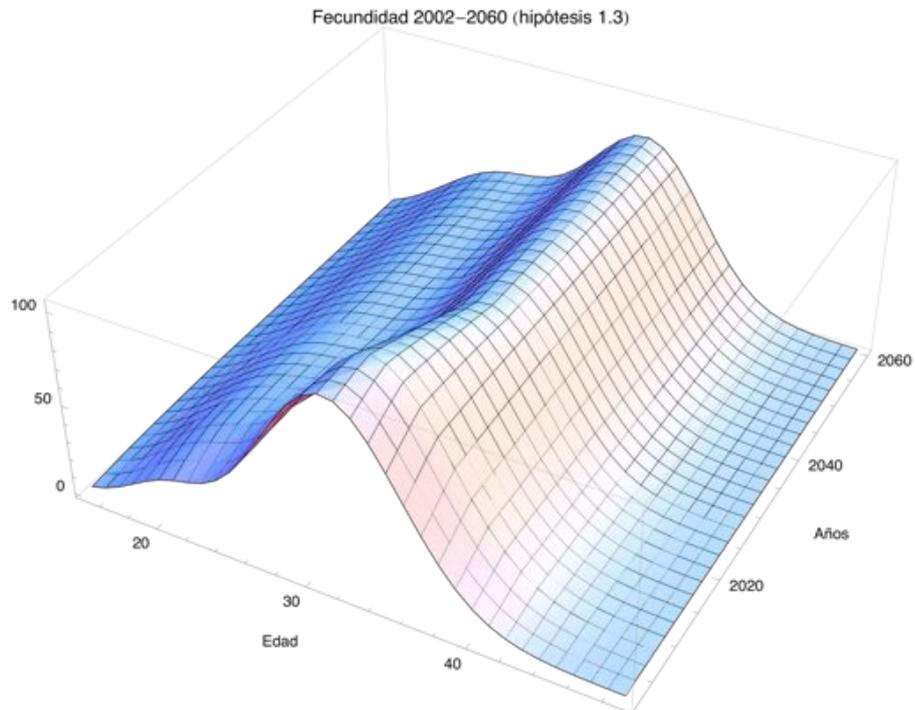


Figura 1.6: *Proyección de la fecundidad, 2009-2060, hipótesis de 1.3 hijos/mujer*

A modo de comparación, en la Figura 1.7 se representa la hipótesis de proyección del INE, en la que la fecundidad va aumentando hasta alcanzar 1,71 hijos por mujer al final del periodo de proyección y con una edad modal de 34 años.

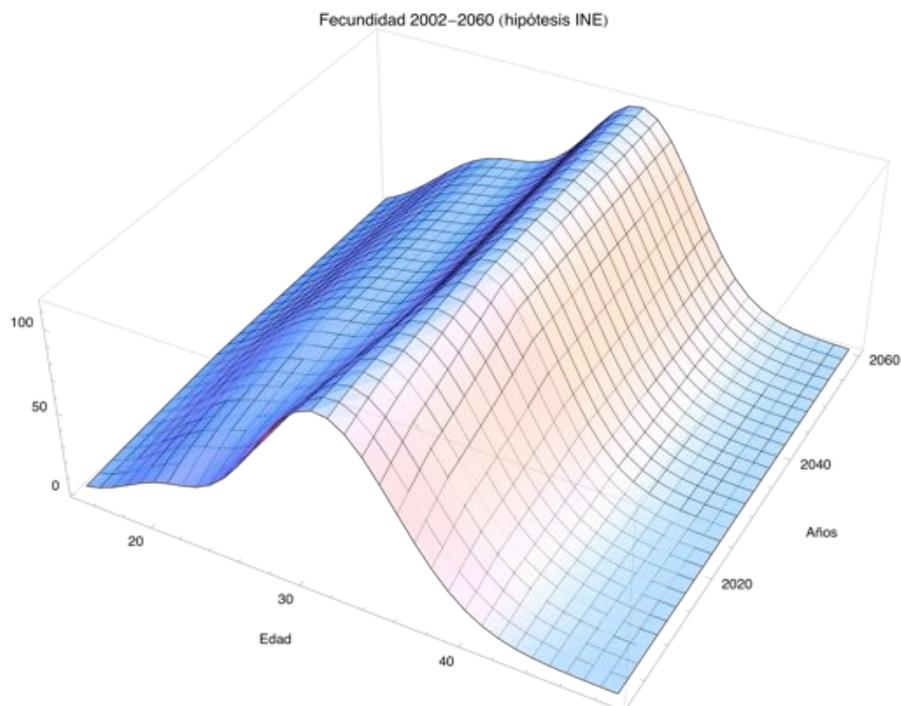


Figura 1.7: *Proyección de la fecundidad, 2009-2060, hipótesis INE*

Nótese que en el primer caso la fecundidad va disminuyendo a todas las edades hasta 2025, en que se estabiliza. En cambio, en el segundo caso la fecundidad va aumentando hasta estabilizarse de 2025 en adelante.

1.6 Proyección de la mortalidad

La esperanza de vida en España ha experimentado un aumento substancial en los últimos 50 años, pasando de los casi 70 años de 1960 a los 78 de 1991 y a los 81 de 2008. Esta prolongación de la esperanza de vida viene producida por la disminución de la mortalidad a todas las edades. En términos relativos, las reducciones más importantes se han dado a las edades más jóvenes aunque, desde el punto de vista de reducción en número absoluto, las reducciones más importantes se han dado en las edades más avanzadas. Debe destacarse que en la mayor parte de países industrializados este fenómeno ya se había adelantado entre una y dos décadas y que, por lo tanto, es bien conocido.

La reducción de la mortalidad ha dado lugar a un aumento secular de la esperanza de vida al nacer. La Figura 1.8 representa como ha ido cambiando la esperanza de vida de la población española entre 1900 y 2006. Nótese la tendencia creciente a largo plazo, con las interrupciones que supusieron la epidemia de gripe, la guerra civil y la inmediata postguerra.

