



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE TRABAJO Y
ASUNTOS SOCIALES

SECRETARÍA DE ESTADO DE LA
SEGURIDAD SOCIAL

DIRECCIÓN GENERAL DE
ORDENACIÓN DE LA SEGURIDAD
SOCIAL

DEMOGRAFÍA, INMIGRACIÓN Y VIABILIDAD DEL SISTEMA DE PENSIONES. ANÁLISIS Y PROYECCIONES PARA ESPAÑA (Capítulo 2)

RESPONSABLE: Prof. JOSEP GONZÁLEZ CALVET

Investigación financiada mediante subvención recibida de acuerdo con lo previsto en la Orden TAS/1587/2006, de 17 de mayo (subvenciones para el Fomento de la Investigación de la Protección Social –FIPROS-)

La Seguridad Social no se identifica con el contenido y/o conclusiones de esta investigación, cuya total responsabilidad corresponde a sus autores.

CAPÍTULO 2

Un modelo de crecimiento cíclico

2.1 Introducción

Una de las insuficiencias notables del análisis teórico de los sistemas de seguridad social es que muy a menudo se realizan en contextos estáticos o bien, cuando se emplean modelos dinámicos, se trata siempre de economías estables que, ante cualquier perturbación, convergen siempre hacia un equilibrio dinámico sostenido o trayectoria de crecimiento equilibrado (*steady state*).

Una de las aportaciones más importantes de Harrod al análisis económico dinámico es el conocido problema del filo de la navaja, es decir, que la trayectoria de crecimiento equilibrado es inestable (Harrod, 1948). Contra este notable argumento para defender la intervención pública en la esfera económica de la sociedad, se pueden esgrimir los modelos de crecimiento de tipo neoclásico que, por el contrario, muestran que si se dan las condiciones de flexibilidad de los precios, de sustituibilidad de *inputs* y de convexidad de las técnicas de producción, el sistema económico logra la tasa de crecimiento equilibrada y óptima y sigue una trayectoria asintótica y estructuralmente estable (Solow, 1956; Meade, 1961; Solow, 1970). Este resultado de la teoría neoclásica depende críticamente de los supuestos que se efectúen sobre la función de producción y sobre el comportamiento ahorrador de los individuos (Hahn, 1987).

En un artículo que levantó mucho revuelo en el campo de la teoría económica y que partía del trabajo previo de Kaldor (Kaldor, 1956), Pasinetti demostró el denominado teorema de Cambridge, a saber, que la tasa de ahorro de los poseedores del capital es la que determina la tasa de crecimiento de la economía (Pasinetti, 1962). Cinco premios Nobel y algunos de los representantes más capaces de la economía neoclásica -Samuelson, Modigliani, Meade, Solow, Hahn, Stiglitz-, juntos o por separado, trataron de rebatir el argumento de Pasinetti sin demasiado éxito porque, finalmente, se probó que el ámbito de validez del modelo neoclásico es sólo un pequeño fragmento del conjunto de comportamientos plausibles, bastante alejado de las condiciones observadas en las economías reales (Pasinetti, 1974). Más tarde, el mismo Pasinetti demostró el teorema en el contexto mucho más amplio de un modelo dinámico multisectorial (Pasinetti, 1981).

Este teorema culmina toda una tradición de la ciencia económica, porque ya en los años treinta, y tomando el referente de Marx, Kalecki formuló en un marco más simple y referido al corto plazo, una proposición similar, que se resumía en la conocida frase "los capitalistas ganan lo que gastan" y, por lo tanto, "son los dueños de su destino" (Kalecki, 1954; Kalecki, 1971). Así, pues, el papel determinante del ahorro de los poseedores del capital es uno de las características fundamentales que se debe incorporar en un análisis riguroso de la evolución dinámica del sistema económico.

Por otra parte, uno de los resultados probados y aceptados (Samuelson, 1966) de la famosa polémica sobre la teoría del capital y la reversibilidad de técnicas que se mezcló con el anterior (Harcourt, 1975), consiste en que la función de producción agregada de los modelos neoclásicos sólo puede construirse si todos los sectores de la economía tienen la misma composición del capital (Garegnani, 1970), o si existe tan sólo una mercancía que es simultáneamente bien de consumo y de producción. Este resultado formal implica necesariamente que las funciones de producción agregadas no reflejan correctamente el fenómeno de la producción ni siquiera como la "parábola" que Samuelson (1962) defendía y que, por lo tanto, su uso en el análisis resta mucha relevancia a las conclusiones e, incluso, puede falsearlas (Felipe y Fisher, 2003, Felipe y McCombie 2004).

Estas deficiencias de los modelos de crecimiento *standard* aconsejan seguir otro camino cuando se trata de construir un modelo que permita reflejar algunos de las características dinámicas más importantes de los sistemas económicos. Los modelos de raíz postkeynesiana, del tipo de la escuela de Cambridge, proporcionan un punto de partida que, al menos, salva buena parte de estos problemas. Aún así, son modelos que estudian el comportamiento del sistema en condiciones de equilibrio dinámico de largo plazo, pero no entran en el estudio de su estabilidad, suponiendo -implícitamente- o bien que la economía está en crecimiento equilibrado (Fleck y Domenghino, 1987) o bien que es inestable a la Harrod (Pasinetti, 1962; Pasinetti, 1989; Dalziel, 1991). Así, pues, los modelos postkeynesianos agregados habituales también presentan limitaciones importantes; en especial, la carencia de análisis de las propiedades de la trayectoria dinámica y su interrelación con la distribución y la demanda efectiva.

Es un hecho incontrovertible que el proceso de expansión de las economías capitalistas no sigue una trayectoria suave, sino que presenta una evolución fluctuante con un marcado componente errático. Este tipo de evolución tiene una especial importancia en lo referente a la política de bienestar social puesto que, durante las fases recesivas, los ingresos del sistema de protección social disminuyen y los gastos aumentan drásticamente, siguiendo la evolución coyuntural del empleo. En consecuencia, es necesario que los modelos teóricos que se empleen en el análisis del sistema de seguridad social también sean capaces de incorporar la dinámica oscilatoria que caracteriza las economías reales.

Un último elemento a considerar en el análisis de los sistemas de protección social es su incidencia sobre la distribución funcional de la renta. Aun cuando hay una gran cantidad de trabajos, teóricos y empíricos, en torno a los efectos sobre la distribución personal de los ingresos de diferentes programas redistributivos o del conjunto del sistema (véanse algunos trabajos clásicos como Atkinson, 1987; Goodin y Le Grand, 1987; Haveman, 1987; Le Grand, 1987; Atkinson, 1989; Deakin y Wilkinson, 1991), hay muy pocas referencias sobre como queda afectada la distribución entre los ingresos de la propiedad y los del trabajo. Esta carencia es importante porque el sistema de protección social podría influir sobre el comportamiento dinámico de la economía a través de los cambios en la distribución funcional, cerrando, así, un circuito adicional de retroalimentación entre distribución y equilibrio dinámico (Cesaratto, 2005, 2006).

En el modelo que se desarrolla en este trabajo se tienen en cuenta todas estas cuestiones. El modelo es de tipo dinámico y agregado, genera fluctuaciones endógenas, recoge el papel central del ahorro de los capitalistas, considera la interacción entre la distribución, la demanda y la dinámica y no tiene ninguna función de producción explícita -es compatible con muchas formulaciones diferentes, agregadas o desagregadas-. El modelo permite incluir especificaciones para el sector público, el sector exterior y el sistema financiero que enriquecen notablemente su capacidad explicativa. Finalmente, aunque no se construye explícitamente, es posible su desagregación en un modelo multisectorial (Lorenz, 1987).

