MINISTERIO
DE TRABAJO Y
ASUNTOS SOCIALES

SECRETARÍA DE ESTADO DE LA SEGURIDAD SOCIAL

DIRECCIÓN GENERAL DE ORDENACIÓN DE LA SEGURIDAD SOCIAL

INTEGRACIÓN DE UN PLAN DE PENSIONES PRIVADO CON LA SEGURIDAD SOCIAL: UN ENFOQUE DE JUEGOS DIFERENCIALES

RESPONSABLE: FRANCISCO CABO GARCÍA
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Investigación financiada mediante subvención recibida de acuerdo con lo previsto en la Orden TAS/1051/2005, de 12 de abril (subvenciones para el Fomento de la Investigación de la Protección Social –FIPROS-)

MINISTERIO DE TRABAJO Y ASUNTOS SOCIALES

SECRETARÍA DE ESTADO DE LA SEGURIDAD SOCIAL

Planes de pensiones públicos frente a privados. Un juego diferencial a la Stackelberg

Francisco Cabo*

Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid, Spain

Ana García-González

Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid, Spain

1 Integración de un plan de pensiones privado con la Seguridad Social

En el presente trabajo de investigación se estudia la integración entre un plan de pensiones privado promovido por una empresa representativa y las pensiones públicas de jubilación gestionadas por la Seguridad Social. En concreto,el plan privado de jubilación se trata de un plan de prestación definida de empleo, que afecta al total del colectivo de trabajadores que compone la empresa. Dicho plan se encuentra integrado con la Seguridad Social. Si bien entre los planes integrados, los planes de aportación

*Estudio financiado al amparo de la Orden TAS 1051/2005.

definida superan en número a los de prestación definida, no obstante, la mayoría de los participantes en un plan integrado, se encuentran en un plan de prestación definida (véase, por ejemplo, Perun (2003), que presenta un estudio empírico para E.E.U.U.). Esto se debe a que el tamaño de los planes de pensiones, en número de trabajadores, es superior en los de prestación definida que en los de aportación definida. Su mayor tamaño, también es una característica que hace que los planes de prestación definida sean más apropiados cuando, como en el presente trabajo, se pretende estudiar un plan con una gran diversidad de trabajadores, en lo que respecta a su productividad y salario. Ambas razones, llevan a considerar un plan de pensiones de prestación definida.

La empresa objeto de estudio está constituida por un conjunto heterogéneo de trabajadores, cada uno de ellos con distinta productividad y, en consecuencia, con distintos salarios. Los trabajadores están indexados en un intervalo compacto, $[0,1]$, ordenados de menor a mayor salario. En este sentido, el salario del j-ésimo empleado se describe mediante una función afín de pendiente positiva, $w(j) : [0,1] \to [1-\mu, 1+\mu]$, con $w(j) = 1-\mu+2\mu j$. El parámetro $\mu \in (0,1)$ es una medida del grado de discrepancia entre los salarios de los trabajadores. La función $w(j)$ verifica $\int_0^1 w(j)dj = 1$, cualquiera que sea el valor de μ. Así, un incremento de μ significa una mayor distancia entre los salarios altos y bajos, sin embargo, no modifica el coste laboral de la empresa en su conjunto. Por simplicidad, los salarios se miden en términos reales y se consideran constantes.

Para definir la prestación que un trabajador retirado en el instante t, a la edad de jubilación normal, percibe de la Seguridad Social, a partir de dicho instante, se considera una renta vitalicia con mensualidad constante.[1] La Seguridad Social reemplaza el mismo porcentaje, $s(t) \in (0,1)$, del salario real a los trabajadores con menores salarios. Éstos, son los empleados que obtienen salarios por debajo de un determinado umbral, denominado *base máxima de cotización*, $\overline{w}$. Toda renta que quede por encima de este umbral no es tenida en consideración a la hora de calcular las prestaciones públicas de jubilación. Así, los trabajadores con salarios más altos, percibirán una porción $s(t)$ de la base máxima de cotización, con independencia de en cuánto supere su salario dicho umbral.

La pensión pública de jubilación para el j-ésimo trabajador que se retira en el momento t puede escribirse como:

$$B_G^j(t) = \begin{cases} s(t)w(j) & \text{si} \quad w(j) < \overline{w}, \\ s(t)\overline{w} & \text{si} \quad w(j) \geq \overline{w}. \end{cases} \tag{1}$$

[1]La consideración de una mensualidad constante permite definir la prestación de la Seguridad Social haciendo referencia a dicha cantidad mensual.

Definiendo J como el valor de $j \in [0,1]$ para el cual $w(j) = \overline{w}$, entonces J (resp. $1-J$) representa el porcentaje de trabajadores cuyos salarios se encuentran por debajo (resp. por encima) de la base máxima de cotización. Para la función $w(j)$, se obtiene $J = [\overline{w} - (1-\mu)]/(2\mu)$. Los sistemas públicos de pensiones definen al colectivo de trabajadores con salarios más altos como menos numeroso que el colectivo de trabajadores con menores retribuciones (ver por ejemplo Slusher 1998). De esta manera, se supone $\overline{w} \in (1, 1+\mu]$, o equivalentemente, $J \in (1/2, 1]$

La tasa de sustitución de la Seguridad Social para el trabajador j-ésimo se define como el cociente entre la prestación de la Seguridad Social y el salario real del empleado:

$$R_G^j(t) = \begin{cases} s(t) & \text{si} \quad w(j) < \overline{w}, \\ s(t)\dfrac{\overline{w}}{w(j)} & \text{si} \quad w(j) \geq \overline{w}. \end{cases} \tag{2}$$

En cualquier momento de tiempo, la tasa de sustitución de la Seguridad Social es idéntica para todos los empleados con sueldos bajos. Sin embargo, para los trabajadores con salarios altos, cuanto mayor sea la parte del salario que queda por encima de la base máxima de cotización, menor será su ratio de reemplazamiento de la Seguridad Social. Es en este sentido en el que el sistema público de pensiones es discriminatorio en favor de los trabajadores con salarios más bajos.

De la ecuación (2), la tasa de sustitución promedio de la Seguridad Social puede ser obtenida fácilmente:

$$\overline{R}_G(t) = \int_0^1 R_S^j(t)dj = s(t)\left[\int_0^J dj + \int_J^1 \frac{\overline{w}}{w(j)}\, dj\right] = s(t)\Omega.$$

Ω mide la discriminación de la Seguridad Social en favor de los trabajadores con menores salarios. Es función del grado de discrepancia en los salarios, μ, y de la base máxima de cotización, $\overline{w}$, que divide el conjunto de empleados en trabajadores con salarios altos y bajos, $\Omega = \Omega(\mu, \overline{w})$.

Es sencillo comprobar[2] que $\forall\ \overline{w} \in (1, 1+\mu)$, $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \overline{w}}(\mu, \overline{w}) > 0$ y $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mu}(\mu, \overline{w}) < 0$. Cuanto menor sea la discrepancia salarial, μ, y mayor sea la base máxima de cotización, $\overline{w}$, mayor será Ω. No existe discriminación en el caso extremo en el que ningún

[2]Las derivadas parciales de $\Omega(\mu, \overline{w})$ son:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \overline{w}}(\mu, \overline{w}) = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{1+\mu}{\overline{w}} > 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}(\mu, \overline{w}) = \frac{[1+\mu-\overline{w}] - \overline{w}(1+\mu)\ln \dfrac{1+\mu}{\overline{w}}}{2\mu^2(1+\mu)} = \frac{\overline{w}}{2\mu^2}\left[\phi(\overline{w}) - \phi(1+\mu)\right], \text{ con } \phi(x) = \ln x + 1/x.$$

Dado que $1+\mu > \overline{w} > 1$, y que $\phi'(x) > 0\ \forall x > 1$, se demuestra que $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mu}(\mu, \overline{w}) < 0$.

trabajador supera $\overline{w}$ ($J=1$). En tal caso, Ω alcanza su valor máximo, la unidad. Esto sucede $\forall\, \overline{w} \in (1, 1+\mu]$ cuando todos los trabajadores tienen el mismo salario, $\mu = 0$. Asimismo, tampoco existe discriminación cuando, aún existiendo discrepancia en los salarios, $\mu > 0$, la base máxima de cotización es mayor o igual al salario más alto dentro de la empresa. $\overline{w} \geq 1+\mu$: $\Omega(\mu, 1+\mu) = \lim_{\mu \to 0} \Omega(\mu, \overline{w}) = 1$. Por contra, la discriminación de la Seguridad Social en favor de los trabajadores con menor salario alcanza el máximo cuando $\overline{w}$ es mínimo y μ es máximo: $\lim_{(\mu,\bar{\mu}) \to (1,1)} \Omega(\mu, \overline{w}) = 1/2 + \ln(2)/2$.

Los trabajadores jubilados obtienen ingresos no sólo del sistema público de pensiones, sino también del plan de pensiones promovido por la empresa. En una primera etapa, el plan privado otorga a cada jubilado el mismo porcentaje, $K(t)$, de sus salarios reales en el momento de la jubilación. Partiendo de aquí, la integración con la Seguridad Social permite al empresario tener en cuenta las prestaciones públicas a la hora de determinar las pensiones privadas. A través de la integración con la Seguridad Social y siguiendo el método offset (Schultz y Leavitt 1983, Muller 2005), la pensión privada de jubilación primitiva se reduce en un determinado porcentaje, $q(t)$, de la prestación de jubilación de la Seguridad Social, que a partir de ahora se denominará porcentaje de *offset*, o simplemente *offset*. Así, la pensión de jubilación que el empresario proporciona al j-ésimo trabajador es:

$$B_E^j(t) = \begin{cases} (K(t) - q(t)s(t))\, w(j) & \text{si} \quad w(j) < \overline{w}, \\ K(t)w(j) - q(t)s(t)\overline{w} & \text{si} \quad w(j) \geq \overline{w}, \end{cases} \tag{3}$$

y dividiendo por el salario real del trabajador, se obtiene la tasa de sustitución del empresario para el trabajador j-ésimo:

$$R_E^j(t) = \begin{cases} K(t) - q(t)s(t) & \text{si} \quad w(j) < \overline{w}, \\ K(t) - q(t)s(t)\dfrac{\overline{w}}{w(j)} & \text{si} \quad w(j) \geq \overline{w}. \end{cases} \tag{4}$$

A través de la fórmula offset utilizada para integrar el plan de pensiones, las prestaciones de jubilación privadas se reducen en un porcentaje, $q(t)$, de la prestación pública de cada empleado. En términos relativos, las pensiones públicas son menores cuanto mayor sea la parte del salario del trabajador que está por encima de $\overline{w}$. De esta manera, los planes privados de jubilación integrados proporcionan la misma tasa de sustitución para todos los empleados con sueldo bajos. Por el contrario, para los trabajadores mejor remunerados, la tasa de sustitución será más grande cuanto mayor sea el salario por encima de la base máxima de cotización, lo cual les compensa por la discriminación a la que, en este sentido, les somete la Seguridad Social. Cuanto mayor sea el porcentaje de offset aplicado, más favorece el plan privado a los trabajadores con mayores salarios, y más homogénea será la tasa de sustitución total entre todos los empleados.

De la expresión (4) se deduce inmediatamente la tasa de sustitución promedio sufragada por la empresa promotora del plan de pensiones:

$$\overline{R}_E(t) = K(t) - s(t)q(t)\Omega.$$

Sumando tasas de sustitución públicas y privadas, la tasa de sustitución total para el j-ésimo trabajador es:

$$R^j(t) = \begin{cases} K(t) + (1 - q(t))s(t) & \text{si} \quad w(j) < \overline{w}, \\ K(t) + (1 - q(t))s(t)\dfrac{\overline{w}}{w(j)} & \text{si} \quad w(j) \geq \overline{w}, \end{cases} \tag{5}$$

y la tasa de sustitución total promedio, es $\overline{R}(t) = K(t) + (1 - q(t))s(t)\Omega$.