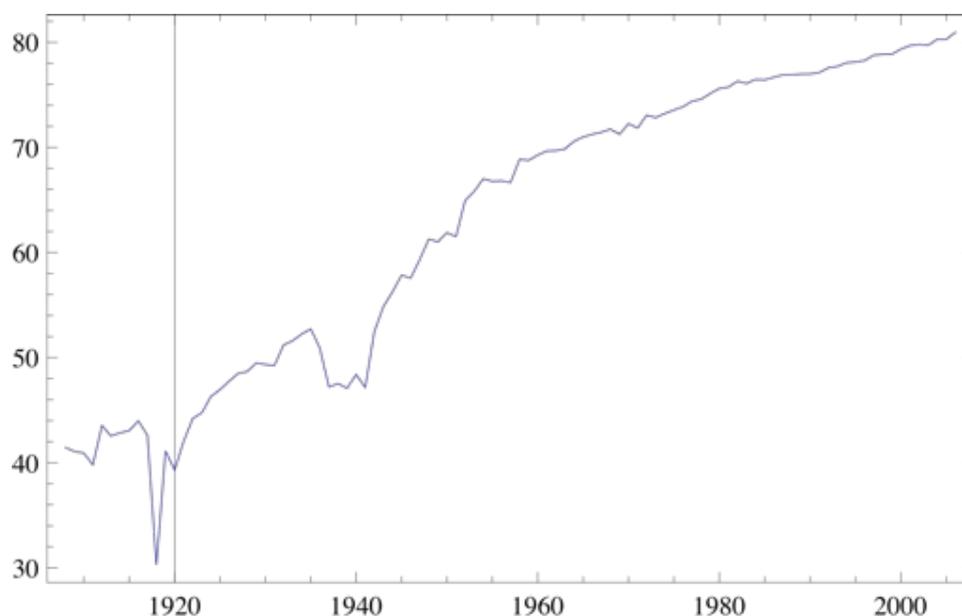


Figura 1.8: Esperanza de vida de la población española, 1900-2006 (Fuente: INE)

Es de prever que la reducción de la mortalidad proseguirá en el futuro a un ritmo similar y que, por lo tanto, seguirá cambiando la estructura por edades de la población y aumentando la esperanza de vida. En consecuencia, a fin de poder realizar proyecciones razonables, también es conveniente que el modelo demográfico incorpore patrones de mortalidad cambiante. El problema es que en el caso de la mortalidad no hay distribuciones simples que se ajusten suficientemente bien a los comportamientos reales y que permitan una especificación fácil para diferentes hipótesis de proyección.

La estrategia habitual frente de este problema es el de proyectar las tasas de mortalidad por intervalos de edad, bien por extrapolación de la tasa de variación, bien mediante indicadores sintéticos que se pueden deducir de la matriz de proyección (Pollard, 1987; Keyfitz, 1985; Lee y Carter, 1992, INE, 2010).

Desde el punto de vista de la realización de proyecciones del conjunto de la población, el uso de estas técnicas obliga a realizar muchos más cálculos sin que, en definitiva, las poblaciones proyectadas finales sean muy diferentes de lo que se obtendría empleando otros instrumentos más simples (Keyfitz, 1981) puesto que no se busca tanto una predicción precisa de las cohortes futuras sino una previsión razonable de las proporciones demográficas futuras, con márgenes de error mayores, aunque perfectamente aceptables. La opción que se adopta en este trabajo es de un tipo intermedio que, salvando todo lo posible la economía de cálculo, pueda recoger de forma bastante precisa la disminución de la mortalidad en todos los intervalos de edad.

Con este objetivo se parte del trabajo de Duchene y Wunsh donde presentan una tabla de mortalidad límite, debida sólo al envejecimiento, en la que la edad límite de vida es de 115 años, la esperanza de vida es 91.6 y la edad modal de muerte es 94.5 años (Duchene y Wunsh, 1986). Mediante esta tabla límite, los autores calculan el impacto del cáncer sobre la mortalidad en Suecia. Estudios más recientes, como el de Weon y Ho (2007), obtienen esta edad límite con técnicas algo distintas y la fijan en 125 años, con mayores esperanza de vida y edad modal de muerte. El interés de una distribución de mortalidad límite es obvia porque permite ajustar muy bien las funciones de mortalidad para edades elevadas.

En las figuras 1.9 y 1.10, se ilustra la mortalidad por sexos a partir de los 62 años según la tabla de mortalidad de 2008 para España (INE) y según la función límite original de Duchene y Wunsh, con una supervivencia de 1 entre un millón a los 115 años y una nueva función límite con una supervivencia de 1 entre 1 millón a los 125 años.

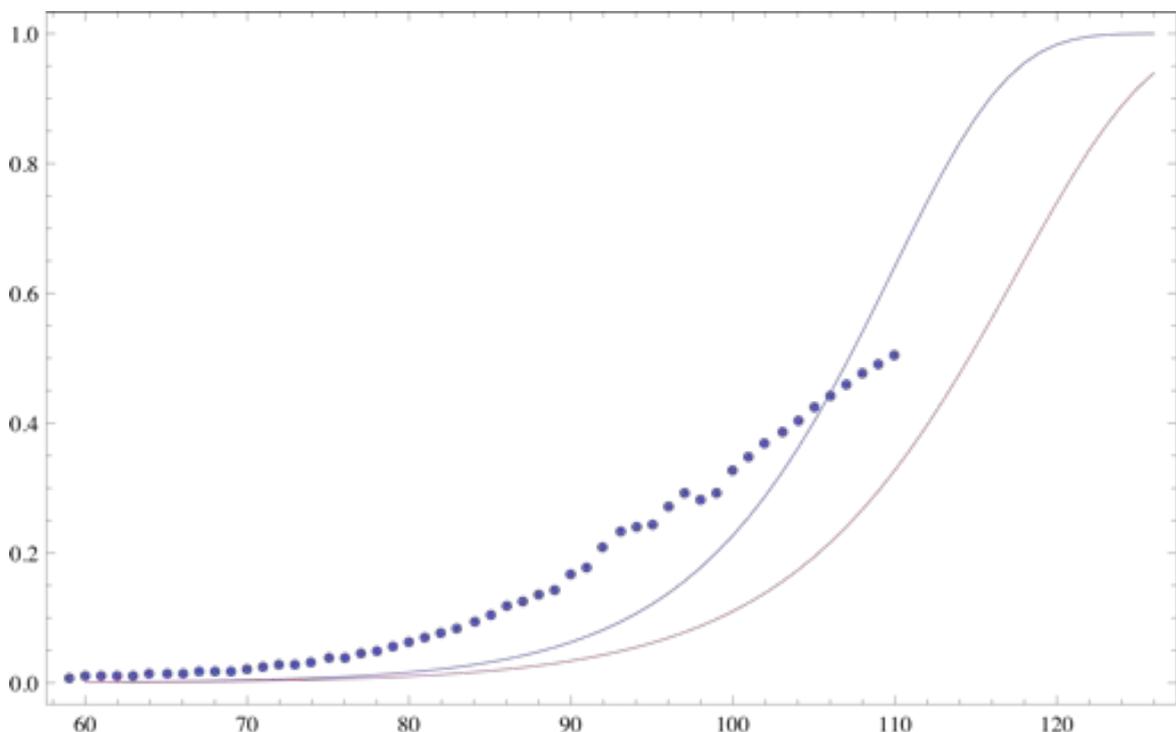


Figura 1.9: Probabilidad de muerte en España, 2008 y, Duchene y Wunsh (1986), Hombres.