2.2 Macrodinámica postkeynesiana

Las crisis económicas y o/financieras se habían visto tradicionalmente como episodios erráticos, con causas específicas para cada caso (Kindleberger, 1989) hasta que Clément Juglar, al año 1860, identificó claramente la periodicidad del ciclo de negocios de una duración media de unos 8 años. Karl Marx fue de los primeros en interpretar esta evolución fluctuante de la actividad económica como una característica fundamental del sistema capitalista y, asimismo, fue el primero en dar una explicación endógena sistemática del fenómeno. Para Marx, las fluctuaciones aparecían por el efecto combinado del cambio técnico, de los desajustes entre producción y demanda efectiva y de los cambios en la evolución de los salarios y de la distribución de la renta. Empleando su mismo vocabulario, se trataría de los problemas del desarrollo de las fuerzas productivas, del problema de la realización de la plusvalía, de la lucha de clases y del papel del ejército de reserva en la "ley general" de la acumulación capitalista.

Esta rica aportación sólo fue continuada por los pensadores marxistas pero no entró a formar parte de la corriente principal de la ciencia económica, precisamente por su carácter heterodoxo. Durante los años treinta, bajo los efectos de la Gran Depresión, empezaron a salir nuevos trabajos sobre el ciclo económico producidos, en buena parte, por economistas heterodoxos (Frisch, 1931; Kalecki, 1935; Kalecki, 1937; Samuelson, 1939; Kaldor, 1940). De entre ellos destacan especialmente los trabajos de Kalecki, quien condensó en modelos muy sencillos algunos de los ingredientes de la(s) teoría(s) de la crisis de Marx. Así, su modelo de 1937 daba una explicación del ciclo económico combinando el efecto de la inversión sobre la demanda efectiva con el efecto sobre la rentabilidad. Más tarde, captó el papel clave de la distribución de la renta en la dinámica cíclica de la acumulación capitalista (Kalecki, 1938; Kalecki, 1954; Kalecki, 1971).

Un trabajo notable por su elegancia, concisión y potencia analítica, que supone un avance substancial en la teoría del ciclo de negocios es el modelo de Goodwin (Goodwin, 1967). En este modelo interaccionan una curva de Phillips real lineal con la acumulación y el cambio técnico, dando como resultado una trayectoria fluctuante en torno a la senda de crecimiento de Harrod. En unas ecuaciones muy sencillas -lineales- se integran las ideas clásicas de Marx sobre el ejército de reserva, la lucha de clases y la inestabilidad inherente a la expansión capitalista -la relación negativa entre salarios y nivel de desempleo, interacción entre distribución y acumulación, crecimiento cíclico- con el problema del filo de la navaja de Harrod y las propuestas de Kalecki y Kaldor sobre la distribución como determinantes fundamentales de la dinámica.

Pese a mostrar la endogeneidad y el origen distributivo de los ciclos, el modelo de Goodwin presenta algunas limitaciones muy importantes. Por el lado formal, el modelo es estructuralmente inestable puesto que se trata de un sistema conservativo (Samuelson, 1967; Samuelson, 1971; Hirsch y Smale, 1974; Samuelson, 1974; Vaart, 1976; Guckenheimer y Holmes, 1990). Por otro lado, desde un punto de vista económico, el modelo no considera para nada los problemas de demanda efectiva y considera que la técnica de producción es de coeficientes fijos.

Hay muchos autores que han corregido diferentes limitaciones del modelo de Goodwin y han ampliado su campo de aplicación. Entre ellos debe destacarse algunos trabajos dónde se solucionan los problemas formales y permiten incorporar cambios en la relación capital-producto y en la demanda (Desai, 1973; Velupillai, 1977; Medio, 1980).

Otros autores incorporan el problema de la demanda efectiva, los cambios en el nivel de utilización de la capacidad y o/del ratio capital producto (Velupillai, 1983; Jarsulic, 1986; Skott, 1989a, b), emplean funciones de inversión kaleckianas (Jarsulic, 1986) o kaldorianas (Skott, 1989a, b) introducen sistemas de fijación de precios tipos mark-up (Skott, 1989a, b), estudian el efecto de la evolución del conflicto distributivo (Van der Ploeg, 1983a, b), las implicaciones de tasas de ahorro diferenciadas (Van der Ploeg, 1984), añaden formación de expectativas (Balducci, et. al., 1984, Semmler et al, 2009; Flaschel, 2009), sector público y otras (Glombowski y Krüger, 1984,1986). La incorporación del sector financiero es algo posterior (Keen, 1995) y ha dado lugar a un muy interesante modelo para la crisis financiera con sobreendeudamiento actual (Keen, 2001, 2008).

Finalmente, justo es decir que el mismo Goodwin amplió y extendió considerablemente su modelo de crecimiento cíclico en dos direcciones. De una parte, lo incorporó a sus trabajos de dinámica multisectorial (Goodwin y Punzo, 1987). Por otra, extendió el modelo hasta acercarlo al campo de las dinámicas complejas y el caos determinístico (Goodwin, 1990).

Se puede decir, por lo tanto, que hay toda una corriente dentro del análisis económico dinámico que estudia las fluctuaciones y el crecimiento económicos con un enfoque muy heterodoxo, partiendo de un conjunto de ideas que pueden remontarse a Marx, que, en general, encuentran sus referentes más inmediatos en los trabajos de autores postkeynesianos, en especial Kalecki y Kaldor en lo referente a la imbricación entre inversión, distribución y demanda efectiva (Kaldor, 1940; Kalecki, 1971) y, en cuanto a la especificación dinámica, se basan en las aportaciones de Goodwin, bien porque usan no linealidades, bien porque emplean alguna derivación del modelo de lucha de clases (Goodwin, 1951, 1967). Este tipo de modelos son especialmente atractivos porque con unas ecuaciones relativamente simples permiten dinámicas muy complejas. Hay que añadir, además, que pueden ser especificados excluyendo casi la totalidad de los problemas que se han comentado en la introducción.

2.3 Un modelo genérico de acumulación cíclica

2.3.1 Definiciones y relaciones básicas

El modelo que se desarrolla en esta sección recoge varias características de los modelos postkeynesianos del ciclo. Al igual que todos los modelos de los autores anteriores, se trata de un modelo agregado, pero que puede especificarse en términos desagregados. El nivel de producción viene fijado por la demanda, sin ningún otro límite que la mano de obra disponible, puesto que se supone que las empresas trabajan siempre con exceso de capacidad¹. En una primera aproximación la demanda está constituida sólo por la inversión y el consumo, con especificaciones claramente kaleckianas: los trabajadores gastan todo lo que ganan y sólo ahorran los capitalistas, que son los que toman

¹ Este supuesto, bastante habitual entre los autores postkeynesianos, tiene una fuerte base de racionalidad microeconómica cuando hay comportamientos oligopolistas -el exceso de capacidad disuade la entrada de otros competidores- pero, además, es un hecho empíricamente irrefutable. Por ejemplo, en el caso de la economía española, el máximo histórico de utilización de capacidad se consiguió en 1973, cuando se llegó a superar el 90%. Normalmente, el índice de utilización oscila entre el 80% y el 87 % (Corrales y Taguas, 1991).

las decisiones de inversión. Finalmente, la distribución de la renta viene decidida por el comportamiento del mercado de trabajo, que es donde se determinan los salarios reales según el nivel de empleo. Se considera que la población activa viene exógenamente determinada y que el cambio técnico es exógeno y ahorrador de trabajo (neutral en el sentido de Harrod). Finalmente, el modelo se formula a precios constantes aun cuando, incorporando algún tipo de función de oferta agregada, se puede extender al caso de precios variables. Aún así, la poca fiabilidad de este tipo de funciones aconseja dejar los modelos con precios variables para los desarrollos multisectoriales.

En cuanto a la especificación del modelo, se han tenido en cuenta dos criterios guía: el primero, tratar de emplear las funciones más sencillas posible; el segundo, que los parámetros puedan tomar valores plausibles y reproducir los patrones dinámicos observados en economías reales como, por ejemplo, la española.