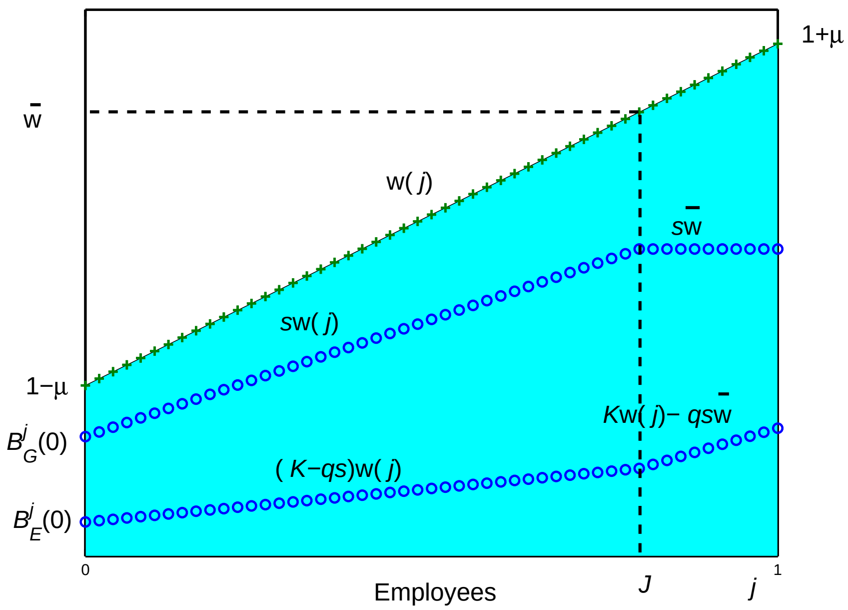

Figure 1: Salarios y prestaciones de pensión para trabajadores heterogéneos

Con objeto de determinar el gasto total de pensiones en que incurren tanto el empresario como el gobierno, se define a continuación el colectivo total de trabajadores activos, que contribuyen al sistema público de pensiones, y el colectivo de trabajadores retirados, que reciben tanto una pensión pública como una privada.

Se supone que el conjunto de trabajadores de una compañía representativa crece a una tasa constante y exógena, η, que coincide con la tasa de crecimiento de la población en la economía. Adicionalmente, se supone que todos los empleados comienzan a trabajar a la edad e y se jubilan a la edad $\overline{r}$. No existe otra causa de salida de este colectivo distinta de la de jubilación; la tasa de mortalidad para los trabajadores activos se supone nula. Sin embargo, la tasa de fallecimiento para los jubilados, λ, es positiva, y por simplicidad se supone constante (independiente de la edad). Así, la población de edad a en el momento t se define de forma diferente cuando $a < \overline{r}$ (activos), $n_A(a,t) = e^{\eta(\overline{r}-a)}e^{\eta t}$; o $a > \overline{r}$ (jubilados), $n_R(a,t) = e^{\eta(\overline{r}-a)}e^{\eta t}e^{-\lambda(a-\overline{r})}$. Agregando para distintas edades puede obtenerse el colectivo de trabajadores activos, $N_A(t)$, y jubilados, $N_R(t)$, en el momento t:

$$N_A(t) = \int_e^{\overline{r}} n_A(a,t)da = e^{\eta t}\frac{e^{\eta(\overline{r}-e)}-1}{\eta}, \quad N_R(t) = \int_{\overline{r}}^{\infty} n_R(a,t)da = \frac{e^{\eta t}}{\lambda+\eta}.$$

Los dos colectivos crecen a la misma tasa, η, por tanto, el ratio de jubilados por trabajador activo, Ψ, es independiente del tiempo:

$$\Psi = \frac{N_R(t)}{N_A(t)} = \frac{\eta}{(\lambda+\eta)(e^{\eta(\overline{r}-e)}-1)},$$

con $\partial\Psi/\partial\lambda < 0$, $\partial\Psi/\partial\overline{r} < 0$, $\partial\Psi/\partial e > 0$, y si $\eta > 0$ entonces $\partial\Psi/\partial\eta < 0$.

Las expresiones (1) y (3) representan las prestaciones de jubilación públicas y privadas para el trabajador j-ésimo. De estas definiciones, y teniendo en cuenta los supuestos sobre la dinámica poblacional de trabajadores activos y jubilados, la prestaciones que proporciona tanto la Seguridad Social como la empresa promotora del plan de pensiones, pueden ser definidas para todos los empleados que se jubilan en el momento t como:

$$b_G(t) = s(t)\Delta e^{\eta t}, \qquad b_E(t) = [K(t) - q(t)s(t)\Delta]\, e^{\eta t},$$

donde[3] $\Delta = \int_0^J w(j)dj + \int_J^1 \overline{w}dj$.

La agregación de prestaciones de jubilación para el colectivo de pensionistas, que se han jubilado en el momento t y con anterioridad, proporciona las prestaciones de jubilación totales, públicas y privadas, en términos absolutos:

$$B_G(t) = \frac{s(t)\Delta}{\lambda+\eta}e^{\eta t}, \qquad B_E(t) = \frac{K(t) - q(t)s(t)\Delta}{\lambda+\eta}e^{\eta t}.$$

Las prestaciones totales crecen al igual que el colectivo de pensionista. Se trata de funciones dependientes del tiempo, Por contra, dividiendo estas cantidades absolutas entre el número de trabajadores activos, permite medir los gastos derivados de las prestaciones de pensiones de jubilación, no en términos absolutos, sino relativos. Los gastos de pensiones soportados por trabajador activo, no dependen directamente del argumento temporal, lo cual conduce a un problema autónomo:

$$\hat{B}_G(t) = \frac{B_G(t)}{N_A(t)} = s(t)\Delta\Psi, \qquad \hat{B}_E(t) = \frac{B_E(t)}{N_A(t)} = [K(t) - q(t)s(t)\Delta]\Psi.$$

[3] $\Delta(\mu, \overline{w}) \in [3/4, 1]$ tiene una interpretación similar a la de Ω.

Una vez definida la tasa de sustitución total para cada trabajador, y los gastos en que empresario y gobierno incurren para la provisión de las pensiones de jubilación, el siguiente paso es establecer la valoración que cada jugador hace de las pensiones de jubilación y los gastos asociados a las mismas. Así, la siguiente sección define las funciones de pérdida de empresario y gobierno y, en general, el juego entre ambos agentes.

2 El modelo

En esta sección se describe un juego diferencial entre un empresario representativo, que promueve un plan privado de pensiones, y el gobierno, que proporciona pensiones de jubilación públicas a los trabajadores. El empresario considera las prestaciones de jubilación como una renta diferida para sus empleados (ver, por ejemplo, Martocchio 2003). Así considerada, la pensión privada no se trata de un pago temporal u ocasional, es una parte de las retribuciones del empresario a sus trabajadores. Se trata de un pago sostenido a los trabajadores, que continuará mientras la empresa subsista. Asimismo, las pensiones públicas constituyen el núcleo de la Seguridad Social, y como tales, están muy bien consolidadas. Este sentido de continuidad es el que conduce a considerar un horizonte temporal infinito.

Para definir las funciones de pérdidas, hay que tener en cuenta que tanto el empresario como el gobierno tienen distintos intereses en lo que se refiere a las tasas de sustitución totales para el conjunto heterogéneo de trabajadores jubilados. En segundo lugar, los costes asociados a las pensiones privadas y públicas son percibidas por ambos agentes de manera diferente.

2.1 Tasas de sustitución

El empresario tiene como objetivo que el nivel de vida o poder de compra de los trabajadores jubilados permanezca cerca de un cierto nivel deseado, objetivo que puede ser descrito mediante una tasa de sustitución total cercana a un valor constante, ρ. Además, el empresario considera las prestaciones de jubilación como remuneraciones aplazadas de las fuerzas productivas. Así, debido a que el empresario remunera a los trabajadores de acuerdo con su productividad, estará interesado en conseguir tasas de sustitución totales homogéneas para los empleados. Esta idea se ve reforzada en la literatura sobre la integración de planes de pensiones privados dentro de la Seguridad Social. En dicha literatura, se justifica la integración con el objeto de compensar la discriminación que sufren los trabajadores con mayores salarios por parte de la

Seguridad Social (ver, por ejemplo, McGill et al. 1996), buscando retener en la empresa a los trabajadores más productivos. Reuniendo estas dos ideas, el empresario minimiza las desviaciones de la tasa de sustitución total del nivel deseado, ρ:[4]

$$\Gamma_E(K,s,q) = \int_0^1 \left(R^j - \rho\right)^2 dj = (\rho - K)^2 + (1-q)^2 s^2 \Lambda - 2(\rho - K)(1-q)s\Omega,$$

con $0 < \Lambda = \int_0^J dj + \int_J^1 \left[\overline{w}/w(j)\right]^2 dj < \Omega$.

La función $\Gamma_E(K,s,q)$ penaliza desviaciones de la tasa de sustitución total de empleados con salarios heterogéneos de un nivel objetivo, ρ. Por simplicidad, la penalización se supone simétrica para tasas de sustitución superiores e inferiores.

Las decisiones de los políticos se encaminan a ganar las elecciones. Para ello, intentan maximizar su popularidad, es decir, el porcentaje de voto esperado. En lo que respecta a la generosidad de las pensiones públicas, las preferencias de los votantes no son únicas, dependen tanto de su edad como de su salario. Cuanto mayor sea la proporción de personas de edad avanzada (jubilados y empleados cercanos a la edad de jubilación), y cuanto mayor sea la desigualdad en las rentas antes de impuestos, más probable será la coalición entre las personas de más edad y los trabajadores con menores salarios para apoyar pensiones altas (ver, por ejemplo, Tabellini 1990 o Persson & Tabellini 1999). En este caso, el gobierno garantizaría con agrado una tasa de sustitución apropiada, en particular para los empleados con menores salarios. El gobierno busca tasas de sustitución cercanas a un determinado nivel deseado para los trabajadores con menores salarios. Las tasas de sustitución para los empleados con salarios más altos, que han sido ajustadas al alza mediante la integración de la pensión privada con la Seguridad Social para alcanzar a las de los trabajadores con salarios bajos, no son una prioridad para el gobierno. Así, el gobierno minimiza desviaciones de la tasa de sustitución total del nivel deseado, pero sólo para aquellos trabajadores con salario inferior a la base máxima de cotización:

$$\Gamma_G(K,s,q) = \int_0^J \left(R^j - \rho\right)^2 dj = (\rho - K)^2 + (1-q)^2 s^2 - 2(\rho - K)(1-q)s.$$

No conocemos de ningún estudio empírico que nos permita decidir si la tasa de sustitución que el empresario busca para todos los jubilados es mayor o menor que la tasa de sustitución que el gobierno desea para los empleados con menores salarios. Se trata de los objetivos de dos agentes distintos y para dos colectivos diferentes, lo que dificulta el decantarnos por una u otra alternativa. En consecuencia y por simplicidad, se analiza el caso de un objetivo idéntico, ρ.

[4]En lo sucesivo, el argumento temporal se omite cuando no se cause confusión.