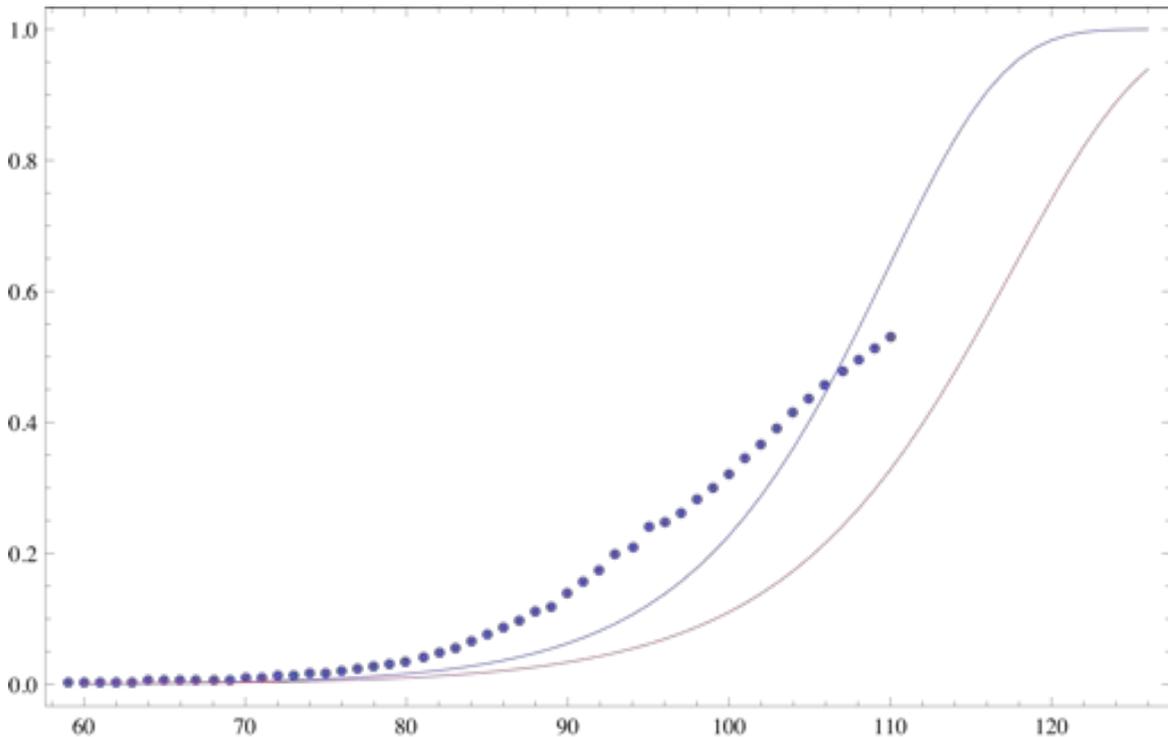


Figura 1.10: Probabilidad de muerte en España (2008) y, Duchene y Wunsh (1986), Mujeres.

Como puede comprobarse la mortalidad observada a partir de los 95 años se aproxima rápidamente a la distribución teórica y sobrepasa a ésta. La razón es simple: las personas que han sobrevivido a estas edades ya han superado casi todas las causas de mortalidad, excepción hecha de la vejez en sí misma (Caselli y Frova, 1993; Ochansky et al., 2001). Por ello se ha representado una variante de la función original de Duchene y Wunsh, con una supervivencia mayor, de 1 entre un 1 millón a los 125 años.

La solución que se adopta aquí es mixta. Se parte de los datos de las tablas de mortalidad para España de 2008, del INE, que llegan hasta los 100 años, y de las tablas históricas del Human Mortality Database Project, que extienden el cálculo de la probabilidad de muerte en España hasta los 110 años, y a ellos se ajusta un funcional similar al propuesto por Heligman y Pollard (Pollard, 1981), en la cual hay una función que recoge la evolución de la mortalidad infantil, otra para recoger la evolución de la mortalidad accidental al principio de la edad adulta y un tercer componente que es una función de Weibull de comportamiento muy similar a la propuesta por Duchene y Wunsh, para las edades más avanzadas. Para la proyección, se convierten los parámetros en funciones dependientes del tiempo con el fin de que la mortalidad a todas las edades se vaya reduciendo a lo largo de la proyección. El criterio de referencia adoptado para los valores futuros son las tablas de supervivencia estimadas por Lee y Carter (1992) y, para las edades avanzadas, una distribución con vida límite similar a la de Duchene y Wunsh.

El funcional ajustado a la probabilidad de muerte masculina mediante técnicas de mínimos cuadrados ponderados no lineales tiene la siguiente forma:

$$\frac{A}{e^{Bx}} + C \frac{e^{-\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}}}{(1 + e^{-\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}})^D} + \frac{E}{1 + e^{-F(x-G)}} - H \frac{e^{-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}}}{(1 + e^{-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}})^I} + J \quad [1.24]$$

El primer elemento recoge la mortalidad infantil, el segundo la mortalidad accidental en forma de pico logístico, el tercer elemento es una función de mortalidad límite para edades avanzadas que sigue una función de Weibull, el cuarto término es una función que corrige las desviaciones con respecto a la mortalidad límite en edades adultas (entre 60 y 80 años) y el último término es una constante para reflejar el mínimo de mortalidad a cualquier edad. El valor que toman los parámetros de esta función ajustada a los datos de probabilidad de muerte por edad en España para el año 2008 vienen dados en la siguiente tabla:

A = 0,003700896	B = 2,5	C = 0,004648062
D = 5,59758798	E = 1,0099615	F = 0,08414787
G = 107,005175	H = 0,0712498	I = 1,36012137
J = 0,0000647853		
$\mu_1 = 14,5$	$\mu_2 = 85,59632$	
$\sigma_1 = 3,898798596$	$\sigma_2 = 4,745046$	
$ R^2 = 0,9993$		

Tabla 1.2: Valores de los parámetros del funcional de probabilidad de muerte masculina 2008

En la Figura 1.11 se muestra el ajuste de la curva a los datos de mortalidad de España para el año 2008, hasta una edad de 60 años. El ajuste es muy bueno, dando un R^2 ajustado de 0,9993