Las definiciones básicas del modelo vienen dadas por las ecuaciones:

$$I = K g \quad [2.1]$$

$$v = L/N \quad [2.2]$$

$$L = y/\lambda \quad [2.3]$$

$$\omega = w L/y = w / \lambda \quad [2.4]$$

dónde la inversión, I , no es sino la tasa de acumulación g por el stock de capital K , la tasa de empleo v viene definida por el cociente entre población ocupada L y la población activa N . La población ocupada L es el cociente entre la producción y y la productividad del trabajo λ , y la participación de los salarios en la renta ω es igual al cociente entre la masa salarial $w L$ y la renta y . Las relaciones que vienen determinadas exógenamente son el crecimiento de la población activa y el de la productividad:

$$N = N_0 e^{nt} \quad [2.5]$$

$$\lambda = \lambda_0 e^{\alpha t} \quad [2.6]$$

dónde n es la tasa de crecimiento de la población y α la tasa de crecimiento de la productividad. En las simulaciones n se sustituirá por una función que recogerá el comportamiento proyectado de la población. Aún así, dado que las variaciones que experimenta están comprendidas dentro de intervalos muy pequeños –desde -3% a 3 %–, se puede adoptar, para el razonamiento teórico, una n constante sin pérdida de generalidad.

Finalmente, las relaciones de comportamiento endógenas del modelo vienen recogidas en las siguientes expresiones:

$$S = \Phi(\pi, y), \quad \Phi'_\pi > 0, \Phi'_y > 0 \quad [2.7]$$

$$\hat{g} = \Gamma(g, \omega), \quad \Gamma'_g > 0, \Gamma''_g < 0, \Gamma'_\omega < 0, 0 \leq g \leq \bar{g} \quad [2.8]$$

$$\hat{w} = \Psi(v), \quad \Psi'_v > 0 \quad [2.9]$$

$$\hat{K} = g - \delta \quad \delta > 0 \quad [2.10]$$

El ahorro S es una función creciente de la renta, y , y de la participación de los beneficios en el producto π . El crecimiento de la tasa de acumulación, $\hat{g}$, depende positivamente del nivel de acumulación -en el entorno próximo al equilibrio-, con una sensibilidad decreciente -segunda derivada negativa-, y negativamente de la participación de los salarios en el producto. Pero la función es no lineal, de forma que incluso en el supuesto de que los trabajadores pudieran vivir del aire, habría una tasa máxima de acumulación $\bar{g}$. Asimismo, dado que la tasa de acumulación es bruta, tendrá un valor mínimo igual a 0. La ecuación [2.9] expresa que el crecimiento del salario real es una función creciente del nivel de empleo. Finalmente, la relación [2.10] recuerda que la tasa de crecimiento de la capacidad instalada -capital- es la diferencia entre la nueva inversión y la depreciación y que, por lo tanto, el producto y es el producto bruto y que los beneficios incluyen las amortizaciones y , por lo tanto, son brutos. No está de más destacar que las relaciones [2.7] y [2.8] recogen una típica formulación postkeynesiana del ahorro y de la inversión y que la relación [2.9] recoge la idea del papel regulador del ejército de reserva con una curva de Phillips expresada a precios constantes.

Para el análisis de la dinámica del sistema hay que encontrar primero las especificaciones dinámicas de todas las variables y después se procederá al estudio del sistema subyacente. De las expresiones [2.4], [2.6] y [2.9] se puede deducir la tasa de crecimiento de la participación de los salarios y de los beneficios en el producto. Tomando tasas de crecimiento instantáneo (la derivada del logaritmo de la variable respecto del tiempo), sobre la participación de los salarios, la expresión [2.4] se convierte en $\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{\lambda}$, y sustituyendo por las expresiones [2.9] y [2.6] da:

$$\hat{\omega} = \Psi(v) - \alpha \quad [2.11]$$

Por otro lado, la tasa de crecimiento de la participación de los beneficios será:

$$\hat{\pi} = \frac{d\pi/dt}{\pi} = \frac{d(1-\omega)/dt}{(1-\omega)} = \frac{-\dot{\omega}}{(1-\omega)} = \frac{-\omega\hat{\omega}}{(1-\omega)}$$

de dónde, sustituyendo por la expresión [2-11] queda:

$$\hat{\pi} = \frac{-\omega(\Psi(v) - \alpha)}{(1-\omega)} \quad [2.12]$$

Tanto la ecuación [2.11] cómo [2.12] están acotadas por los valores que pueden tomar las participaciones en el producto, que van de 0 a 1. Así, cuando cualquiera de las participaciones vale 0, su tasa de crecimiento sólo puede ser 0 ó positiva. De forma análoga, cuando valen 1, su tasa de crecimiento sólo puede tomar valores negativos o nulos.

Para encontrar la tasa de crecimiento del producto se parte de la condición de equilibrio a corto plazo o condición de demanda efectiva, $S = I$. En consecuencia,

$$\Phi(\pi, y) = K g \quad [2.13]$$

de donde despejando y se tiene:

$$y = \frac{Kg}{\theta(\pi)}, \quad \theta'_\pi > 0 \quad [2.14]$$

la función $\theta(\pi)$ es creciente, porque la función original de ahorro es creciente en relación a la participación de los beneficios. Conviene notar que $1/\theta(\pi)$ es el multiplicador kaleckiano de la inversión. A partir de la expresión [2.14] se encuentra la ecuación de movimiento del producto:

$$\hat{y} = \hat{K} + \hat{g} - \hat{\theta}(\pi)$$

en la que, sustituyendo por [2.10] y [2.8] da:

$$\hat{y} = g - \delta + \Gamma(g, \omega) - \hat{\theta}(1 - \omega) \quad [2.15]$$

Finalmente, la tasa de crecimiento del empleo se obtendrá directamente de la expresión [2.2]:

$$\hat{v} = \hat{L} - \hat{N} = \hat{y} - \hat{\lambda} - \hat{N}$$

y considerando las relaciones [2.15], [2.5] y [2.6] queda:

$$\hat{v} = g - \delta + \Gamma(g, \omega) - \hat{\theta}(1 - \omega) - \alpha - n \quad [2.16]$$

La ecuación [2.16] está acotada por el valor de v , que sólo puede estar comprendido entre 0 y 1. Por lo tanto, cuando $v = 0$, su tasa de crecimiento ha de ser 0 ó positiva. De forma análoga, cuando $v = 1$, su tasa de crecimiento se hace 0 ó es negativa.

La dinámica del modelo queda completamente determinada por el sistema de tres ecuaciones diferenciales que se derivan de las expresiones [2.8], [2.11] y [2.16]:

$$\dot{g} = g \cdot \Gamma(g, \omega) \quad [2.17 \text{ a}]$$

$$\dot{\omega} = \omega(\Psi(v) - \alpha) \quad [2.17 \text{ b}]$$

$$\dot{v} = v(g - \delta + \Gamma(g, \omega) - \hat{\theta}(1 - \omega) - \alpha - n) \quad [2.17 \text{ c}]$$

Este sistema es, en principio, mucho más complejo que la mayor parte de modelos de ciclo económico de tipo postkeynesiano. Esto es así porque, por su formulación, no es posible reducir el sistema dinámico a sólo dos ecuaciones, tal y como logra, por ejemplo, Peter Skott a expensas de formular unas funciones bastantes complicadas (Skott, 1989a, b). Tampoco tiene interés adoptar la solución demasiado simple de Jarsulic que, en su ecuación salarial, elimina explícitamente la tasa de empleo porque postula una relación fija entre nivel de empleo y tasa de acumulación (Jarsulic, 1986, 1988). En la mayor parte de los otros trabajos citados se simplifica al máximo la dinámica de la acumulación y se reduce a dos ecuaciones diferenciales puesto que están interesados en averiguar otras cuestiones.

2.3.2 Existencia de un equilibrio y análisis de su estabilidad

Del sistema [2.17] se deduce que cuando ω , g , v toman el valor 0, sus tasas de variación son nulas. Así, el origen de coordenadas es un punto de equilibrio trivial del sistema. Pero habrá otro punto crítico en el que el sistema permanecerá en equilibrio siempre que los segundos términos de las ecuaciones [2.17] se igualen a 0. Es decir, en el equilibrio se cumplirá que:

$$\Gamma(g, \omega) = 0 \quad [2.18 \text{ a}]$$

$$\Psi(v) - \alpha = 0 \quad [2.18 \text{ b}]$$

$$g - \delta + \Gamma(g, \omega) - \hat{\theta}(1 - \omega) - \alpha - n = 0 \quad [2.18 \text{ c}]$$

Es fácil encontrar la tasa de empleo de equilibrio v que haga $\dot{v} = 0$ a partir de la expresión [2.18 b], puesto que $\Psi'(v) > 0$ y $\Psi(v)$ toma valores negativos para v bajos y positivos para v altos. Por otro lado, dado que en el equilibrio las tasas de variación se anulan, se tendrá que la expresión dentro de [2.18 c] se anula puesto que el crecimiento de la función depende sólo del crecimiento de su argumento ω y, en equilibrio, $\dot{\omega} = 0$. También se anula, por la condición [2.18 a] la expresión $\Gamma(g, \omega)$ dentro de [2.18 c], de forma que la condición de equilibrio $\dot{v} = 0$ se reduce a:

$$g^* - \delta - \alpha - n = 0 \quad [2.19]$$

que no es sino la condición de crecimiento equilibrado de Harrod.