2.2 Costes

Para sostener el sistema público de la Seguridad Social, el empresario contribuye a dicho sistema con un porcentaje idéntico y constante, c, del salario de cada trabajador[5], cualquiera que sea su nivel salarial (véase, por ejemplo, Gala Vallejo 1999). De esta manera, la contribución total del empresario en el instante t es:

$$C(t) = \int_e^{\overline{r}} n_A(a,t)da \int_0^1 c\, w(j)dj = cN_A(t).$$

Asimismo, el empresario proporciona una pensión privada de prestación definida, cuyo coste para la empresa en el instante t es $B_E(t)$, recogido en (3). Sumando las contribuciones al sistema público de pensiones y los gastos de las pensiones pagadas por la compañía, el coste total de las prestaciones por jubilación para el empresario, por trabajador activo, es:

$$c + [K(t) - q(t)s(t)\Delta]\Psi.$$

El gobierno, por su parte, recibe contribuciones de las empresas privadas, y proporciona pensiones públicas. Cuando los gastos para la provisión de pensiones públicas son superiores (inferiores) a las contribuciones, se genera un déficit (superávit) primario en el presupuesto público, cuya acumulación aumenta (reduce) la deuda pública. La deuda pública se financia a través de bonos públicos, cuyo tipo de interés, denotado por i, se supone constante. Asimismo, en caso de una deuda negativa, el gobierno obtendría por sus inversiones el mismo rendimiento que paga por su deuda. Así, la evolución dinámica de la deuda pública por trabajador activo puede describirse a través de una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\dot{D}(t) = s(t)\Delta\Psi + iD(t) - c. \tag{6}$$

La definición del déficit presupuestario primario, y en consecuencia, de la deuda pública, $D(t)$ sólo depende de la distancia que separa las contribuciones a la Seguridad Social y las prestaciones de las pensiones públicas. La función del gobierno como proveedor de bienes públicos no será aquí considerada. En consecuencia, el gasto del gobierno en consumo público o en inversión, y sus ingresos a través de impuestos

[5]Las contribuciones a la Seguridad Social son pagadas por el empresario en un determinado porcentaje, y el resto es detraído del salario de cada trabajados por la Seguridad Social. La proporción en que empresario y empleado se reparten el pago de las cotizaciones difiere entre países. No obstante, independientemente de cuál sea esta proporción, dado que la parte cotizada por cada trabajador es determinada por la legislación y detraída de su salario, se puede realizar el supuesto de que directa o indirectamente, es el empresario el que paga las cotizaciones a la Seguridad Social en su totalidad

no se consideran en esta definición. Equivalentemente, se está suponiendo que el presupuesto público, fuera de los ingresos y gastos relativos a la provisión de pensiones públicas, se encuentra equilibrado.

Dos de los principales argumentos que justifican por qué los países industrializados intentan sanear sus finanzas públicas se asocian con el incremento del tipo de interés causado por la deuda pública: el efecto *crowding-out* (que vincula grandes déficits con una reducción en la inversión privada y en el crecimiento de capital), y el efecto inflacionario de la deuda pública (véase Ploeg 2005). En nuestro marco, el tipo de interés se supone constante, lo que debilita estos dos argumentos, no obstante, se considera que el gobierno incluye el déficit presupuestario y la deuda pública en su función de pérdidas. La autoridad nacional intenta no desviarse sustancialmente de un cierto nivel objetivo para la deuda pública y para el déficit presupuestario (ambos se suponen iguales a cero por simplicidad). Por lo que respecta a los votantes, éstos pueden percibir los déficits o la deuda pública como un riesgo para las futuras pensiones. En particular, en la Unión Monetaria Europea, los países han de cumplir con ciertos niveles de déficit presupuestario y deuda pública, incluso se enfrentan a la posibilidad de sanciones asociadas con déficits excesivos. Al mismo tiempo, superávits presupuestarios o una deuda pública negativa pueden ser percibidos como un síntoma de una mala gestión gubernativa, que puede estar poniendo de manifiesto tanto contribuciones demasiado elevadas, como prestaciones demasiado bajas. Así, el déficit presupuestario y la deuda pública están incluidos en la función de pérdidas del gobierno como una combinación convexa de funciones cuadráticas, que penalizan las desviaciones del déficit o de la deuda, de sus niveles nulos deseados:

$$\sigma \left(s\Delta\Psi + iD - c\right)^2 + (1-\sigma)D^2, \qquad \sigma \in [0,1].$$

donde $\sigma \in [0,1]$ representa cómo el gobierno pondera el objetivo del presupuesto equilibrado frente al objetivo de la deuda nula.

La función de pérdidas del empresario se construye como la agregación de la función Γ_E, que mide la discrepancia entre las tasas de sustitución totales y su nivel deseado, ponderada por el factor θ, más los costes que para el empresario suponen las prestaciones por jubilación pública y privada:

$$\theta\Gamma_E(K,s,q) + c + \left(K - qs\Delta\right)\Psi, \qquad \theta > 0.$$

siendo θ, la ponderación o el peso que el empresario asigna al objetivo de tasas de sustitución totales cercanas a un nivel deseado. La preocupación por unos niveles adecuados de la pensión global puede ser superior o inferior al coste efectivo que ésta supone para el empresario, pudiendo así, θ, tomar valores por encima o por debajo de la unidad.

Por lo que respecta al gobierno, su función de pérdidas también recoge un doble objetivo. Por un lado, desea unas tasas de sustitución totales cercanas a un determinado nivel, si bien su preocupación es hacia los trabajadores con menores salarios. Este objetivo es ponderado a la tasa $p \in [0,1]$, frente a su objetivo de finanzas públicas, $1-p$. Así, su función de pérdidas es una combinación convexa de ambos objetivos:

$$p\Gamma_G(K,s,q) + (1-p)\left(\sigma\left(s\Delta\Psi + iD - c\right)^2 + (1-\sigma)D^2\right).$$

Una vez definidas las funciones de pérdida de ambos jugadores, a continuación se describe y resuelve el juego a la Stackelberg entre el gobierno y el empresario.

3 Juego a la Stackelberg Gobierno-Empresario

En esta sección se analizan las decisiones estratégicas sobre las prestaciones de jubilación del empresario representativo y del gobierno considerando un juego con horizonte temporal infinito. La autoridad nacional determina la tasa de sustitución de la Seguridad Social para los trabajadores con menores salarios[6], s, la cual tiene un impacto directo en el presupuesto de la Seguridad Social, y por tanto, en la dinámica y el stock de deuda pública. En adelante, este ratio se llamará *tasa de sustitución pública LW*. El stock de deuda pública tiene incidencia sobre la función de pérdidas del gobierno y al mismo tiempo se ve afectado por las decisiones óptimas de este jugador. Así, el gobierno minimiza las pérdidas a lo largo del tiempo descontadas a un tipo constante, r, sujeto a la evolución dinámica del stock de deuda pública:

$$\begin{aligned}&\min_s \int_0^\infty \left\{p\Gamma_G(K,s,q) + (1-p)\left[\sigma\left(s\Delta\Psi + iD - c\right)^2 + (1-\sigma)D^2\right]\right\} e^{-rt},\\ &\text{s.a } \dot{D} = s\Delta\Psi + iD - c, \qquad D(0) = D_0.\end{aligned} \tag{7}$$

El empresario determina el porcentaje de salario, K, que será sustituido a cada trabajador por la prestación privada de jubilación antes de la aplicación del método offset de integración. La integración a través del método offset reduce dicha tasa, K, en un cierto porcentaje, q, de la tasa de sustitución pública. A partir de ahora, este ratio será conocido como *tasa de sustitución privada autónoma* (pues sería la tasa de sustitución en ausencia de integración, i.e. $q=0$). Aunque la decisión del empresario afecte a la tasa de sustitución total, no influye directamente en la dinámica del stock de deuda pública. Asimismo, la función de pérdidas del empresario tampoco se ve

[6] Si bien s es la tasa de sustitución de los empleados cuyos salarios en el momento de la jubilación no superaban $\overline{w}$, también determina la tasa de sustitución de quienes sí superaban este límite, s. $\overline{w}/w(j) < 0$.

directamente afectada por la deuda. En consecuencia, el problema de optimización para el empresario no es dinámico, sino que se trata de un problema de decisión estático:

$$\min_{K} \left\{ \theta \Gamma_E(K, s, q) + c + (K - qs\Delta)\,\Psi \right\}. \tag{8}$$

Se considera un juego a la Stackelberg en el que el gobierno actúa como líder, mientras que el empresario es el seguidor. La caracterización del gobierno como líder se debe a su capacidad para comprometerse a una determinada tasa de sustitución pública LW, y que este compromiso sea creíble por el empresario. Una vez que el gobierno anuncia la tasa de sustitución pública LW , el empresario fijará la tasa de sustitución privada autónoma que minimice su función de pérdidas.

En este tipo de juegos el gobierno tiene una ventaja comparativa. Esta ventaja proviene del hecho de que la estrategia anunciada sea creíble por el empresario, cuya "reacción" a la misma es conocida por el gobierno. Así, el gobierno determina la pensión pública óptima teniendo en cuenta la reacción del empresario a la misma.

3.1 Resolución del juego a la Stackelberg

A continuación se calculan las estrategias de equilibrio de Markov no degenerado para el juego a la Stackelberg con el gobierno como líder y el empresario como seguidor. Así, el gobierno anuncia cuál es la tasa de sustitución pública LWque el empresario considera veraz. Por su parte, dado que la variable de decisión no tiene efecto sobre la dinámica de la deuda pública, éste decide en cada momento, de manera estática, la tasa de sustitución privada autónoma que minimiza su función de pérdidas. Esta tasa óptima es la función de reacción del empresario a la tasa de sustitución pública LW fijada por el gobierno, si bien también es función del porcentaje de offset:

$$K(s, q) = \rho - (1 - q)s\Omega - \frac{\Psi}{2\theta} \tag{9}$$

En este juego a la Stackelberg, considerar estrategias de ciclo abierto tiene sentido toda vez que el gobierno es el único jugador que resuelve un problema dinámico. El empresario se comporta como un jugador miope que no tiene en cuenta la evolución futura del stock de deuda pública. De hecho, su estrategia óptima ni tan siquiera depende del stock de deuda en cada instante. No obstante, para posibilitar la adaptación de la estrategia óptima del gobierno ante chocks externos que puedan modificar el nivel de deuda pública en un momento determinado, se estudian equilibrios de Markov, que se caracterizan por un gobierno que fija la tasa de sustitución pública LW como función de la deuda pública y del tiempo $\phi_G(D, t)$. En la búsqueda de esta estrategia óptima, el gobierno conoce la función de reacción del empresario, $K(s, q)$, y busca minimizar su función de pérdidas a lo largo del tiempo.

Para resolver este tipo de problemas, se define en cada momento t, la función valor para el gobierno, $V(D, t)$ como el valor óptimo de su funcional objetivo desde este momento t, en adelante. El problema de optimización para el gobierno es un problema autónomo con horizonte temporal infinito. Para este problema, considerando una solución estacionaria, $\phi_G(D)$, la función valor es independiente del argumento temporal, y sólo depende de la deuda pública, $V(D)$.

La resolución de este tipo de problemas en la práctica resulta imposible debido a que $\phi_G(D)$ puede ser cualquier función. La forma más sencilla de limitar el espacio de funciones factibles para el gobierno y permitir la resolución de estos problemas, es considerar $\phi_G(D)$ como una función afín en la deuda pública. La resolución detallada de este tipo de problemas puede encontrarse, por ejemplo, en Dockner *et al.* (2000) y numerosas referencias contenidas en el mismo.