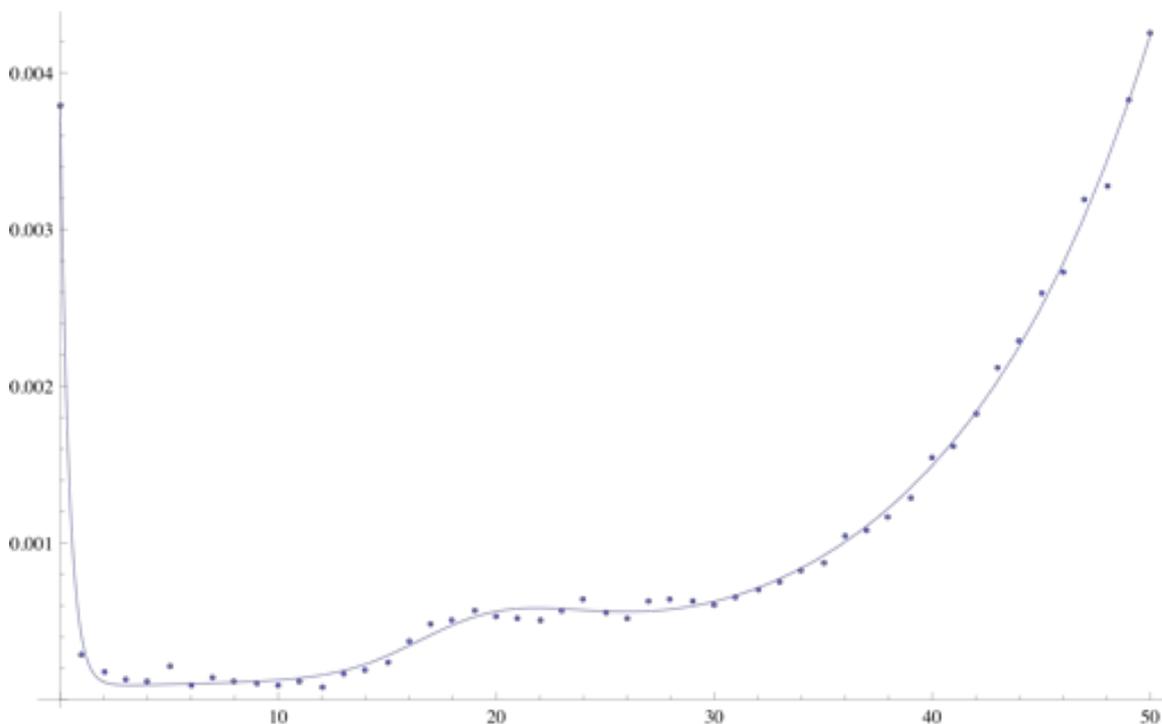


Figura 1.11: Ajuste de la curva a la mortalidad masculina, entre 0 y 60 años, España 2008

El ajuste para el conjunto de los datos a todas las edades es aún mejor, con un R^2 ajustado de 0,9995, dado que la probabilidad de muerte a edades avanzadas se acerca mucho a las distribuciones teóricas.

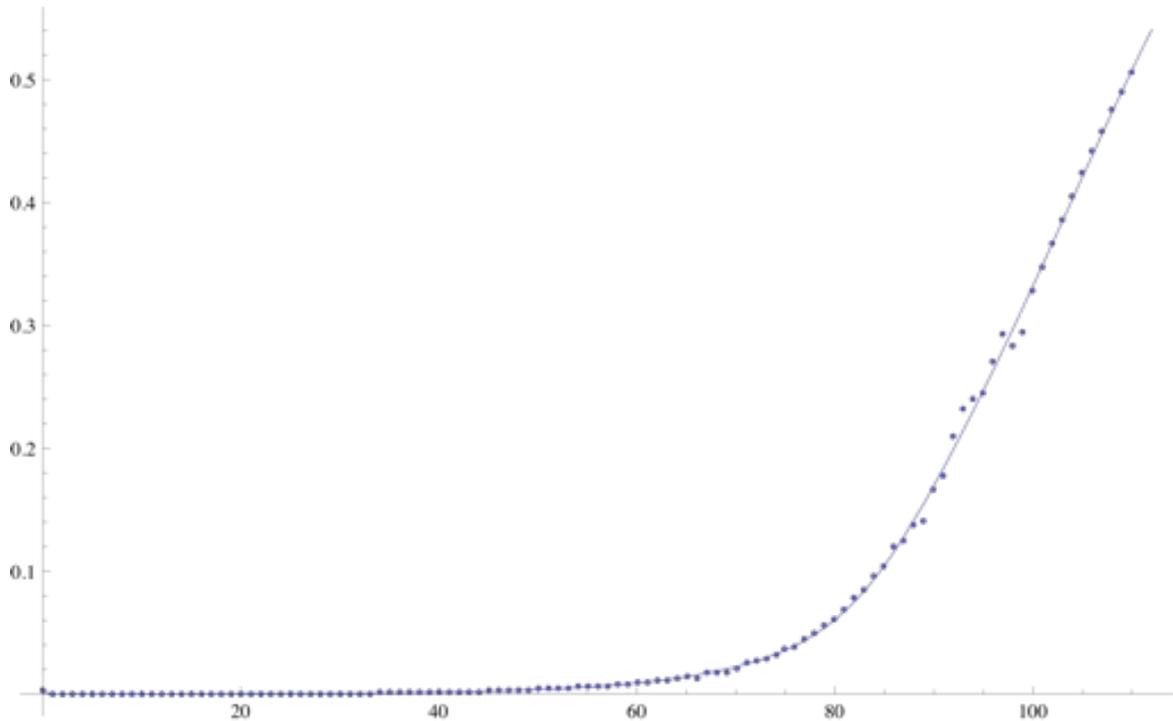


Figura 1.12: Ajuste de la curva a la mortalidad masculina, todas las edades, España 2008

Para la ajuste de la mortalidad de las mujeres ha habido que modificar ligeramente la función anterior puesto que la mortalidad 'accidental' es mucho más reducida y la mortalidad a partir de los 60 años hasta los 95 crece más lentamente, siguiendo un comportamiento casi lineal, en lugar de hacerlo a la misma tasa que a edades más avanzadas -como en el caso de los hombres-. Para ajustarlo correctamente, se ha utilizado una función de Weibull para la mortalidad a edades intermedias (entre 40 y 60 años), y se añade una logística, que ajusta muy bien a edades avanzadas. También se incorpora la misma corrección que con los varones, restando un pico logístico centrado en los 76 años. Finalmente, el funcional ajustado alcanza un R^2 igual al caso de los hombres y toma la forma:

$$\frac{A}{e^{Bx}} + C \frac{e^{-\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}}}{(1+e^{-\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}})^D} + \frac{E}{1+e^{-F(x-G)}} - H \frac{e^{-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}}}{(1+e^{-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}})^I} + J + \left(1 - \frac{e^{-\left(\frac{x+1}{K}\right)^L}}{e^{-\left(\frac{x}{K}\right)^L}} \right) \quad [1.25]$$

y los parámetros toman los valores de la siguiente tabla:

A = 0,003	B = 2	C = 0,00055	D = 2
E = 0,6	F = 0,13	G = 100,9	H = 0,1095
I = 2,76	J = 0,000085	K = 103	L = 5,8
$\mu_1 = 20$	$\mu_2 = 76,2$		
$\sigma_1 = 2$	$\sigma_2 = 10$		
$ R^2 = 0,9993$			

Tabla 1.3: Valores de los parámetros del funcional de probabilidad de muerte femenina, 2008

En la figura 1.13 y 1.14 se representa el ajuste del funcional anterior a los datos de probabilidad de muerte femenina en España en el año 2008.