Finalmente, a partir de la expresión [2.18 a] se deduce el valor de ω^* en términos de g^* , puesto que $\Gamma'_\omega < 0$ en todo su recorrido y, desde el punto de vista económico, debe haber algún valor de ω lo suficiente grande como por hacer que g deje de aumentar y un valor de ω lo suficiente pequeño como por hacer que g deje de disminuir.

Por definición, se tendrá que $0 < v^*$, $\omega^* < 1$ para cualesquiera funciones con sentido económico. Si las funciones tienen un comportamiento suave, sólo habrá un solo equilibrio no trivial, puesto que sólo habrá un valor de equilibrio para v y por ω . Si, en cambio, la función de inversión, que viene recogida por g , tiene comportamientos extraños -por ejemplo un polinomio de grado elevado, con varios máximos y mínimos para valores plausibles de v y ω -, o si la ecuación de salarios tiene más de una raíz, entonces pueden darse diferentes puntos críticos.

Para conocer la dinámica del sistema basta con estudiar su comportamiento en el entorno de los puntos críticos -análisis de la estabilidad local- y la dirección de su flujo en el espacio. Por los teoremas de linealización y de Hartman-Grobman se sabe que el comportamiento del sistema linealizado -desarrollado en serie de Taylor- en el entorno del punto crítico es topológicamente equivalente al del sistema original -hay un homeomorfismo entre ambos sistemas-, siempre que el punto crítico sea hiperbólico -es decir, que las raíces de la ecuación característica del sistema linealizado tengan todas sus partes reales no nulas- (Guckenheimer y Holmes, 1990; Arrowsmith y Place, 1992).

El sistema linealizado se puede representar por la matriz de derivadas parciales o matriz jacobiana del sistema original que después se evalúa en los puntos críticos o de equilibrio que interesa analizar. En este caso el jacobiano quedará:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{g}}{\partial g} & \frac{\partial \dot{g}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{g}}{\partial v} \\ \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial g} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial v} \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial g} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\Gamma'_g + \Gamma(g, \omega) & g\Gamma'_\omega & 0 \\ 0 & \Psi(v) & \omega\Psi'_v \\ v\Theta'_g & v\Theta'_\omega & \Theta(g, \omega) + v\Theta'_v \end{bmatrix} \quad [2.20]$$

dónde la expresión $\Theta(g, \omega)$ es una notación reducida del crecimiento de la tasa de empleo que viene dado por la expresión [2.16]. Cuando se evalúa el jacobiano en el equilibrio, queda más simplificado, puesto que las tasas de variación de las tres variables se anulan. Denominando A a este equilibrio no trivial, se tendrá que el jacobiano evaluado en A es:

$$J_A = \begin{bmatrix} g\Gamma'_g & g\Gamma'_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega\Psi'_v \\ v\Theta'_g & v\Theta'_\omega & v\Theta'_v \end{bmatrix} \quad [2.21]$$

Dentro de J_A , el término $v\Theta'_v$ no es cero porque la expresión [2.16] incluye la tasa de crecimiento de una función que depende de la participación de los salarios en el producto y, por lo tanto, depende de la tasa de crecimiento de la participación de los salarios que incluye v como argumento. La ecuación característica del sistema linealizado queda entonces como:

$$-r^3 + r^2(g\Gamma'_g + \Theta'_v) + rv(\omega\Psi'_v\Theta'_\omega - \Gamma'_g\Theta'_v) + vg\omega\Psi'_v(\Theta'_g\Gamma'_\omega - \Theta'_\omega\Gamma'_g) = 0 \quad [2.22]$$

Según los valores de los parámetros y la especificación de las funciones, los coeficientes de la ecuación pueden tomar uno u otro signo. Por lo tanto, en principio, lo único que se puede afirmar sobre las raíces de la ecuación característica es que puesto que la ecuación es de tercer grado con coeficientes reales, habrá como mínimo una raíz real. En consecuencia, según los valores que tomen los parámetros, el sistema puede presentar comportamientos estables o comportamientos inestables que, en cualquier caso, siempre quedarán acotados por los límites máximos y mínimos que pueden tomar las variables económicas. En general, se puede encontrar desde la estabilidad asintótica a dinámicas muy complejas, dependiente sólo del tipo de especificación del modelo que se realice. Cabe destacar, además, que si se evalúa el jacobiano en el origen de coordenadas todos los elementos se anulan y, en consecuencia, se trata de un punto no hiperbólico, es decir, que no pueden aplicarse los teoremas de linealización y, para el análisis de su estabilidad se necesita disponer de más información sobre las funciones del sistema.

2.4 Especificación del modelo básico

2.4.1 Las relaciones funcionales

El modelo genérico presentado en la sección anterior tiene un comportamiento indeterminado por la sencilla razón que las condiciones impuestas a las funciones genéricas son insuficientes para determinar cómo serán las raíces características del

sistema. En consecuencia, se debe proceder a una especificación más detallada de las funciones con el fin de poder avanzar en el análisis.

En primer lugar, la función de ahorro que se usará es la clásica, es decir, una función lineal de los beneficios brutos. Así, la expresión [2.7] quedará reducida a:

$$S = s \pi y, \quad 0 < s < 1 \quad [2.23]$$

dónde s es la propensión al ahorro de los capitalistas. En consecuencia, el ahorro de los trabajadores será nulo, aun cuando el modelo puede ampliarse para incluir tasas de ahorro diferenciales, tal y como hacen otros autores (Van der Ploeg, 1984; Stone, 1990).

En lo referente a la función de reacción de los salarios reales, se especificará en términos de una curva de Phillips real. Aunque para el funcionamiento del modelo basta con una especificación lineal, se ha añadido un término no lineal para considerar el hecho que cuando la economía está casi en el pleno empleo los salarios reales se aceleran. Por lo tanto, la expresión [2.9] ahora pasará a ser:

$$\hat{w} = -\rho + jv + \frac{h}{1-v} \quad [2.24]$$

donde $\rho, j, h > 0$ son coeficientes que sirven para ajustar la tasa máxima de disminución de los salarios, el nivel de empleo de equilibrio y el nivel de aceleración de los salarios cuando el empleo se acerca al 100 % de la población activa. La curva tendrá la forma que se ilustra en la Figura 2.1.