Las condiciones necesarias de optimalidad se obtienen a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$\begin{aligned} rV(D) = \max_s \big\{ & -p\Gamma_G(K(s,q), s, q) - (1-p)\left(\sigma\left(s\Delta\Psi + iD - c\right)^2 + (1-\sigma)D^2\right) \\ & + V'(D)\left[s\Delta\Psi + iD - c\right]\big\} \end{aligned}$$

La tasa de sustitución pública LW y la tasa de sustitución privada autónoma óptimas, pueden ser expresadas como funciones del stock de la deuda pública y del valor marginal que el gobierno otorga al stock de deuda pública en cada instante, $V'(D)$:

$$s = \phi_G(D) = \frac{\Psi}{2\theta}\frac{p(1-q)(1-\Omega) + 2\theta(1-p)\Delta\sigma(c - Di) + \Delta\theta V'(D)}{p(1-q)^2(1-\Omega)^2 + \Delta^2\Psi^2\sigma(1-p)}, \tag{10}$$

$$K = \phi_E(D) = K(\phi_G(D), q) = \rho - (1-q)\phi_G(D)\Omega - \frac{\Psi}{2\theta}. \tag{11}$$

Si, para un determinado stock de deuda pública, incrementos marginales en dicho stock reducen la función valor del gobierno, $V'(D) < 0$, entonces, la tasa de sustitución pública LW es menor que la fijada en el caso estático, y en consecuencia, el empresario establece una tasa de sustitución privada autónoma mayor. El resultado a la inversa es cierto si el valor marginal de la deuda pública es positivo.

Para encontrar la expresión exacta de las políticas óptimas de gobierno y empresario, así como la trayectoria óptima de la deuda, dada la estructura lineal cuadrática del juego, se conjetura un función valor cuadrática para el gobierno:

$$V(D) = v_2 D^2 + v_1 D + v_0, \tag{12}$$

donde v_2, v_1 y v_0 son las incógnitas a determinar.[7]

Sustituyendo esta definición en las soluciones estacionarias óptimas en (10) y (11), estas soluciones en la ecuación de HJB, y agrupando términos para potencias iguales de D, se obtiene un sistema de tres ecuaciones de Riccati. Los coeficientes desconocidos son las soluciones de este sistema de ecuaciones. Debido a la no linealidad de este sistema se obtienen dos ternas de soluciones[8] con signos diferentes en v_2.

La expresión de v_0 resulta extraordinariamente compleja y, dado que no aparece en $V'(D)$, no tiene efecto sobre las trayectorias óptimas de las tasas de sustitución pública y privada óptimas, ni sobre la deuda pública, por lo que no será incluida aquí. Por lo que respecta a las expresiones de los coeficientes v_2 y v_1, pueden escribirse como:

$$v_2 = \frac{\pm\sqrt{[(1-p)br - p\,a(2i-r)]^2 + 4(1-p)\,\Delta^2\Psi^2[(1-p)\,b\,(1-\sigma) + p\,a(1-\sigma+i^2\sigma)]}}{2\Delta^2\Psi^2}$$
$$+\frac{(1-p)br - p\,a(2i-r)}{2\Delta^2\Psi^2} < 0,$$
$$v_1 = -\frac{p\,(1-q)(1-\Omega)[v_2 - (1-p)\sigma i][2\theta(1-q)(1-\Omega)c - \Delta\Psi^2]}{\theta[((1-p)b + p\,a)r - (v_2\,\Delta^2\Psi^2 + p\,ai)]},$$

donde $a = (1-q)^2(1-\Omega)^2 > 0$ y $b = \Delta^2\Psi^2\sigma > 0$.

Las dos soluciones de este sistema de ecuaciones de Riccati presentan distinto signo para el coeficiente v_2. Sólo la solución con $v_2 < 0$ está asociada con una función valor cóncava en D. Para esta solución, a continuación se comprueba que se verifica la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} V(D)e^{-rt} = 0,$$

donde $D(t)$ es la trayectoria óptima de la deuda pública que se obtiene sustituyendo s por su valor óptimo, $\phi_G(D)$, en la dinámica de la deuda pública:

$$\dot{D} = \phi_G(D)\Delta\Psi - c + iD, \qquad D(0) = D_0. \tag{13}$$

Esta dinámica puede reescribirse, teniendo en cuenta (10) y (12) como:

$$\dot{D} = \phi_G(D)\Delta\Psi - c + iD = D\left[\frac{p\,ai + \Delta^2\Psi^2 v_2}{p\,a + (1-p)\,b}\right] +$$
$$\frac{\theta\Delta^2\Psi^2 v_1 + p(1-q)(1-\Omega)\Delta\Psi^2 - 2\theta p\,ac}{2\theta[p\,a + (1-p)\,b]}, \qquad D(0) = D_0. \tag{14}$$

[7]Dado que las soluciones consideradas son estacionarias, estas incógnitas son independientes del tiempo.

[8]Las soluciones para v_2, v_1 y v_0 se pueden obtener gracias a la capacidad analítica de Mathematica.

Teniendo en cuenta una función valor cuadrática, la condición de transversalidad requiere una trayectoria óptima para la deuda pública que verifique que D^2 crezca a una tasa inferior a r, o equivalentemente:

$$
\begin{aligned}
&\frac{p\,ai + \Delta^2\Psi^2 v_2}{p\,a + (1-p)b} < \frac{r}{2},\\
&2ai + br - a(2i - r) - r < (a+b)r,\\
&-r < 0.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, queda demostrado que la solución con $v_2 < 0$ asociada con una función valor cóncava, satisface las condiciones suficientes de optimalidad.

3.2 Estados estacionarios

A partir de la dinámica de la deuda pública en (14), su valor de estado estacionario puede calcularse fácilmente:

$$D^* = -\frac{\theta\Delta^2\Psi^2 v_1 + p\,(1-q)(1-\Omega)\Delta\Psi^2 - 2\theta p\,ac}{2\theta[p\,ai + \Delta^2\Psi^2 v_2]}.$$

Y de la expresión de v_1 como función de v_2, la deuda pública en el estado estacionario es:

$$D^* = \frac{p\,a + (1-p)b}{[p\,a + (1-p)b]r - \Phi}\;\frac{p\,(1-q)(1-\Omega)(r-i)\Theta}{2\theta\Phi}. \tag{15}$$

donde $\Theta = 2\theta(1-q)(1-\Omega)c - \Delta\Psi^2$ y $\Phi = pai + \Delta^2\Psi^2 v_2$.

Conocida la deuda pública óptima de estado estacionario, las pensiones públicas y privadas también pueden ser caracterizadas en el estado estacionario. La tasa de sustitución pública, LW y la tasa de sustitución privada autónoma, así como la tasa de sustitución total promedio, se pueden expresar en el estado estacionario como:

$$s^* = \frac{c - D^* i}{\Delta\Psi}, \qquad K^* = \rho - \frac{(1-q)(c - \Omega D^* i)}{\Delta\Psi} + \frac{\Theta}{2\theta\Delta\Psi}, \qquad \overline{R}^* = \rho - \frac{\Psi}{2\theta}.$$

La demostración es inmediata a partir de la definición de $\overline{R}$, de la dinámica de la deuda pública en (6) y de la expresión $K(s,q)$ en (9).

3.3 Estabilidad

Asimismo, la trayectoria óptima de la deuda hacia su valor de estado estacionario se obtiene inmediatamente a partir de la ecuación diferencial (14):

$$D(t) = (D_0 - D^*)e^{\frac{\Phi}{\Upsilon}t} + D^*, \qquad D(0) = D_0, \tag{16}$$

donde $\Upsilon = p\,a + (1-p)b > 0$.

Conocido $D(t)$ se tienen las trayectorias óptimas para $s(t)$ y para $K(t)$.

De la trayectoria óptima para la deuda pública en (16) se obtiene una caracterización para la convergencia de la deuda a su estado estacionario:

$$\Phi \equiv p(1-q)^2(1-\Omega)^2 i + \Delta^2\Psi^2 v_2 < 0.$$

Teniendo en cuenta la expresión de v_2, es posible escribir esta inecuación como una condición sobre p.

Definiendo Φ como función de p, $\Phi(p)$, es fácil probar que

$$\Phi(0) = \frac{\Delta^2\Psi^2\sigma}{2}\left[r - \sqrt{r^2 + 4\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right] < 0 \qquad \forall\sigma \in (0,1).$$

Además, encontrar las soluciones de la ecuación $\Phi(p) = 0$ es equivalente a calcular las raíces del polinomio de orden 2 en p:

$$\begin{aligned}&[(1-p)b - pa]^2 r^2 - [(1-p)br - pa(2i-r)]^2 - 4\Delta^2\Psi^2(1-p)[(1-p)b(1-\sigma)\\ &+pa(1-\sigma+i^2\sigma)].\end{aligned}$$

Este polinomio tiene dos raíces reales:

$$\tilde{p} = \frac{1}{1 - \dfrac{(1-(1-q)^2\Omega)^2}{b}}, \qquad \hat{p} = \frac{1}{1 + \dfrac{ai(r-i)\sigma}{b(1-\sigma)}}$$

Dependiendo del signo de su denominador, $\tilde{p}$ puede ser bien negativo o bien mayor que uno, pero nunca tomará valores en el intervalo $(0,1)$. La segunda raíz, $\hat{p}$, puede tomar valores dentro o fuera del intervalo $(0,1)$ dependiendo de los valores de i y de r. Teniendo en cuenta que $\Phi(p)$ es una función continua con $\Phi(0) < 0$, distinguimos los siguientes casos:

- $r < i \begin{cases} r < i - \frac{b\,(1-\sigma)}{a\sigma i} & \hat{p} < 0 \\ i - \frac{b\,(1-\sigma)}{a\sigma i} < r \le i & \hat{p} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi(p) < 0, \qquad \forall p \in [0,1].$

- $r > i \qquad \hat{p} \in (0,1) \Rightarrow \begin{cases} \Phi(p) < 0, & \forall p \in [0,\hat{p}), \\ \Phi(p) > 0, & \forall p \in (\hat{p},1]. \end{cases}$

Se puede afirmar que si el gobierno descuenta a una tasa inferior al coste de la deuda, el tipo de interés de los bonos del tesoro, $r < i$, la deuda pública siempre converge a su valor de estado estacionario. En el caso contrario, si la tasa de descuento es mayor que el tipo de interés, $r > i$, la convergencia de la deuda pública hacia el estado estacionario exige que el peso que el gobierno asigna a la consecución de tasas de sustitución adecuadas, p, no sea excesivo frente al peso otorgado al objetivo de unas finanzas públicas saneadas, $1-p$, con independencia del peso relativo que el gobierno conceda al déficit frente a la deuda, σ.

En cualquier caso, si el gobierno es muy impaciente y descuenta el futuro a una tasa mayor que el tipo de interés, la deuda pública sólo converge si el gobierno no valora demasiado el objetivo de alcanzar tasas de sustitución totales adecuadas para los trabajadores con menores salarios, con respecto al objetivo de un déficit y una deuda controlados. A la inversa, siendo $r > i$, si unas finanzas públicas saneadas no constituyen una prioridad para el gobierno, $p > \hat{p}$, la deuda pública explotará hacia más o menos infinito. Bajo las condiciones que garantizan la convergencia de la deuda hacia su valor de estado estacionario, el signo de este valor puede ser completamente caracterizado. Así, el siguiente corolario describe las situaciones que conducen, bien a una deuda pública positiva, o por el contrario, a un fondo de reserva de la Seguridad Social.