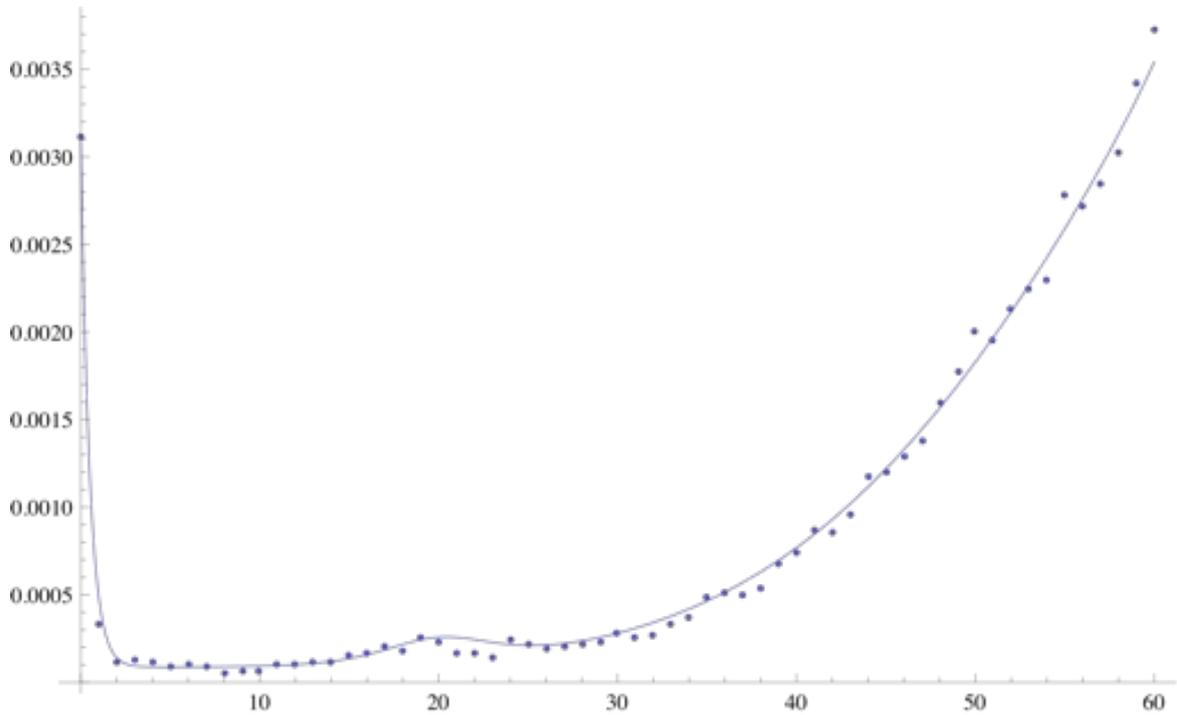


Figura 1.13 : Ajuste de la curva a la probabilidad de muerte femenina, 0-60 años, España, 2008.

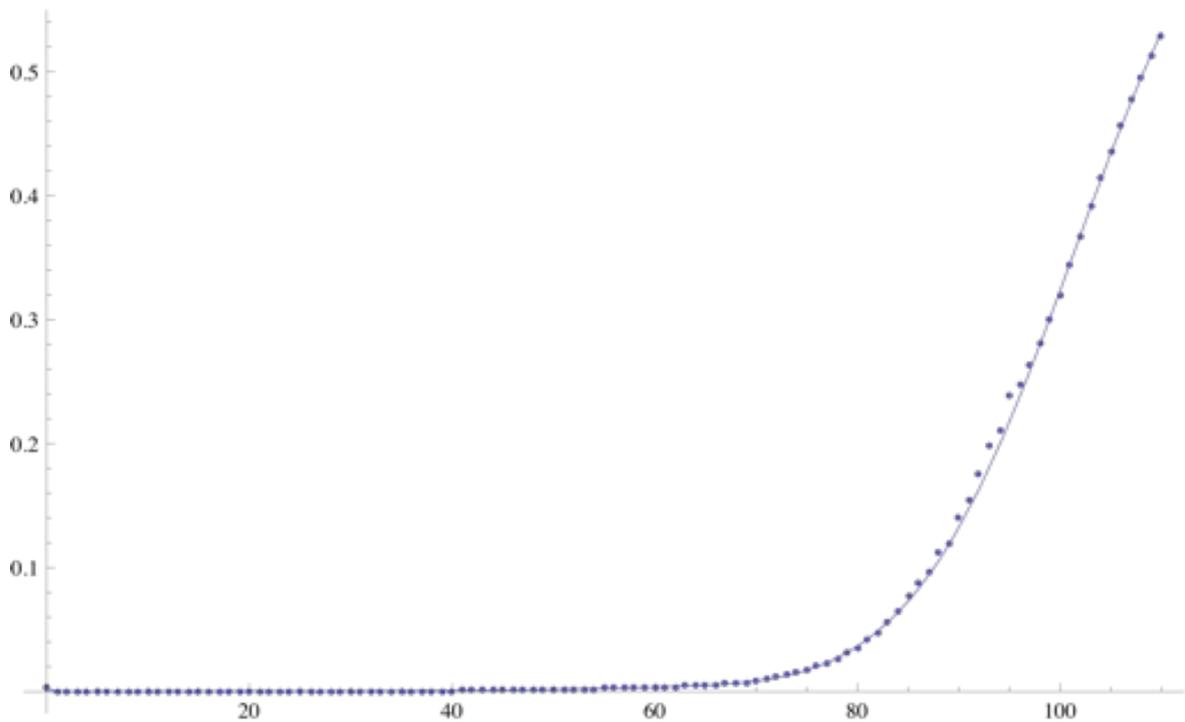


Figura 1.14 : Ajuste de la curva a la probabilidad de muerte femenina, España, 2008.