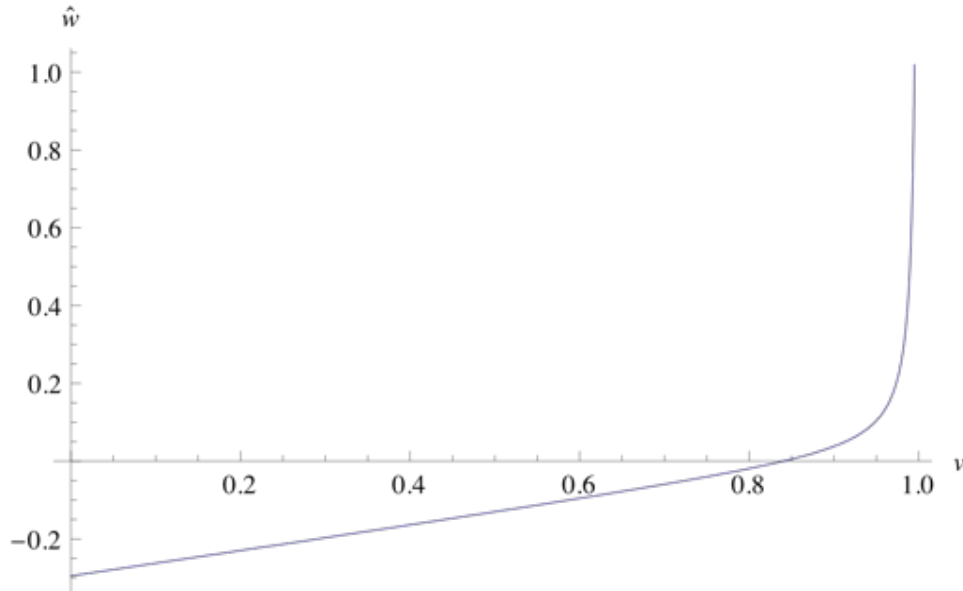


Figura 2.1 : *Función de reacción de los salarios*

Se ha elegido esta relación porque recoge muy bien el conflicto distributivo y hay muchos trabajos empíricos que la apoyan. Una de las últimas estimaciones de una curva de esta clase para largos periodos es la de Desai quien, partiendo de los datos de Phillips completadas hasta tiempo más recientes, confirma los resultados clásicos de Phillips que, además, reciben una segunda fuente de validación a partir de las series de participación de salarios en la renta nacional (Desai, 1984). Este tipo de función de salarios es totalmente

compatible con las modernas curvas de Phillips del llamado modelo neokeynesiano *standard* (Blanchard, 2008; Galí 2008) así como con los modelos postkeynesianos con expectativas (Semmler et al., 2009, Flaschel, 2009).

Los requisitos que debe cumplir la función de inversión exigen que sea necesariamente una función no lineal, bien porque se defina por intervalos, bien porque la misma relación funcional sea no lineal. Hay varias especificaciones posibles que podrían cumplir los requisitos anteriores. De entre ellas destacan la especificación por intervalos de Kaldor o la especificación no lineal de Goodwin (Kaldor, 1940; Goodwin, 1951). Ambos casos pueden recogerse con un polinomio de tercer grado que proporciona una aproximación suficiente a las variaciones de la inversión en su transición desde el mínimo al máximo. Estas especificaciones son las que se usan en toda una serie de trabajos dónde se desarrolla el modelo de Kaldor (Chang y Smyth, 1971; Lorenz, 1987; Skott, 1989a, b; Puu, 1991; Lorenz, 1993). Asimismo, también se emplean estas funciones en otros artículos dónde se desarrolla el modelo de Goodwin (Thio, 1984; Goodwin y Punzo, 1987; Chiarella, 1990; Goodwin, 1990; Lorenz, 1993). En otros trabajos se emplean funciones de inversión de tipo logístico, que pueden dar lugar a dinámicas muy complejas (Dana y Malgrange, 1983; Goodwin, 1990).

El uso de especificaciones relativamente complicadas como las acabadas de mencionar no siempre es compatible con un funcionamiento razonable del modelo, con parámetros y resultados realistas. Por ejemplo, en una primera versión del modelo que aquí se presenta se trató de especificar el modelo de Skott y se encontró que la función de inversión había de ser bastante más compleja que una simple ecuación cúbica si se quería obtener la forma teórica genérica que Skott emplea en los gráficos (Skott, 1989a, b). En ninguna de las especificaciones que se han probado se consiguió generar un ciclo económico de características aceptables desde la evidencia empírica. Además, se puede demostrar que no hay ningún polinomio de tercer grado que pueda representar la función de inversión y que, al mismo tiempo, cumpla todas las características que Skott exige a las funciones genéricas de su modelo².

La solución que se ha adoptado aquí es, de nuevo, emplear las especificaciones más sencillas posible. En este sentido, la función de inversión de Jarsulic es muy razonable y cumple todas las propiedades exigibles (Jarsulic, 1986,1988). Siguiendo este autor, la relación [2.8] se puede especificar cómo:

$$\hat{g} = a + bg - cg^2 - d\omega, \quad a,b,c,d > 0 \quad [2.25]$$

Esta ecuación recoge en una forma muy simple tres elementos muy importantes que toda función de inversión agregada debe considerar. En primer lugar, la existencia de un elemento autónomo de la inversión a que, en caso necesario, puede reescribirse con el fin de recoger la formación de expectativas. En segundo lugar, contiene un mecanismo de acelerador flexible, que viene incorporado en los términos en g y g^2 , y que puede considerarse el mecanismo fundamental de la función de inversión agregada. Finalmente, incluye un término que refleja la distribución de la renta y, por lo tanto, el comportamiento

² En el modelo de Skott, si la función de inversión es un polinomio de tercer orden, entonces la función de la tasa de variación del empleo es necesariamente un polinomio de orden dos y, por lo tanto, presenta un tramo creciente y un tramo decreciente dentro del intervalo relevante $0 < v < 1$, en lugar de la curva creciente que supone Skott (Skott, 1989a, b). Esto implica que para lograr formulaciones adecuadas hace falta emplear funciones todavía más complejas sin que esto signifique añadir más capacidad de explicación al modelo.

de los beneficios agregados. Es de destacar que la expresión [2.25] coincide casi del todo con las funciones de inversión agregadas que se han estimado para economías como por ejemplo la española (Andrés, et. al., 1990, 1991). El único elemento diferencial es que la ecuación [2.25] no incorpora todavía ningún elemento que considere el efecto del coste de financiación, pero es posible añadir un sector financiero al modelo y establecer el vínculo con la función de inversión (González y Sánchez, 1994, González Calvet, 1999).

Con las especificaciones [2.23], [2.24] y [2.25] se tendrá que, a partir de la expresión [2.15] la tasa de crecimiento del producto se expresará:

$$\hat{y} = a - \delta + (1+b)g - cg^2 - d\omega - \frac{\omega(-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega} \quad [2.26]$$

y, sustituyendo esta expresión en la ecuación de movimiento de la tasa de empleo [2.16] se tendrá que:

$$\hat{v} = a - \delta - \alpha - n + (1+b)g - cg^2 - d\omega - \frac{\omega(-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega} \quad [2.27]$$

y, en consecuencia, el sistema dinámico consistirá en las tres ecuaciones diferenciales:

$$\dot{g} = g[a + bg - cg^2 - d\omega] \quad [2.28 \text{ a}]$$

$$\dot{\omega} = \omega[-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v}] \quad [2.28 \text{ b}]$$

$$\dot{v} = v[a - \delta - \alpha - n + (1+b)g - cg^2 - d\omega - \frac{\omega(-\alpha - \rho + jv + h/(1-v))}{1-\omega}] \quad [2.28 \text{ c}]$$

2.4.2 Análisis de la estabilidad

El equilibrio se obtendrá, como antes, igualando los segundos términos de las ecuaciones a cero. De la ecuación [2.28 c] se obtiene que, en el punto crítico, $g^* = \delta + \alpha + n$, con el fin de que $\dot{v} = 0$, puesto que en equilibrio, $\hat{g} = 0, \hat{\omega} = 0$. Asimismo, de la expresión [2.28 a], se despeja el valor de ω^* que hace $\dot{g} = 0$, dado g^* . Por último, de la expresión [2.28 b] se despeja v^* que hace $\dot{\omega} = 0$. En este último caso se encuentran dos valores de v , uno de los cuales es, por construcción, mayor que 1 y que no tiene significado económico.

Debido a la forma de las funciones, sólo hay un solo punto crítico, a excepción del origen de coordenadas.