3.4 Deuda pública vs. Fondo de reserva de la Seguridad Social

Bajo la hipótesis de convergencia, es decir, para $\Phi < 0$, de la expresión (15) inmediatamente se deduce que el signo(D^*) = signo$(\Theta(i-r))$. Para dotar de una interpretación a este corolario, es importante entender el significado del signo de Θ. Considerando una deuda pública igual a cero se calcula a continuación la distancia entre la tasa de sustitución total de los trabajadores con menores ingresos, $\overline{R}^{LW}$, y el objetivo del gobierno, ρ, en el equilibrio de estado estacionario. En el equilibrio, el empresario fija la tasa de sustitución autónoma privada óptima, $K(s,q)$, en (9). En consecuencia,

$$\overline{R}^{LW} - \rho = \frac{1}{J}\int_0^J R^j dj - \rho = (1-q)(1-\Omega)s - \frac{\Psi}{2\theta}$$

En el estado estacionario, un stock nulo de deuda pública implica $s^*\Delta\Psi = c$ y así,

$$\left(\overline{R}^{LW}\right)^* - \rho = (1-q)(1-\Omega)\frac{c}{\Delta\Psi} - \frac{\Psi}{2\theta} = \frac{\Theta}{2\theta\Delta\Psi}.$$

En un estado estacionario sin deuda pública, y por tanto, sin pagos por los intereses de los bonos, ni ingresos procedentes de una deuda negativa (fondo de reserva de la Seguridad Social) y además, en una situación con un presupuesto equilibrado, el gobierno gasta exactamente todas las contribuciones de los trabajadores activos en pensiones públicas, $c = s^*\Delta\Psi$. Bajo estas circunstancias, si Θ es negativo, entonces la suma de las tasas de sustitución pública y privada para los trabajadores con salarios bajos no alcanza el objetivo deseado por el gobierno, ρ. El sistema de pensiones es incapaz de alcanzar la tasa de sustitución total que el gobierno considera adecuada para los trabajadores con menores ingresos (y obviamente, la expresión (5) muestra que tampoco para los trabajadores con salarios más altos). A la inversa, un Θ positivo implica que, si las finanzas del gobierno están equilibradas, es decir, una deuda pública nula e inexistencia de déficit o superávit presupuestario, entonces los empleados con salarios más bajos obtienen una tasa de sustitución total demasiado grande, al menos desde el punto de vista del gobierno.

Es remarcable que un Θ negativo es más probable cuanto menos le importe al empresario obtener tasas de sustitución suficientemente altas (θ pequeño), cuanto más alto sea el porcentaje de offset, q, cuanto menor sea la discriminación de la Seguridad Social en favor de los empleados con menores salarios (Ω y Δ próximos a uno), cuanto más pequeñas sean las contribuciones al sistema de la Seguridad Social, c, y cuanto mayor sea el ratio de jubilados por trabajador activo, Ψ. Al contrario, valores de los parámetros en sentido opuesto harán más probable un Θ positivo.

Partiendo de una situación sin deuda pública, un Θ negativo representa un escenario donde $\overline{R}^{LW}$ no alcanza el nivel objetivo, ρ. Esto puede inducir al gobierno a incrementar s elevando los gastos en pensiones públicas, $s\Delta\Psi$, por encima de las contribuciones, c, lo cual incrementaría R^{LW} hacia el objetivo del gobierno, ρ. No obstante, mayores gastos en pensiones darían lugar a déficits presupuestarios y por tanto, a una deuda pública positiva en el estado estacionario. El gobierno debería pagar los intereses de la deuda, y quedarían menos recursos disponibles para los gastos en pensiones en el estado estacionario, y por tanto, $\overline{R}^{LW}$ distaría aún más de alcanzar el nivel objetivo, ρ.

Si el gobierno descuenta el futuro a una tasa muy alta y los intereses que paga por la deuda pública son pequeños en términos relativos, $r > i$, preferirá reducir la distancia que actualmente separa la tasa total de sustitución para los trabajadores con menores salarios de su valor objetivo, $\overline{R}^{LW} - \rho$, a expensas de generar un déficit y con ello una deuda pública positiva, lo que amplía aún más la brecha entre tasas de sustitución reales y su valor objetivo. A la inversa, un gobierno paciente ante una situación de costes elevados de la deuda pública (o, ingresos altos del fondo de reserva de la Seguridad Social) en términos relativos, $r < i$, soportaría la carga inicial de unas tasas de sustitución demasiado bajas, $\overline{R}^{LW}$ por debajo de ρ, e incluso incrementaría dicha brecha reduciendo las prestaciones públicas de jubilación, lo que produciría superávits presupuestarios, que conducirían a un fondo de reserva de la Seguridad Social. En el estado estacionario, los ingresos por los intereses procedentes de este fondo aumentarían los gastos en pensiones públicas, incrementando la tasa de sustitución total para los trabajadores con menores salarios hacia el objetivo ρ. Se podría aplicar el razonamiento opuesto para un Θ positivo.

3.5 Comparación de resultados bajo un gobierno estático vs un gobierno dinámico

El problema estático para un gobierno que actúa como líder en un juego a la Stackelberg con el empresario, puede plantearse como:

$$\max_s \{-p\Gamma_G(K(s,q),s,q) - (1-p)(\sigma(s\Delta\Psi + iD - c)^2 + (1-\sigma)D^2)\},$$

donde $K(s,q)$ es la estrategia óptima del empresario en (9).

Derivando con respecto a s, la tasa de sustitución pública estática óptima LW, es:

$$s_s(D) = \frac{\Psi}{2\theta} \frac{p(1-q)(1-\Omega) + 2\theta(1-p)\Delta\sigma(c-Di)}{p(1-q)^2(1-\Omega)^2 + \Delta^2\Psi^2\sigma(1-p)}.$$

Sustituyendo s por $s_s(D)$ en (6), y resolviendo la ecuación diferencial en D se obtiene la trayectoria óptima de la deuda pública:

$$D_s(t) = (D_0 - D_s^*)e^{\frac{\Phi_s}{\Upsilon}t} + D_s^*, \tag{17}$$

donde $\Phi_s = p(1-q)^2(1-\Omega)^2 i > 0$. Asimismo, igualando a cero esta ecuación diferencial, se obtiene la deuda pública en el estado estacionario:

$$D_s^* = \frac{\Theta}{2\theta(1-q)(1-\Omega)i}. \tag{18}$$

Toda vez que $\Phi_s/\Upsilon > 0$, la deuda pública óptima explota hacia más o menos infinito dependiendo de si D_0 se encuentra por encima o por debajo de D_s^*.

Como corolario a lo anterior, se puede afirmar que en el supuesto estático, la deuda pública óptima nunca converge hacia su valor de estado estacionario, sino que explota hacia más o menos infinito.

La comparación de la deuda pública de estado estacionario en los supuestos estático y dinámico depende del signo de Θ y de si los intereses asociados a los bonos del tesoro superan o son inferiores a la tasa a la que el gobierno descuenta el futuro. Teniendo en cuenta que $\Phi < 0$, de las expresiones (15) y (**??**), se pueden comparar la deuda pública estática y la dinámica en el estado estacionario. Así, para $\Theta > 0$, $D_s^* > D^*$ si y sólo si:

$$\frac{1}{(1-q)(1-\Omega)i} > \frac{r-i}{\Phi} \frac{p(1-q)(1-\Omega)(pa+(1-p)b)}{(pa+(1-p)b)r - \Phi},$$

Para $\Phi < 0$, esto es equivalente a:

$$\Phi[(pa+(1-p)b)r - \Phi] < (r-i)pa(pa+(1-p)b)i$$

Tras algunos cálculos, esta desigualdad se puede escribir como:

$$-[(1-p)b]^2\frac{1-\sigma}{\sigma} - pa(1-p)b\frac{1-\sigma}{\sigma} < 0,$$

válido $\forall\sigma \in (0,1)$. Siguiendo el mismo razonamiento para $\Theta < 0$ resulta $D_s^* < D^*$. Asimismo, teniendo en cuenta que signo(D_s^*) = signo(Θ) y signo(D^*)=signo($\Theta(i-r)$), queda demostrado:

	$\Theta > 0$	$\Theta < 0$
$i > r$	$D_s^* > D^* > 0$	$D_s^* < D^* < 0$
$i < r$	$D_s^* > 0 > D^*$	$D_s^* < 0 < D^*$

Cuadro 1

Una mayor deuda de estado estacionario lleva asociado un menor gasto en pensiones públicas y por tanto, una mayor tasa de sustitución privada autónoma. Así, $D^* \gtreqless D_s^* \Leftrightarrow s^* \lesseqgtr s_s^* \Leftrightarrow K^* \gtreqless K_s^*$.

La demostración de estas equivalencias es inmediata a partir de la definición de D^*, D_s^*, s^*, K^*, y teniendo en cuenta que las expresiones de s_s^* y K_s^* coinciden con las de s^* y K^* reemplazando D^* por D_s^*.

En el supuesto de un gobierno miope, partiendo de una situación de ausencia de deuda pública en la que la contribución es empleada en su totalidad para pagar las pensiones públicas, si $\Theta < 0$ entonces $R^{LW} < \rho$ y el gobierno incrementará las prestaciones para acercar la tasa de sustitución de los trabajadores con salarios bajos a su nivel deseado, ρ. Esto producirá un déficit que genera un problema de deuda pública. Los intereses pagados por los bonos emitidos para financiar la deuda reducen aun más la disponibilidad de recursos para las pensiones públicas, lo que obliga al gobierno a un mayor endeudamiento para pagar dichas prestaciones a los desempleados. Se produce así una espiral en la que un mayor déficit acrecienta la deuda y ésta, asimismo, exige de un mayor déficit para acercar la tasa de reposición a su nivel deseado. Por el contrario, si $\Theta > 0$ entonces $R^{LW} > \rho$ y el gobierno reducirá las prestaciones para acercar la tasa de sustitución de los trabajadores con salarios bajos a su nivel deseado, ρ. Esto producirá un superávit que genera un fondo de reserva de la Seguridad Social. Los intereses generados por ese fondo no son necesarios para pagar pensiones públicas, realimentando dicho fondo.

Teniendo en cuenta que el valor de estado estacionario en el supuesto estático no es estable, una vez comparado su valor con el obtenido en el caso dinámico, lo que interesa es comparar es la trayectoria temporal de la deuda pública en el supuesto estático (que se aleja de su valor de estado estacionario), frente a la trayectoria de la misma en el caso dinámico (que converge hacia su valor de estado estacionario).

A continuación se describen las trayectorias partiendo de un mismo valor inicial de deuda nula. Cuando $\Theta < 0$, la tasa de sustitución de estado estacionario para los trabajadores con bajo salario en el supuesto de deuda nula no alcanza el nivel deseado. La deuda pública de estado estacionario en el supuesto estático tiene signo negativo. No obstante, partiendo de una deuda nula, un gobierno miope entra en una espiral de endeudamiento con una deuda pública positiva y cada vez más alta. Por contra, en el supuesto dinámico se genera deuda de una cuantía finita si $i < r$, o bien, se crea un fondo de reserva también con un nivel finito si $i > r$.

Cuando $\Theta > 0$, la tasa de sustitución estacionaria para los trabajadores con menores salarios cuando la deuda es nula supera el nivel deseado. En el supuesto estático la deuda pública de estado estacionario toma un valor positivo. No obstante, partiendo de una situación inicial de inexistencia de deuda pública, un gobierno miope, que afronta unas prestaciones de jubilación que conllevan tasas de sustitución por encima de las que considera adecuadas, reduciría estas prestaciones generando un superávit que alimenta un fondo de reserva de la Seguridad Social. De nuevo se entra en una espiral que genera un fondo (o, equivalentemente, una deuda negativa) cada vez mayor, que se aleja de su valor de estado estacionario. En consecuencia, la deuda en el supuesto estático es inferior a la del caso dinámico, que converge a un valor positivo si $i > r$ o a un fondo de reserva de tamaño limitado si $i < r$.

4 Gobierno como único agente decisor

Este escenario no analiza un juego, pues las decisiones sobre prestaciones por jubilación, tanto públicas como privadas son tomadas por un único agente decisor: el gobierno. Así, las decisiones óptimas tomadas por el gobierno bajo este escenario constituyen un *first best*, que se contrastará con las soluciones del juego a la Stackelberg.

En este escenario de referencia se considera un gobierno que no sólo determina la tasa de sustitución pública LW, sino que también puede imponer la tasa de sustitución privada autónoma, K, al empresario. El problema dinámico para el gobierno es equivalente a (7), si bien en este caso la tasa de sustitución privada autónoma no es elegida por el empresario estático en (9), sino que es una segunda variable de control para el gobierno, junto con la tasa de sustitución pública LW, s.