Para proyectar la mortalidad para los próximos 50 años, se adopta la hipótesis de que a lo largo de este periodo la esperanza de vida al nacer seguirá la tendencia que viene manteniendo a lo largo de los últimos 50 años y habrá alcanzado los 88,7 años en 2049, esto es, 85,9 años para los hombres y 91,5 años para las mujeres. Este resultado es dos años mayor del que obtienen Lee y Carter en sus proyecciones para el siglo XXI (Lee y Carter, 1992), mayor que el de Alonso y Sosvilla (2007) y superior al de las últimas

proyecciones del INE, que también estima una esperanza de vida de 86 años en el 2049, aunque trabajos más recientes sobre la longevidad han revisado al alza las previsiones del pasado. Para el año 2059 la hipótesis cifra la esperanza de vida en 87 años para los hombres y 92,5 para las mujeres, esto es, 89,8 años para el conjunto de la población.

Asimismo, nuestra hipótesis es más optimista que las proyecciones de la ONU y de la Comisión Europea, que usan cifras similares a las del INE. Con ello el grado de envejecimiento de la población resultante de nuestras proyecciones es algo mayor al que ahora mismo se considera oficialmente, con lo que en todos los escenarios de proyección el fenómeno del envejecimiento está especialmente bien reflejado.

El aumento de la esperanza de vida se consigue gracias a la reducción de la mortalidad en todas las edades, especialmente desde los 50 años en adelante, tal como se muestra en las figuras 1.15 y 1.16, que representan la mortalidad de 2008 comparada con la de 2035 y la de 2049, para cada sexo entre 0 y 60 años y entre 60 y 120 años.

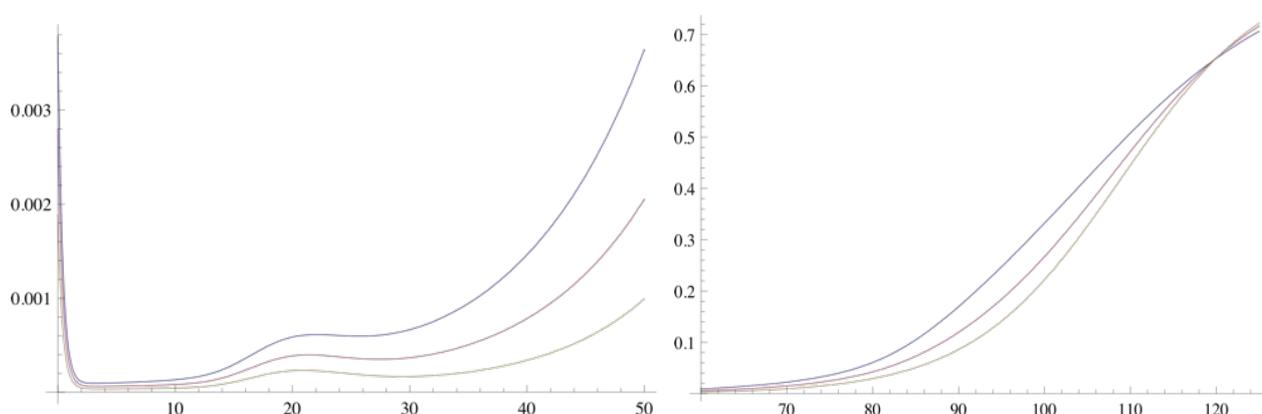


Figura 1.15: Probabilidad de muerte en 2008, 2035 y 2059, varones, de 0 a 60 años y de 60 a 120 años

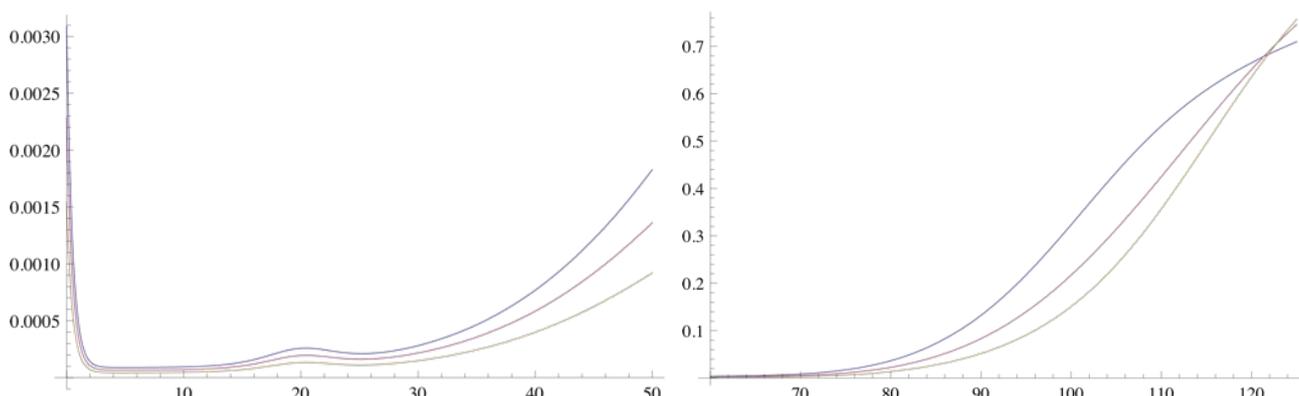


Figura 1.16: Probabilidad de muerte en 2008, 2035 y 2059, mujeres, de 0 a 60 años y de 60 a 120 años

Finalmente, se ilustra la proyección de la mortalidad por sexos para los próximos 50 años, en las Figuras 1.17 y 1.18.