Para el análisis de la estabilidad local del equilibrio se obtiene el jacobiano del sistema:

$$J = \begin{bmatrix} a + 2bg - 3cg^2 - d\omega & -gd & 0 \\ 0 & -\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v} & \omega[j + \frac{h}{(1-v)^2}] \\ v(1+b) - 2vcg & -vd - \frac{-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v}}{1-\omega} & \frac{a - \delta - \alpha - n + (1+b)g - cg^2 - d\omega - \omega(-\alpha - \rho + 2jv + \frac{h}{(1-v)} + \frac{vh}{(1-v)^2})}{1-\omega} \end{bmatrix} \quad [2.29]$$

que, evaluado en el punto crítico, queda reducido a:

$$J_A = \begin{bmatrix} bg - 2cg^2 & -gd & 0 \\ 0 & 0 & \omega[j + \frac{\omega h}{(1-v)^2}] \\ v(1+b - 2cg) & -vd & -\frac{v\omega(j + h/(1-v)^2)}{1-\omega} \end{bmatrix} \quad [2.30]$$

La ecuación característica del sistema toma la forma:

$$-\phi^3 + \phi^2[bg - 2cg^2 - \frac{v\omega(j + \frac{h}{(1-v)^2})}{1-\omega}(2cg^2 + 1)] + \phi v\omega(j + \frac{h}{(1-v)^2})(\frac{bg}{1-\omega} - d) - gvd\omega(j + \frac{h}{(1-v)^2}) = 0 \quad [2.31]$$

Dado que la ecuación es de tercer grado con coeficientes reales, entonces hay, como mínimo, una raíz real. Aun así, no se puede estar seguro de qué signo tomarán los coeficientes de los otros términos, a excepción del término independiente, que es negativo. Como máximo, podrían haber dos cambios de signo cosa que, según la regla de los signos de Descartes, implicaría que el número de raíces positivas sería o dos o cero. En cualquiera de ambos casos, el signo del término independiente debería ser positivo, pero resulta que es negativo. En consecuencia, todas las raíces reales de la ecuación característica serán negativas. Finalmente, el número de raíces negativas será una o tres, puesto que por el teorema fundamental del álgebra, en las ecuaciones polinómicas con coeficientes reales las raíces complejas aparecen en pares conjugados.

Por lo tanto, se pueden dar los siguientes casos: (a) Las tres raíces son negativas. En este caso, en el punto crítico el sistema es asintóticamente estable (Hirsch y Smale, 1974; Guckenheimer y Holmes, 1990; Arrowsmith y Place, 1992). (b) Hay una raíz negativa y dos raíces complejas conjugadas con la parte real negativa. Nuevamente, el sistema es asintóticamente estable pero la aproximación al equilibrio sigue una trayectoria cíclica decreciente en dos de las tres direcciones del espacio de fases (Hirsch y Smale, 1974; Guckenheimer y Holmes, 1990; Arrowsmith y Place, 1992). (c) Hay una raíz negativa y

dos raíces complejas conjugadas con la parte real positiva. Entonces el sistema será localmente inestable y presentará oscilaciones divergentes en dos de las direcciones del espacio de fases (Hirsch y Smale, 1974; Guckenheimer y Holmes, 1990; Arrowsmith y Place, 1992).

En principio no hay ninguna razón para pensar que se da una u otra situación, puesto que depende exclusivamente de los valores que tomen los diferentes parámetros. Lo que está claro es que las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema como el descrito presente fluctuaciones sostenidas es que el equilibrio sea localmente inestable y que se pueda acotar un subespacio cerrado e invariante en torno al punto crítico, en el cual entren todas las trayectorias y no vuelvan a salir. En el caso del sistema económico, estas cotas existen de forma natural, puesto que $0 < \nu, \omega < 1$, $0 \leq g \leq \bar{g}$. Aun así, un sistema que fluctuara según estas cotas presentaría unas oscilaciones catastróficas, con muy poca relación con la economía real. Pese a ello, el abanico de posibilidades que abre el modelo es lo suficiente amplio como para tratar de precisar más.

Una de las situaciones que pueden darse consiste en que el módulo de las raíces complejas sea positivo pero muy pequeño en valor absoluto -próximo a cero- y que, en comparación, el valor absoluto de la raíz negativa sea grande. Si se comprueba que, al variar los valores de algún parámetro, los módulos de las dos raíces complejas se van volviendo más pequeños y acaban siendo negativos, entonces, dado que las funciones son continuas, diferenciables y de comportamiento suave, dado que los módulos de las raíces complejas se hacen cero y dado que la derivada del módulo respecto del parámetro en este punto es diferente de cero, se podrá aplicar el teorema de la bifurcación de Hopf y existirán soluciones periódicas. Estas soluciones periódicas serán ciclos límite estables o serán soluciones periódicas repelidas dependiendo de los valores que tome el coeficiente del término de segundo orden de la expansión de Taylor del sistema en el punto crítico no hiperbólico -el centro- (Verhulst, 1985; Guckenheimer y Holmes, 1990; Perko, 1991; Arrowsmith y Place, 1992).

Según a qué variable corresponda cada raíz se puede dar una situación en que aparecen estos ciclos límite, de forma que el sistema fluctuaría en un entorno cerrado, mucho más pequeño que las cotas que fijan las condiciones económicas generales.

En el modelo esta situación puede darse cuando la raíz negativa corresponde a g y tiene un valor absoluto lo suficientemente grande en comparación al módulo de las raíces de ω , ν . Esto se explica porque las variaciones de la tasa de acumulación afectan directamente al nivel de empleo y, por lo tanto, a los salarios. Pero, además, g depende de ella misma y no depende directamente del nivel de empleo, sino a través de la curva de Phillips. En consecuencia, g tiene una cierta autonomía o inercia en su funcionamiento que, para según qué parámetros, le permite ejercer un control efectivo sobre las otras variables.

En la Figura 2.2. se representa el ajuste hacia una fluctuación límite en el supuesto de que se cumplan las condiciones anteriores. En la Figura 2.3. se muestra la serie temporal que resulta cuando el sistema está sobre el ciclo límite, después de que t se ha hecho muy grande ($t = 1000$).

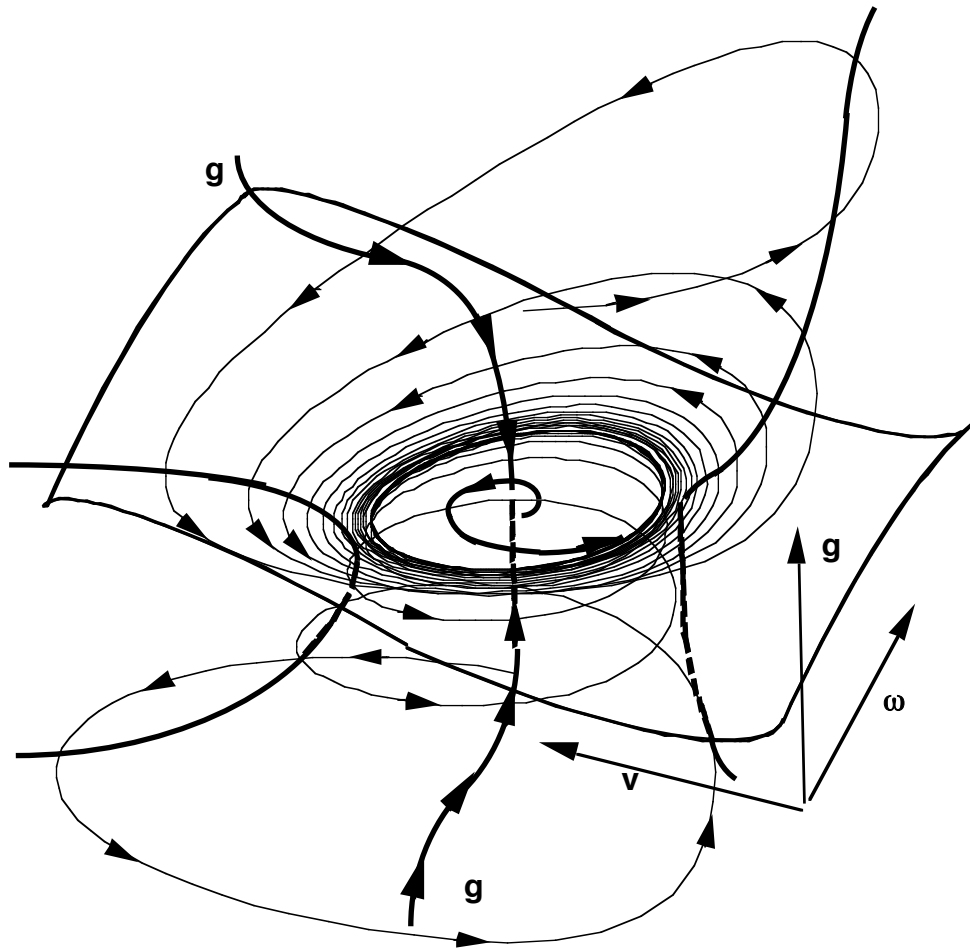


Figura 2.2: Diagrama de flujos del sistema de ecuaciones no lineal en el espacio v - ω - g