Cuando el gobierno controla la tasa de sustitución pública LW y la tasa de sustitución privada autónoma, definiendo $F(D)$ como la función valor del gobierno en este escenario *first best*. La ecuación de HJB en este caso es:

$$\begin{aligned} rF(D) = \max_{s,K} \Big\{ & -p\Gamma_G(K,s,q) - (1-p)\big(\sigma\,(s\Delta\Psi + iD - c)^2 + (1-\sigma)D^2\big) \\ & + F'(D)\,[s\Delta\Psi + iD - c] \Big\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Conjeturando una función valor cuadrática: $F(D) = f_2 D^2 + f_1 D + f_0$, tomando derivadas con respecto a los dos controles e igualando a cero, se obtienen las expresiones óptimas para las tasas de sustitución pública y privada[9]:

$$s_f = \frac{c - Di}{\Delta\Psi} + \frac{2f_2 D + f_1}{2\Delta\Psi(1-p)\sigma}, \qquad K_f = \rho - (1-q)s_f. \tag{20}$$

Sustituyendo la función valor conjeturada y las expresiones en (20) de las estrategias óptimas en la ecuación de HJB (19) e identificando coeficientes para las mismas potencias de D, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$rf_2 = \frac{f_2^2 - (1-p)^2(1-\sigma)\sigma}{(1-p)\sigma}, \tag{21}$$

$$rf_1 = \frac{f_2 f_1}{(1-p)\sigma}, \tag{22}$$

$$rf_0 = \frac{f_1^2}{4\sigma(1-p)}. \tag{23}$$

Cuando el objetivo de un déficit equilibrado y una deuda pública controlada son valorados con un peso no nulo, es decir, $\sigma \in (0,1)$ $p < 1$, este sistema tiene dos conjuntos de soluciones, con $f_1 = f_0 = 0$ y

$$f_2 = \frac{(1-p)\sigma}{2}\left[r \pm \sqrt{r^2 + 4\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right].$$

La solución con $f_2 = (1-p)\sigma\left[r - \sqrt{r^2 + 4(1-\sigma)/\sigma}\right]/2 < 0$, garantiza una función valor cóncava en D, que garantiza que se satisface la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} F(D(t))e^{-rt} = 0,$$

donde $D(t)$ es la solución de la ecuación de estado (13). Así, estas soluciones satisfacen las condiciones suficientes de optimalidad.

Teniendo en cuenta la tasa de sustitución pública óptima en (20), la ecuación dinámica para la deuda pública en (6) se puede reescribir como:

$$\dot{D}(t) = \frac{D}{2}\left[r - \sqrt{r^2 + 4\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right] = \frac{Df_2}{(1-p)\sigma}.$$

[9] De aquí en adelante, la letra f como subíndice hará referencia a este escenario *first best*.

A partir de esta ecuación diferencial, la trayectoria óptima para la deuda pública se deduce inmediatamente:

$$D_f(t) = (D_0 - D_f^*)e^{\xi t} + D_f^*, \tag{24}$$

con $D_f^* = 0$ y $\xi = \left[r - \sqrt{r^2 + 4(1-\sigma)/\sigma}\right]/2 = f_2/((1-p)\sigma) < 0$.

Nótese que $2\xi < r$, de donde inmediatamente se deduce el cumplimiento de la condición de transversalidad.

De la definición de la tasa pública óptima de sustitución LW y de la dinámica de la deuda pública, se concluye que $Df_2/((1-p)\sigma)$ representa el déficit óptimo (si es positivo) o el superávit (si es negativo). Dado que $f_2 < 0$, una deuda pública positiva induciría al gobierno a fijar una tasa de sustitución pública LW por debajo del valor que equilibra el presupuesto, $(c - Di)/\Delta\Psi$. Esto generaría un superávit con el cual reducir la deuda pública. Se aplica el razonamiento opuesto si la deuda pública es negativa y existe un fondo de reserva de la Seguridad Social. La velocidad de ajuste hacia el estado estacionario con deuda pública nula, $|\xi| = -\xi$ es mayor cuanto mayor sea la valoración del gobierno de una deuda pública nula, $1-\sigma$, en términos relativos a su valoración de un presupuesto equilibrado, σ. Asimismo, la velocidad del ajuste disminuye con el grado de impaciencia del gobierno, r.

Conocida la deuda pública de estado estacionario, $D_f^* = 0$, de las expresiones en (20) que definen las estrategias óptimas y de la definición de $\overline{R}$, se obtienen la tasa de sustitución pública LW y la tasa de sustitución privada autónoma, así como la tasa de sustitución total promedio en el estado estacionario:

$$s_f^* = \frac{c}{\Delta\Psi}, \quad K_f^* = \rho - \frac{(1-q)c}{\Delta\Psi}, \quad \overline{R}_f^* = \rho - (1-q)(1-\Omega)\frac{c}{\Delta\Psi} = \rho - \frac{\Psi}{2\theta} - \frac{\Theta}{2\theta\Delta\Psi}.$$

En el escenario en el que el gobierno pudiese decidir directamente no sólo las prestaciones públicas de jubilación, sino también las privadas, la tasa de sustitución total promedio es superior (o inferior) a la obtenida cuando las prestaciones privadas eran fijadas por el empresario si Θ es negativo (o positivo). Es decir, si la tasa de sustitución estacionaria en el supuesto de un juego a la Stackelberg y con deuda nula no alcanza (resp. supera) el nivel deseado (i.e. $\Theta < 0$) la tasa de sustitución promedio de estado estacionario es inferior a la obtenida bajo el supuesto del gobierno como único agente decisor. Lo contrario sucede cuando $\Theta > 0$.

5 Porcentaje de Offset endógeno

En este último escenario la soberanía para decidir sobre la tasa de sustitución privada autónoma es devuelta al empresario, cuya decisión, de nuevo, no afecta ni se ve influenciada directamente por el stock de deuda pública. Resuelve el problema estático de minimización en (8) y establece como política óptima $K(s,q)$ en la ecuación (9) como función de la tasa de sustitución pública LW y de la tasa offset.

Hasta este momento, se ha supuesto que cuando el gobierno determinaba las pensiones públicas, era consciente del proceso de integración con la Seguridad Social, que coordina el plan promovido por la empresa con el sistema público de pensiones. El gobierno conocía el método offset para calcular la pensión privada del empresario detrayendo a cada trabajador una porción, q, de su pensión pública. Esta porción era considerada como una constante exógena. En esta sección el gobierno no sólo va a determinar la tasa de sustitución pública LW, sino que también decide estratégicamente el porcentaje de offset, q, con el objeto de minimizar sus pérdidas a lo largo del tiempo.

Cuando el empresario decide la tasa de sustitución privada autónoma de forma estática, mientras el gobierno controla la tasa de sustitución pública LW y el porcentaje de offset, la función valor para el gobierno se denota como $I(D)$. Así, la ecuación de HJB puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
rI(D) = \max_{s,q} & \left\{ -p\Gamma_G(K,s,q) - (1-p)\left(\sigma\left(s\Delta\Psi + iD - c\right)^2 + (1-\sigma)D^2\right)\right. \\
& \left. + I'(D)\left[s\Delta\Psi + iD - c\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Tomando derivadas respecto de s y q, e igualando a cero se calculan las estrategias óptimas de Markov para el gobierno:

$$
s_I = \frac{c - Di}{\Delta\Psi} + \frac{I'(D)}{2\Delta\Psi(1-p)\sigma}, \qquad q_I = 1 - \frac{\Psi}{2\theta(1-\Omega)s_I}. \tag{26}
$$

A partir de estas expresiones y de la ecuación (9), se obtiene la tasa autónoma privada de sustitución de equilibrio:

$$
K_I = K(s_I, q_I) = \rho - \frac{\Psi}{2\theta(1-\Omega)}. \tag{27}
$$

Si se conjetura aquí una función valor cuadrática, $I(D) = \tau_2 D^2 + \tau_1 D + \tau_0$, se sustituyen las estrategias óptimas s_I, K_I y q_I en la ecuación de HJB (25), agrupando términos para idénticas potencias de D, se obtiene un sistema de tres ecuaciones de Riccati en las variables τ_2, τ_1 y τ_0. Este sistema es equivalente al obtenido en el escenario anterior en el que el gobierno era el único decisor, en las ecuaciones (21) a (23). Así, $\tau_2 = f_2$, $\tau_1 = f_1$, $\tau_0 = f_0$, y la tasa de sustitución pública LW coincide con la tasa obtenida por el gobierno cuando es el único agente decisor, $s_I = (c - Di)/\Delta\Psi + (2f_2 D + f_1)/2\Delta\Psi(1-p)\sigma = s_f$.

La decisión óptima sobre la tasa de sustitución privada autónoma es tomada por el empresario, este agente es un optimizador estático que únicamente fija una tasa de sustitución privada autónoma como función de reacción ante las decisiones óptimas del gobierno. El líder en este juego a la Stackelberg, al determinar sus estrategias óptimas sobre la tasa de sustitución pública LW y sobre la tasa offset, conoce cómo afecta a las prestaciones privadas de modo directo, a través del mecanismo offset de integración, y de forma indirecta, ya que conoce la reacción del empresario frente a sus decisiones sobre s y q. Cuando el gobierno puede determinar la política óptima de cada una de estas dos herramientas, la tasa de sustitución privada autónoma, K_I, no coincide con la que fijaría el gobierno en el escenario en el que el gobierno es el único agente decisor, pero donde el porcentaje de offset es una variable exógena. No obstante, la función valor del gobierno cuando determina las pensiones pública y privada, siendo exógeno el porcentaje de offset, coincide con su función valor cuando las pensiones privadas las fija el empresario, pero el porcentaje de offset no es exógeno sino que constituye una segunda variable de decisión para el gobierno.

Teniendo en cuenta que $s_I = s_f$, de la ecuación dinámica (6) se deduce que $D_I^* = D_f^* = 0$. Asimismo, toda vez que los coeficientes de la función valor, cuando la tasa offset es endógenamente determinada por el gobierno, coinciden con los obtenidos en el *first best* del gobierno cuando el offset es una variable exógena pero el gobierno es el único agente decisor en materia de pensiones, $D_I(t) = D_f(t)$.

Como conclusión a esta sección, puede decirse que las trayectorias óptimas para la deuda pública, $D_I(t)$, y para la tasa de sustitución pública LW, $s_I(t)$, coinciden con las del escenario anterior, cuando el gobierno era el único agente decisor. Asimismo, a partir de las estrategias óptimas en (26) y (27) y de la definición de $\overline{R}$, la tasa de sustitución privada autónoma, el porcentaje de offset y la tasa de sustitución total promedio en el estado estacionario se pueden escribir como:

$$K_I^* = K_I = \rho - \frac{\Psi}{2\theta(1-\Omega)}, \quad q_I^* = 1 - \frac{\Delta\Psi^2}{2\theta(1-\Omega)c}, \quad \overline{R}_I^* = \rho - \frac{\Psi}{2\theta}.$$

Interesa recalcar que el porcentaje de offset en el estado estacionario, q_I^*, coincide con el valor que anula Θ. Así, en el estado estacionario, con una deuda pública nula, la tasa de sustitución total para los trabajadores con menores salarios, $\overline{R}^{LW}$, alcanza el objetivo del gobierno, ρ. Sin embargo, la tasa de sustitución total promedio para todos los jubilados permanece por debajo del nivel deseado por el empresario, que se ha supuesto coincide con ρ.