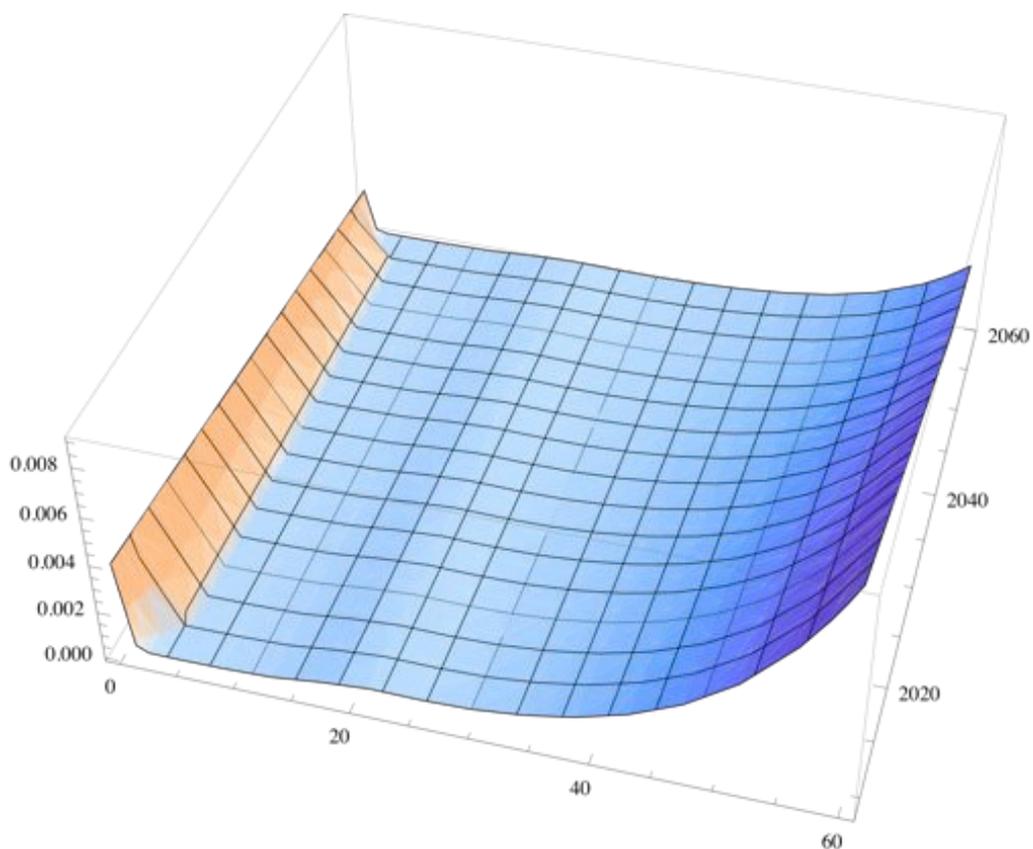


Figura 1.17: *Proyección de la probabilidad de muerte masculina, de 0 a 60 años de edad*

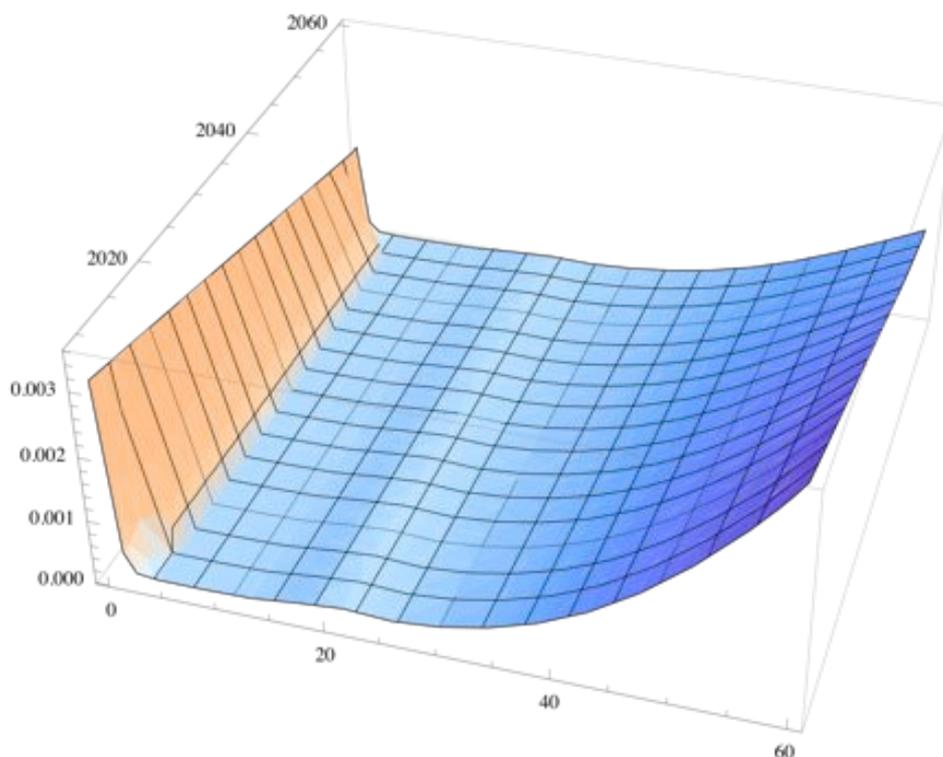


Figura 1.18: *Proyección de la mortalidad femenina, desde 0 a 60 años de edad*

A diferencia de las proyecciones de fecundidad, en la simulación no se han adoptado hipótesis alternativas de mortalidad porque al considerarse una función que probablemente sobreestima el grado de envejecimiento de la población, ya están

englobados todos los demás casos de menor esperanza de vida y que son más favorables para la viabilidad de un sistema de pensiones de reparto. Además, todas las proyecciones de población se comparan con un escenario de base consistente en que las condiciones de fecundidad y mortalidad de 2008 se mantienen constantes a lo largo de todo el periodo de proyección.

1.7 Proyección de la inmigración

Uno de los fenómenos demográficos recientes de mayor envergadura ha sido la entrada masiva de inmigrantes procedentes del exterior. En la última década el aumento de la población originado por la inmigración extranjera ha sido de unos 4,5 millones de personas. La población extranjera residente en España, que era una fracción ínfima del total a mediados de los años 90 del pasado siglo, representa en la actualidad el 12,5% de la población total y casi el 15% de la población activa. Con esa entrada masiva de personas, todas las proyecciones demográficas de la época han quedado invalidadas. Los ratios de dependencia proyectados, que en algunos trabajos avalaban previsiones apocalípticas sobre el sistema público de pensiones en fechas tan tempranas como 2005 o 2010 están lejos de alcanzarse, es más, prácticamente están al mismo nivel que hace 15 años.

Dada pues la importancia cuantitativa y cualitativa del fenómeno migratorio, su inclusión en la proyección demográfica es obligada. Sin embargo, del mismo modo que nadie fue capaz de prever la avalancha migratoria, tampoco es posible hacer previsiones suficientemente fiables sobre la inmigración futura. Se sabe que algunos factores como el nivel de vida elevado, el crecimiento económico y un ritmo elevado de creación de empleo contribuyen poderosamente a atraer la llegada de inmigrantes, del mismo modo que la crisis y el nivel elevado de desempleo frenan drásticamente el fenómeno y pueden revertirlo. Pero más allá de estas observaciones genéricas no se dispone, de momento, de ninguna buena teoría que permita fundamentar una buena previsión futura del comportamiento de la inmigración.

En estas circunstancias, una solución razonable es explorar diferentes escenarios, con un abanico amplio de comportamientos. El escenario de referencia son las proyecciones de inmigración neta realizadas por el INE (2010) en sus proyecciones de población a largo plazo. Además se consideran también otros escenarios alternativos.