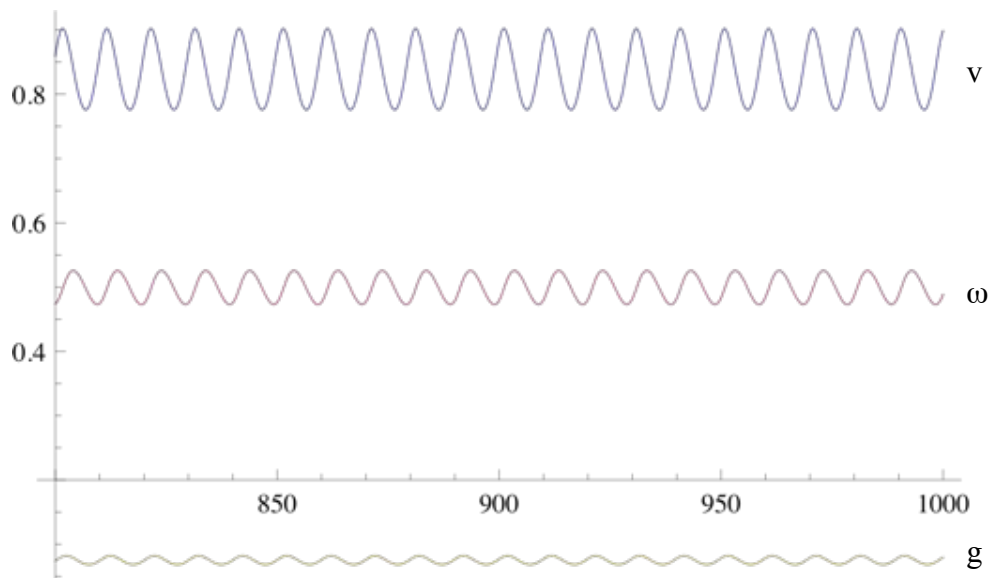


Figura 2.3: Serie temporal desde $t = 800$ hasta $t = 1000$ periodos de tiempo

El problema, por lo tanto, consiste en ver si hay alguna especificación razonablemente realista de los parámetros que permitan la existencia de un entorno acotado estable como el que se ilustra a la Figura 2.2 y, de ser así, ver cómo varía este comportamiento ante cambios en los parámetros. Con tal fin, hay que realizar simulaciones

numéricas con algún algoritmo adecuado. La elección del algoritmo es importante porque el diferente grado de precisión de la simulación numérica puede llevar a errores de percepción cualitativa del sistema (Gerald y Wheatley, 1989; Lorenz, 1993) como, por ejemplo, pensar que hay un atractor caótico donde sólo hay un espacio estable (*stable manifold*) (Lorenz, 1993). En el caso de atractores caóticos, la diferente precisión en el cálculo numérico lleva a resultados cualitativa y cuantitativamente distintos, tal y como puede comprobarse, por ejemplo, con la ecuación de Duffing o con el atractor de Lorenz (Guckenheimer y Holmes, 1990; Arrowsmith y Place, 1992; Medio, 1992).

2.4.3 Simulación y análisis de los parámetros

En las simulaciones que se muestran y, siguiendo el consejo de Lorenz, se han empleado dos algoritmos diferentes muy precisos y no se ha apreciado ninguna diferencia entre ellos.

La estrategia a seguir para elegir los parámetros debe empezar por unos valores realistas y proceder después a la calibración precisa de sus los valores hasta que el comportamiento del sistema sea lo más próximo posible a las series observadas en la economía real. En el modelo que nos ocupa la primera especificación realista ya produjo unas raíces características de valores adecuados y la simulación mostró que se daban comportamientos oscilatorios acotados. Después se procedió al reajuste de los parámetros para que los resultados del modelo tuvieran el orden de magnitud de los datos de la economía española

En la tabla 2.1. se especifican los valores de los parámetros, los valores de las raíces características y los valores de las variables en el equilibrio.

Parámetros	$a = 0.87,$	$b = 5.5,$	$c = 6,$	$d = 2.5$
	$n=0.000,$	$\alpha = 0.01,$	$\delta = 0.065$	
	$\rho = 0.3,$	$j = 0.32,$	$h = 0.005$	
Raíces características	$\phi_1 = 0.00817898 + 0.626811 i$			
	$\phi_2 = 0.00817898 - 0.626811 i$			
	$\phi_3 = -0.103107$			
Valores de equilibrio	$v = 0.839903$			
	$\omega = 0.4995$			
	$g = 0.075$			
Duración aproximada del ciclo	10 años			

Tabla 2.1: Parámetros de simulación, raíces características y equilibrio

De la tabla anterior destaca que, en primer lugar, el nivel de desempleo de equilibrio -el 16 %- y la participación de los salarios en el PIB -50 %- corresponden a los de la economía española. Por otra parte, la tasa de acumulación de equilibrio corresponde a una tasa de inversión del 18.75 % del PIB, en equilibrio, tomando una relación capital producto de 2.5 (Corrales y Taguas, 1991). En lo referente al comportamiento de los

salarios reales, los parámetros elegidos implican que el salario real varía un punto porcentual por cada tres puntos de variación de la tasa de empleo, excepto a partir de una empleo de más del 90 % puesto que los salarios se aceleran. Se ha tomado un crecimiento nulo de la población activa y un crecimiento de la productividad del 1 % anual. Se ha tomado una tasa de depreciación del 6.5 % según los datos de la contabilidad nacional del INE.

La evolución temporal de las tres variables v, ω, g se representa en la Figura 2.4 en la que destaca que los márgenes de oscilación de cada una de las variables se corresponden con los órdenes de magnitud observados para la economía española.

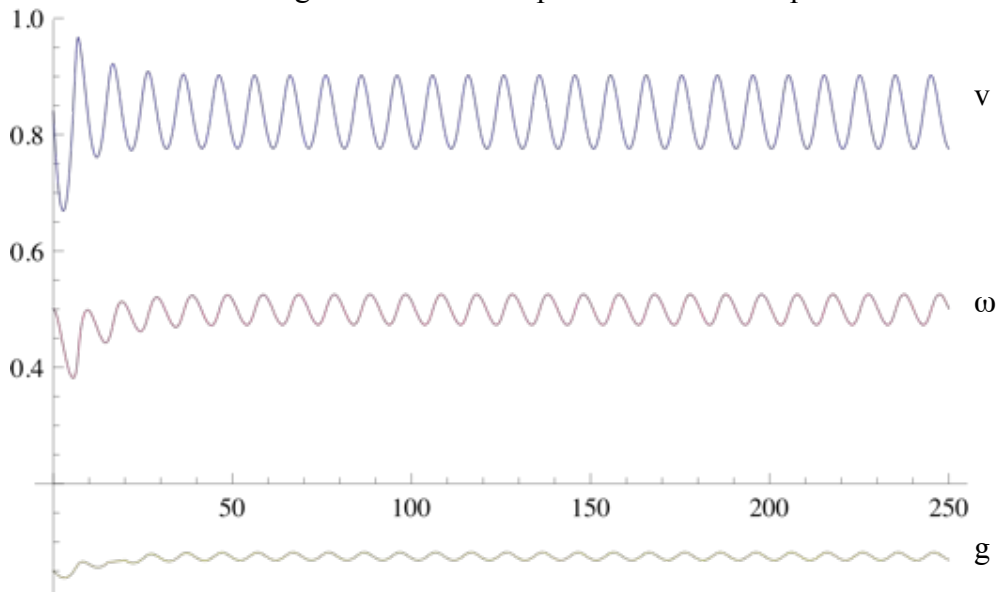


Figura 2.4: Evolución de v, ω, g , desde $t = 0$ hasta $t = 250$

Los valores iniciales adoptados para la simulación son $v = 0.8$, $\omega = 0.5$, $g = 0.1$. Los márgenes de fluctuación son, para el empleo, del 77 % al 92 %, para la participación de los salarios va del 46 % al 54 % y, para g va de 0.055 a 0.095, que representa fluctuaciones de la inversión bruta desde el 13.75% al 23.75 % del PIB.