6 Comparativa

A la hora de analizar la interacción entre las pensiones públicas y las pensiones promovidas por el empresario, se han estudiado tres escenarios. El primer escenario considera un juego a la Stackelberg entre el gobierno y el empresario, actuando el primero como líder y el segundo como seguidor. La pensión privada se integra con el sistema de la Seguridad Social suponiendo un porcentaje de offset exógeno. El segundo es un escenario “de referencia" en el cual las decisiones sobre prestaciones públicas y privadas no se toman de forma estratégica, sino que ambas son determinadas por un gobierno todopoderoso. El último escenario vuelve a considerar un juego a la Stackelberg aunque le confiere al gobierno el control no sólo sobre las pensiones públicas, sino también sobre el grado de integración de las pensiones privadas con la Seguridad Social, definido mediante el porcentaje de offset.

El objetivo de esta sección es comparar las prestaciones públicas y privadas obtenidas por los jubilados bajo cada uno de los tres escenarios establecidos. Esta comparación se lleva cabo en dos dimensiones: por un lado se contraponen los niveles alcanzados por la tasa de sustitución pública, la privada y la total; y por otro, se compara el rango de variación de las tasas de sustitución entre jubilados con diferentes salarios previos a la jubilación, es decir, la heterogeneidad en las tasas de sustitución.

A partir de la definición de $\overline{R}_G(t)$, $\overline{R}_E(t)$ y $\overline{R}(t)$, así como de los valores de estado estacionario de s, K, y q bajo cada escenario, es posible comparar las tasas de sustitución promedio en el estado estacionario para los tres escenarios considerados:

La comparación entre las tasas de sustitución totales depende del signo de Θ.

$$\overline{R}_I^* = \overline{R}^* \gtrless \overline{R}_f^* \Leftrightarrow \Theta \gtrless 0. \tag{28}$$

Asimismo, para compara las tasas de sustitución públicas y las tasas de sustitución privadas, lo relevante es el signo de D^*.

Cuando el stock de deuda pública de estado estacionario, D^*, es positivo, es decir, $\Theta(i-r) > 0$, entonces

$$\overline{R}_G^* < (\overline{R}_G^*)_I = (\overline{R}_G^*)_f, \text{ y } \quad (\overline{R}_E^*) > (\overline{R}_E^*)_I (\gtrless (\overline{R}_E^*)_f \Leftrightarrow \Theta \gtrless 0 \Leftrightarrow i \gtrless r). \tag{29}$$

Por el contrario, si en el estado estacionario no existe un problema de deuda pública, sino que se mantiene un fondo de reserva de la Seguridad Social, entonces

$$\overline{R}_G^* > (\overline{R}_G^*)_I = (\overline{R}_G^*)_f, \text{ y } \quad (\overline{R}_E^*) < (\overline{R}_E^*)_I (\gtrless (\overline{R}_E^*)_f \Leftrightarrow \Theta \gtrless 0 \Leftrightarrow i \lesseqgtr r). \tag{30}$$

Cuando el empresario determina su función de reacción ante las decisiones óptimas anunciadas por el gobierno, la tasa óptima de sustitución privada autónoma en (9) es la que hace que el ratio de sustitución total de los jubilados sea $\rho - \Psi/2\theta$ con independencia de si el gobierno únicamente determina la tasa de sustitución pública LW o también puede elegir el porcentaje óptimo de offset. Así, cuanto menores sean las prestaciones públicas y cuanto mayor sea el porcentaje de offset, que el empresario detrae en el cálculo de su prestación privada, mayor será la tasa autónoma de sustitución privada. A la hora de comparar este ratio de sustitución total con el obtenido cuando la prestación privada no es determinada por el empresario, sino por el gobierno, y el porcentaje de offset es una constante exógena, es importante resaltar que el porcentaje de offset óptimo en el estado estacionario cuando éste es determinado por el gobierno, q_I^*, es el valor que hace que Θ sea igual a cero. Por lo tanto, un Θ positivo (negativo) representa una situación con un porcentaje de offset por debajo (por encima) de su valor óptimo de estado estacionario. Así, suponiendo un Θ positivo (negativo), cuando el gobierno decide de forma óptima el porcentaje de offset, fijará un valor superior (inferior) al supuesto de forma exógena. En consecuencia, la tasa se sustitución total estacionaria es mayor (menor) que su valor cuando el porcentaje de offset viene dado de forma exógena.

Nótese que hacer referencia a un Θ positivo (negativo) cuando el estado estacionario se caracteriza por la existencia de deuda pública, es equivalente a un gobierno apenas (altamente) impaciente respecto a los intereses pagados por los bonos del gobierno, $i > r$ ($i < r$). Por contra, cuando la Seguridad Social mantiene un fondo de reserva en el estado estacionario, $\Theta > 0$ (< 0) es equivalente a $i < r$ ($i > r$).

La prestación total que obtienen los jubilados en promedio, depende de si la decisión sobre la prestación privada la toma el empresario o el gobierno. Asimismo, la proporción de prestación total que es soportada por la Seguridad Social y por el empresario no tiene por qué ser idéntica en cada uno de los escenarios considerados.

Para analizar la variación en las tasas de sustitución públicas y privadas, es relevante la existencia bien de una deuda pública o bien de un fondo de reserva de la Seguridad Social en el estado estacionario de un juego a la Stackelberg considerando el porcentaje de offset como una variable exógena. Si el juego a la Stackelberg con q como variable exógena está relacionado con una deuda pública de estado estacionario positiva, $D^* > 0$, la tasa de sustitución pública crecería si el gobierno eligiera estratégicamente el porcentaje de offset (caso en el que la deuda pública es siempre nula). Sin embargo, un gobierno que controlase el porcentaje de offset conduciría a una tasa de sustitución privada menor. El incremento en pensiones públicas coincide con la reducción en las pensiones privadas, por lo que la tasa de sustitución total no se ve afectada.

Finalmente se comparan las tasas de sustitución públicas y privadas cuando se considera un porcentaje de offset endógeno, frente al caso *first best* para un gobierno con un porcentaje exógeno, es decir, un gobierno con poder para decidir, no sólo la prestación pública, sino también la privada. Si bien la tasa de sustitución pública coincide en ambos escenarios, la tasa de sustitución privada será inferior (superior) cuando el gobierno es el único agente decisor si la tasa de sustitución estacionaria para los trabajadores con menores salarios y asociada con una deuda pública nula, $\overline{R}^{LW}$, está por encima (por debajo) de su nivel deseado, es decir, de si Θ es positivo (negativo). La caracterización de Θ positivo (negativo) es equivalente (bajo el supuesto de deuda pública positiva) a un gobierno poco (altamente) impaciente, es decir, $i > r$ ($i < r$).

Se aplica el razonamiento opuesto si, en el juego de Stackelberg con un porcentaje de offset exógeno, la Seguridad Social crease un fondo de reserva en lugar de poner en circulación deuda pública, $D^* < 0$.

Hasta aquí, se han comparado las tasas de sustitución pública, privada y total en el estado estacionario, bajo los tres escenarios considerados. La siguiente cuestión a responder es ¿Cuál es el grado de dispersión de la pensión total entre los pensionistas con diferentes salarios previos a la jubilación? Es decir, ¿bajo cuál de los escenarios es mayor la heterogeneidad de las tasas de sustitución totales entre los pensionistas?

De la definición de tasa de sustitución total para el j-ésimo empleado en (5), el rango de variación de las tasas de sustitución totales se mide fácilmente mediante la desviación estándar:

$$var = \int_0^1 \left(R^j - \overline{R}\right)^2 dj = \int_0^J [(1-q)s(1-\Omega)]^2 dj + \int_J^1 \left[(1-q)s\left(\frac{\overline{w}}{w(j)} - \Omega\right)\right]^2 dj = (1-q)^2 s^2 \left(\Lambda - \Omega^2\right).$$

$$s\_d = (1-q)s\sqrt{\Lambda - \Omega^2}. \tag{31}$$

La heterogeneidad en las tasas de sustitución totales crece con la diferencia $\Lambda - \Omega^2$, pero también con la tasa de sustitución pública *LW*, s. Por el contrario, a través del proceso de integración con la Seguridad Social, la varianza se reduce con el porcentaje de offset, q.

La comparación del rango de variación de las tasas de sustitución en el estado estacionario para los tres diferentes escenarios considerados se presenta en el siguiente cuadro[10]:

[10] La desviación estándar en el estado estacionario en cada escenario se denota con un asterisco y el correspondiente subíndice.

	$\Theta > 0$	$\Theta < 0$
$i > r$	$s\_d_I^* < s\_d^* < s\_d_f^*$	$s\_d_I^* > s\_d^* > s\_d_f^*$
$i < r$	$s\_d_I^* < s\_d_f^* < s\_d^*$	$s\_d_I^* > s\_d_f^* > s\_d^*$

Cuadro 2

La demostración de los resultados recogidos en el cuadro 2 es sencilla a partir de (28), (29) y (30) y de la definición de la desviación estándar en (31), de donde se obtiene:

$$s\_d_f^* \gtreqless s\_d^* \Leftrightarrow (1-q)s_f^* \gtreqless (1-q)s^* \Leftrightarrow s_f^* \gtreqless s^* \Leftrightarrow \Theta(i-r) \gtreqless 0 \Leftrightarrow D^* \gtreqless 0. \quad (32)$$

$$s\_d_I^* \gtreqless s\_d_f^* \Leftrightarrow (1-q_I^*)s_I^* \gtreqless (1-q)s_f^* \equiv (1-q)s_I^* \Leftrightarrow q_I^* \lesseqgtr q \Leftrightarrow \Theta \lesseqgtr 0. \quad (33)$$

Finalmente, la comparación de las desviaciones estándar $s\_d_I^* \gtreqless s\_d^*$ es equivalente a:

$$(1-q_I^*)s_I^* \gtreqless (1-q)s^* \Leftrightarrow \frac{\Theta}{2\theta(1-\Omega)(1-q)i} \lesseqgtr D^*,$$

que se puede escribir como:

$$\frac{\Theta}{(1-q)(1-\Omega)i} \lesseqgtr \frac{r-i}{\Phi}\frac{\Theta p(1-q)(1-\Omega)(\alpha+\varepsilon)}{(\alpha+\varepsilon)r-\Phi}.$$

Suponiendo que $\Theta > 0$, y considerando $\Phi < 0$, la última expresión es equivalente a:

$$\Phi[(\alpha+\varepsilon)r-\Phi] \gtreqless (r-i)\alpha(\alpha+\varepsilon)i,$$

que, teniendo en cuenta la expresión de v_2, puede escribirse como:

$$\frac{(\varepsilon+\alpha)^2r^2-[\varepsilon r-(2i-r)\alpha]^2}{4} - \varepsilon\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\varepsilon + \frac{1-\sigma}{\sigma}\alpha + \alpha i^2\right) \gtreqless \alpha(\alpha+\varepsilon)(r-i)i,$$

y tras algunos cálculos, se obtiene:

$$-\varepsilon\frac{1-\sigma}{\sigma}(\varepsilon+\alpha) < 0.$$

Si se supusiera un $\Theta < 0$, se obtendría el signo opuesto para esta desigualdad. En consecuencia,

$$s\_d_I^* \lesseqgtr s\_d^* \Leftrightarrow \Theta \gtreqless 0. \quad (34)$$

De (32), (33) and (34), se obtienen los resultados presentados en el cuadro 2.

Cuando un estado estacionario con una deuda pública nula está asociado con tasas de sustitución totales para trabajadores con salarios bajos por encima del nivel deseado por el gobierno, es decir, $\Theta > 0$, la disparidad en las tasas de sustitución es mínima si el porcentaje de offset ha sido elegido de forma óptima por el gobierno.

Por el contrario, cuando el porcentaje de offset es una constante exógena, cuando las decisiones a cerca de las pensiones públicas y privadas están descentralizadas y se toman de una manera estratégica, la heterogeneidad en las tasa de sustitución es menor (o mayor) que la asociada a la solución *first best* del gobierno si y sólo si el gobierno tiene un alto (o bajo) grado de impaciencia con respecto al tipo de interés.