En la proyección del INE, en los años inmediatos se considera que habrá una caída muy importante en la entrada de inmigrantes y un importante aumento de la emigración al exterior. Como resultado, la entrada neta de personas queda drásticamente reducida en la próxima década a unas 45000 personas/año y más adelante se va estabilizando a unos niveles de 73000 personas/año. La composición por edad y sexo da unos saldos netos muy positivos para ambos sexos entre los 16 y los 25-30 años, aproximadamente, pero para los hombres aparece un saldo negativo importante a partir de los 30-35 años hasta los 50-60. A resultas de todo ello, la composición por sexo y edad de la inmigración neta proyectada es bastante peculiar, con un importante predominio de mujeres en edades de entre 16 y 45 años. En resumidas cuentas, la entrada neta de inmigrantes proyectada por el INE entre 2009 y 2048 es de casi 2,7 millones de personas, algo más de la mitad de la entrada neta observada en la primera década del presente siglo.

La estructura de las entradas netas de inmigrantes por edad proyectada por el INE se representa en la siguiente figura, que representa las entradas netas de inmigrantes en 2009, 2025 y 2048. Los valores negativos representan salidas netas de personas. Para 2009 (en azul) la salida neta es muy importante y se produce a edades muy tempranas, de los 30 a los 50 años. En todos los casos hay una salida neta a edades avanzadas, a partir de los 65 años.

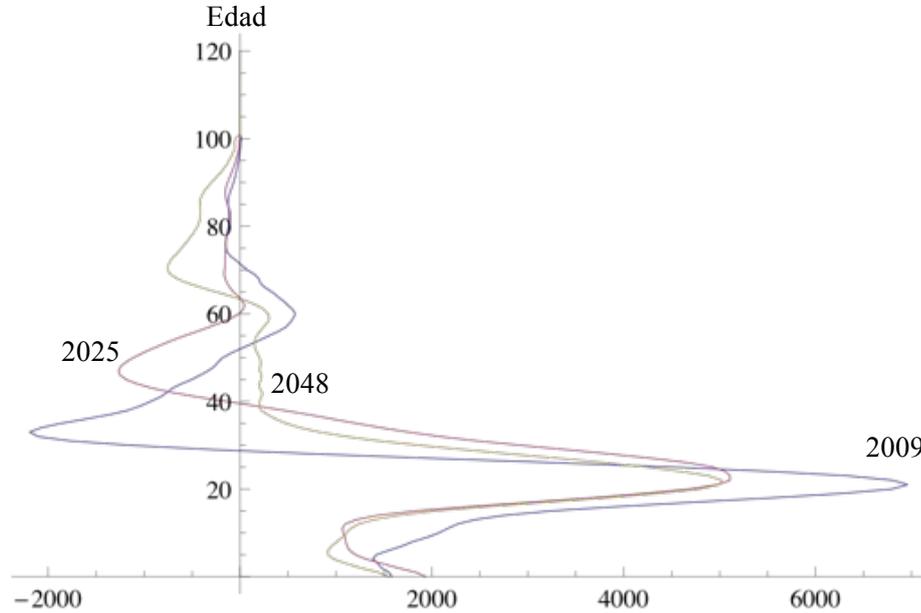


Figura 1. 19: *Inmigración neta por edad en 2009, 2025 y 2048 según INE (2010)*

Los escenarios alternativos consideran un flujo de inmigración neta fijo que varía desde las 79569 personas/año (equivalente a la proyección del INE) a las 400.000 personas/año, con una estructura por sexo y edad igual a la que el INE supone para la entrada de inmigrantes a partir del 2025.

La estructura por sexo y edad de la inmigración neta en los escenarios alternativos de entrada fija anual se representa en la figura 1.20. La entrada de hombres (línea azul) es superior a la de mujeres (rojo) a casi todas las edades.

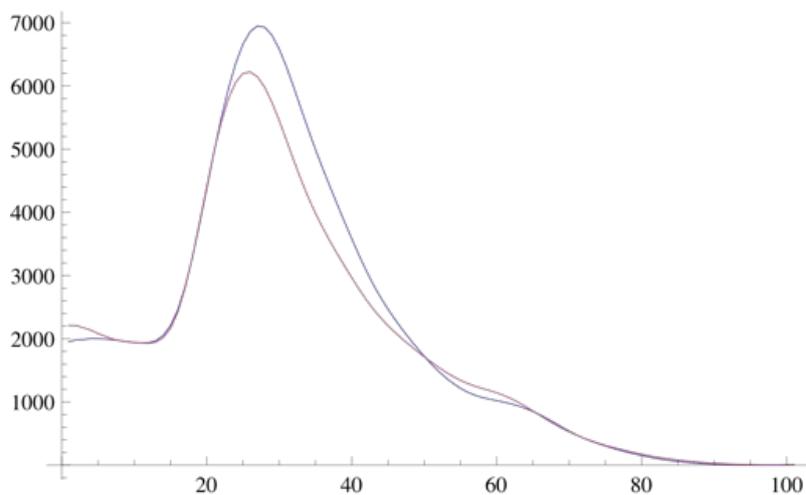


Figura 1. 20: *Estructura de la inmigración neta por edad y sexo, 2009-2059*

Tal como corresponde a un fenómeno demográfico tan condicionado por las razones económicas, es muy dependiente de la demanda de mano de obra en el país de acogida, por lo que la entrada de inmigrantes se concentra especialmente en las edades de máxima actividad, entre los 20 y los 40 años.

Para incorporar la inmigración a la proyección, debería considerarse cómo evoluciona la población inmigrante en razón a sus parámetros de fecundidad y mortalidad. Tal como se ha visto con anterioridad en la figura 1.2, la fecundidad por edades de las mujeres inmigrantes y de las españolas es distinta, tanto en su distribución como en su cuantía. En 2008, las mujeres extranjeras tenían 1,81 hijos como media, mientras que las españolas sólo tenían 1,38. Pero finalmente, la función de fecundidad que hemos adoptado tiene en cuenta a ambas y considera 1,46 hijos, con una distribución por edades que es la media ponderada de las anteriores y que, por tanto, ya considera el diferencial introducido por la inmigración.

Sin embargo, aunque se dispone de buena información sobre la fecundidad, aún no se han publicado tablas de mortalidad de la población inmigrante. Además, por la experiencia de otros países que ya han experimentado fenómenos migratorios parecidos con anterioridad, se sabe que el comportamiento demográfico de la población inmigrante se ajusta rápidamente al patrón del país de acogida. Por ello, para la proyección se ha procedido a aplicar a la población inmigrante los mismos parámetros de mortalidad que al conjunto de la población pues las tablas de mortalidad del INE no distinguen entre nacionalidades y se obtienen del conjunto de la población, esto es, como en el caso de la fecundidad ya incluyen el efecto de la inmigración.