Por el contrario, para un Θ negativo, la disparidad en las tasas de variación es máxima cuando la integración es una decisión estratégica. La desviación estándar en el caso descentralizado es mayor (o menor) que bajo el *first best* del gobierno si el tipo de interés está por encima (o por debajo) del tipo de descuento.

7 No Integración versus Integración Estratégica

El juego a la Stackelberg entre la Seguridad Social y un empresario representativo, en el caso de no integración, coincide con el juego estudiado en la Sección (3) con $q = 0$. Para comparar este escenario con el juego en el que sí existe integración con la Seguridad Social, en el cual el gobierno elige estratégicamente el porcentaje de offset, es necesaria una suposición adicional. El valor de Θ sin integración, denotado por $\Theta_{q=0}$, no puede ser negativo. De otra forma, si la tasa de sustitución total para los trabajadores con menores salarios no alcanza el nivel objetivo en un estado estacionario caracterizado por una deuda pública nula en el supuesto de no integración, $\Theta_{q=0} < 0$, entonces, en el caso de integración estratégica, en el que $D_I^* = 0$, el gobierno no estaría interesado en una reducción de la pensión privada, sino que por el contrario, desearía un incremento de la prestación que paga a los jubilados. Este incremento requeriría una inviable reducción del porcentaje de offset, $q_I^* < 0$.

En el juego a la Stackelberg sin integración y con altas tasas de sustitución totales para los trabajadores con menores salarios, $\Theta_{q=0} > 0$, si el tipo de interés fuese mayor que el tipo de descuento, el estado estacionario estaría caracterizado por una deuda pública positiva, cuyos intereses reducirían los gastos en pensiones y harían bajar las tasas de sustitución totales LW hacia el nivel objetivo. Por el contrario, se constituiría un fondo de reserva de la Seguridad Social si el tipo de descuento fuese mayor que el tipo de interés.

Sea cual sea el grado de impaciencia del gobierno, la tasa de sustitución total promedio en el estado estacionario es mayor cuando la prestación privada de jubilación no la determina el gobierno, sino que es fijada estratégicamente por el empresario en un juego a la Stackelberg. El nivel alcanzado por esta tasa es independiente de que el porcentaje de offset sea considerado una variable endógena o exógena, $\overline{R}_I^* = \overline{R}^* > \overline{R}_f^*$. Así, independientemente de si la deuda pública es positiva o negativa, los jubilados estarán mejor, en promedio, si las pensiones privadas están integradas con la Seguridad Social y la decisión a cerca del porcentaje de offset es tomada de forma óptima por el empresario.

Cuando el gobierno descuenta el futuro a una tasa muy alta en relación al tipo de interés, $i < r$, el estado estacionario del juego a la Stackelberg sin integración, se caracteriza por una deuda pública negativa. Por el contrario, con integración estratégica no existe deuda pública en el estado estacionario. En un juego a la Stackelberg, el gobierno proporciona menores tasas de sustitución públicas al cambiar de un plan privado de pensiones no integrado, $q = 0$, a un plan integrado donde el porcentaje de offset es determinado por el gobierno. Para mantener una misma tasa de sustitución total promedio tiene que incrementar sus pensiones privadas para compensar la reducción en los gastos de la Seguridad Social. Tanto un mayor porcentaje de offset (que es nulo sin integración), como una menor pensión pública, reducen el grado de disparidad en las tasas de sustitución de los jubilados con diferentes salarios anteriores al retiro.

En un segundo escenario, un gobierno no demasiado impaciente en contraposición a unos tipos de interés altos, $i > r$, genera una deuda pública positiva si los planes privados no están integrados. Por contra, la integración de los planes privados dentro de la Seguridad Social con un porcentaje de offset determinado por el gobierno, lleva a éste a acrecentar la pensión pública, mientras que la tasa de sustitución proporcionada por el empresario se reduce en promedio. El incremento en los gastos del gobierno, s, hace aumentar el rango de variación de las tasas de sustitución. No obstante, este incremento en la disparidad es más débil que la reducción debida a la integración del plan de pensiones privado, por lo que la heterogeneidad en las tasas de sustitución disminuye.

Teniendo en cuenta que el porcentaje estacionario de offset, q_I^*, es independiente de la distancia entre el tanto de interés y el de descuento, $i - r$, de (31) se deduce que la reducción en el grado de disparidad es más acusado cuando el gobierno descuenta el futuro a una tasa alta y el tipo de interés es bajo, $i < r$. En este caso, cuando no existe integración el gobierno genera un fondo de reserva de la Seguridad Social. En consecuencia, las pensiones públicas de estado estacionario son mayores que cuando la integración se elige estratégicamente. Mayores pensiones públicas propician una mayor disparidad en las tasas de sustitución. El razonamiento inverso se aplica cuando $i > r$ y la deuda pública estacionaria sin integración es positiva, reduciendo los gastos de las pensiones públicas y así, la discriminación de la Seguridad Social hacia los empleados con mayores salarios.

8 Conclusiones

Este trabajo de investigación analiza la relación entre las prestaciones por jubilación provistas por un empresario representativo, y las pagadas por la Seguridad Social, a un colectivo heterogéneo de pensionistas, en lo que respecta a su salario previo a la jubilación. Esta relación se describe a través de un Juego Diferencial a la Stackelberg, en el que el empresario actúa como seguidor, mientras la Seguridad Social tiene el papel de líder. En consecuencia, toma sus decisiones conociendo la función de reacción del empresario. Este último, además es un agente miope, cuyas decisiones sobre pensiones privadas no afectan a la dinámica de la deuda pública que, por tanto, no supone una restricción en su proceso de toma de decisiones. Las decisiones sobre provisión de pensiones públicas sí determinan la dinámica de la deuda pública y, por tanto, la Seguridad Social debe resolver un problema de optimización dinámico, considerando un horizonte temporal infinito.

Se consideran diferentes escenarios según el porcentaje offset (que define el grado de integración) sea una constante exógena, o esté determinado por el gobierno. Asimismo, también se analiza el supuesto "de referencia" en el que un gobierno "todopoderoso" tuviese la potestad de determinar las pensiones privadas pagadas por el empresario. La comparación de los diferentes escenarios nos servirá para establecer las condiciones bajo las cuales, en el estado estacionario se produce un problema de deuda pública, o por el contrario, se constituye un fondo de reserva de la Seguridad Social. Igualmente, es posible analizar y comparar el nivel y el grado de dispersión de las pensiones pública, privada, y de la pensión total agregada, bajo cada escenario. En general, es fácil garantizar la estabilidad de los equilibrios de estado estacionarios bajo condiciones bastante generales.

Un primer resultado importante hace referencia al stock de deuda pública en el juego de Stackelberg cuando el porcentaje offset es considerado como una constante exógena. El estado estacionario se caracteriza por una deuda pública positiva cuando la diferencia entre la tasa de sustitución total de estado estacionario bajo deuda nula y el nivel objetivo presenta el mismo signo que la diferencia entre el tipo de interés y el grado de impaciencia del gobierno. Por el contrario cuando estas diferencias muestran distingo signo, se generará un fondo de reserva de la Seguridad Social. Tanto en el caso del Juego a la Stackelberg cuando el porcentaje de offset es determinado por el gobierno, como en el supuesto de un gobierno "todopoderoso" con capacidad para imponer al empresario la pensión privada la deuda pública de estado estacionario es nula.

La tasa de sustitución pública LW en el estado estacionario disminuye con el nivel de deuda pública. Así, situaciones de deuda pública positiva están asociadas con menores pensiones públicas que las de deuda pública nula o negativa, es decir, cuando se genera un fondo de reserva de la Seguridad Social.

El principal resultado que se desprende del análisis es que un gobierno que actúa de manera estratégica, jugando a la Stackelberg como líder frente a un empresario seguidor, obtiene el mismo bienestar que el que obtendría si pudiese imponerle a éste último la prestación privada. Para conseguir este bienestar “de referencia", únicamente es preciso que el gobierno pueda determinar el porcentaje de offset óptimo, en lugar de considerarlo una constante exógena. Si bien la función valor del gobierno coincide bajo estos dos escenarios, así como las prestaciones pagadas por la Seguridad Social, no sucede lo mismo con las pensiones privadas, ni con el rango de dispersión en las tasas de sustitución.

Cuando existe un problema de deuda pública, la tasa de sustitución privada en el supuesto de un gobierno que jugase a la Stackelberg pudiendo determinar el porcentaje óptimo de offset es superior (inferior) a la que obtendría un gobierno “todopoderoso" si el gobierno descuenta débilmente (fuertemente) el futuro frente al tipo de interés. Resultado opuesto se obtiene cuando la deuda pública de estado estacionario es negativa, es decir, cuando se genera un fondo de reserva de la Seguridad Social.

En el juego a la Stackelberg (entre un gobierno que tiene en cuenta el futuro y un empresario miope), cuando se pasa de pensiones públicas y privadas independientes a una pensión privada integrada con la Seguridad Social con un porcentaje de offset óptimo, la tasa de sustitución total promedio en el estado estacionario se mantiene constante. Sí se ve modificada la proporción que estos gastos en pensiones suponen para el empresario y para el gobierno. Si el grado de impaciencia del gobierno es bajo en contraposición al tipo de interés, en el estado estacionario, cuando el porcentaje de offset es una variable de decisión, el gobierno incrementará las pensiones públicas. Si bien este incremento de las pensiones públicas no modifica las tasas de sustitución totales, sí promueve el aumento de la desigualdad en estas tasas. Sin embargo, la reducción en la disparidad de las tasas de sustitución asociadas con el método offset es mayor y la desigualdad en las tasas de sustitución se reduce. Por el contrario, un gobierno más impaciente conduciría, en el estado estacionario, a una disminución en las pensiones públicas. En el equilibrio de estado estacionario, el incremento en las pensiones privadas contrarresta exactamente esta reducción. Como consecuencia, las tasas de sustitución no se ven modificados en promedio, sin embargo, el método offset de integración conduce a una reducción en la desigualdad de las tasas de sustitución.

References

[1] Dockner, E. J., S. Jørgensen, N. van Long and G. Sorger (2000) *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press, Cambridge. UK.

[2] Gala Vallejo, C. (1999): *El sistema de la Seguridad Social en España*. Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales, Madrid.

[3] Martocchio, J.J. (2003): *Employee Benefits. A Primer for Human Resource Professionals*. McGraw-Hill, Boston. USA.

[4] McGill, D. M., Brown, K. N. & Schieber, S. J. (1996) *Fundamentals of Private Pensions*. Uiversity of Pennsylvania Press, Philadelphia. USA.

[5] Muller, L.A. (2005): "Coordination Between Social Security and Defined Benefit Plans: How might Social Security Reform Affect Defined Benefit Pensions", *Benefits-Quarterly*. Fourth Quarter 2005. 21, pp. 56-68.

[6] Persson, T. and Tabellini, G. (1999): "Political Economics of Public Finance", *NBER Working Paper Series*, No. 7097.

[7] Perun, P. (2003) "Social Security and the private pension system: The significance of integrated plans". *Benefits-Quarterly*. 19, pp. 36-50.

[8] van der Ploeg, F. (2005) "Macroeconomics of Fiscal Policy and Government Debt", in Multidisciplinary Economics: The Birth of a New Economics Faculty in the Netherlands, Eds. P. Gijsel and H. Schenk, Dordrech, Springer, pp. 187-208.

[9] Schultz, J. H., Leavitt, T. D. (1983): *Pension Integration: Concepts, Issues and Proposals*. EBRI (Employee Benefit Research Institute). Washington.

[10] Tabellini, G. (1990): "A positive theory of Social Security", *NBER Working Paper Series*, No. 3272.