La trayectoria en el espacio de fases y las direcciones dominantes en cada punto se representan a la Figura 2.5 en la que se han empleado los mismos parámetros y condiciones iniciales.

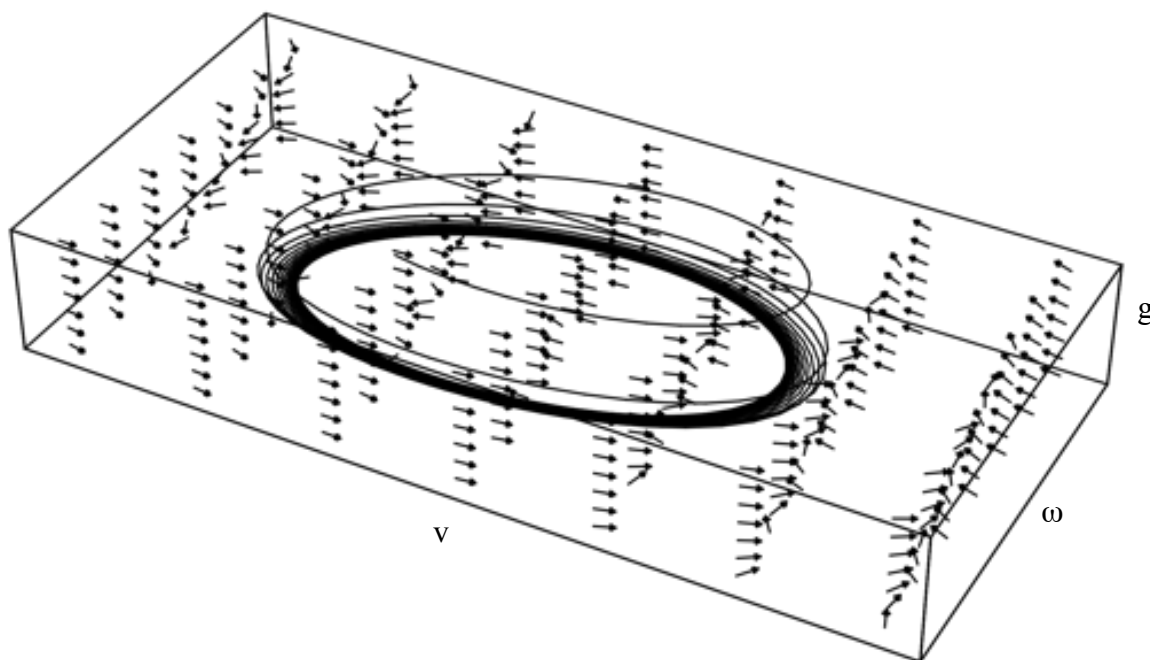


Figura 2.5: Trayectoria en el espacio de fases y dirección del movimiento

El comportamiento del modelo ante cambios de valor en los parámetros es el que se puede esperar. Así, por ejemplo, la estabilidad del equilibrio es muy sensible a la función de reacción de los salarios. Cuanto más rápidamente varían los salarios reales en relación a las variaciones en el empleo, más fácil es que las raíces se hagan negativas y el equilibrio sea localmente estable. Aún así, si el parámetro j se duplica y pasa a ser de 0.6 -es decir, por cada punto de cambio en el empleo la tasa de crecimiento de los salarios varía en 0.6 puntos- el sistema todavía mantiene la inestabilidad, cuando $n + \alpha = 0.015$. De forma análoga, si el nivel de empleo de equilibrio es más pequeño que el 84 %, el sistema se hace más inestable y las fluctuaciones se amplían. Asimismo, la inestabilidad aumenta cuanto más grande es $n + \alpha$.

Con los parámetros de la tabla 2.1, el sistema se vuelve inestable a partir de valores de $n + \alpha = -0.00575$, pero si aumenta el parámetro d , que recoge la sensibilidad de la inversión a la distribución de la renta, el sistema aumenta su inestabilidad y permite tasas de crecimiento de la población y la productividad muy negativas. Asimismo, un aumento del valor del coeficiente a -la acumulación autónoma- estabiliza el modelo, pero si disminuye, aumenta la inestabilidad. En cuanto al parámetro b , cuanto más grande más inestable es el modelo y si se hace lo suficiente grande en relación a d -aproximadamente, si $b > 4d$ -, entonces se produce una bifurcación, la raíz negativa cambia de variable y el sistema toma los valores extremos entre los cuales está acotado.

En cualquier caso, el análisis numérico muestra que el comportamiento cíclico del sistema se da dentro de un rango muy amplio de valores realistas de los parámetros lo cual sugiere que las fluctuaciones económicas pueden ser correctamente descritas mediante modelos sencillos, como el que aquí se presenta, que no necesitan de hipótesis demasiado atrevidas.

2.5 Interpretación económica del modelo básico

La dinámica cíclica del modelo de la sección anterior tiene una interpretación económica directa y clara. El mecanismo de las fluctuaciones endógenas viene generado por la interacción entre acumulación y distribución.

Cuando aumenta la acumulación, aumenta la demanda de mano de obra y esto hace aumentar los salarios. Al aumentar los salarios sigue creciendo la demanda y, a través del mecanismo acelerador, crece la inversión a un ritmo todavía más rápido y aumenta más el empleo. Pero a medida que el empleo va llegando a niveles elevados, los beneficios empiezan a erosionarse debido a la aceleración de los salarios mientras que, por otro lado, empiezan a aparecer excesos de capacidad porque todas las empresas han ampliado la capacidad durante la expansión. Así, a la pérdida de posiciones distributivas por la presión salarial se añade un exceso de capacidad instalada y una mayor competencia. Como resultado, decae la rentabilidad de las empresas y se frena la inversión. El freno de la inversión trae, de nuevo por el efecto acelerador, a una mayor caída de la inversión, que arrastra consigo al empleo y con él los salarios. La caída del empleo y de la inversión no tendría fondo de no ser por dos elementos: la inversión autónoma y la caída de los salarios reales. Cuando los salarios han caído lo suficiente y se ha eliminado capacidad productiva, por el efecto de la depreciación, la inversión vuelve a ser atractiva y recomienza el ciclo.

Desde el punto de vista económico, cuanto más rápidamente suban y bajen los salarios en relación al nivel de empleo, más rápidamente reaccionará la inversión. Por esto el sistema se hace más estable si los salarios reales son más flexibles. De forma análoga, si la inversión es muy sensible a los salarios, aumentará la inestabilidad o si el efecto acelerador es muy importante en relación al efecto capacidad, la inversión y el sistema serán mucho más inestables. Por lo tanto, los comportamientos que se han observado para los cambios de valores en los parámetros j , b , d son los que, económicamente, cabría esperar. Asimismo, cuanto más grande sea el componente autónomo de la inversión -o del gasto-, más estable será el sistema. Por otro lado, si el nivel de empleo correspondiente a un crecimiento nulo de los salarios reales es mayor, es lógico que el sistema sea más estable porque llega más rápidamente a las cotas superiores y los salarios se aceleran antes.

Finalmente, el efecto del crecimiento de la productividad y de la población activa sobre la estabilidad del sistema tiene el sentido esperable. Si $n+\alpha$ crece muy rápidamente, las fluctuaciones se ampliarán porque el sistema generará con mucha más facilidad excedentes de mano de obra en los ciclos recesivos y, en los ciclos expansivos, podrá crecer más rápidamente porque tardará más en llegar al pleno empleo. De forma análoga, si el crecimiento de la productividad y de la población son negativos, la economía se encuentra mucho más a menudo con escasez de mano de obra y, por lo tanto, los salarios llegan muy rápidamente al máximo, de forma que el ajuste de la inversión es más rápido, aunque puede dar lugar al colapso para valores muy negativos.

2.6 Ampliaciones del modelo

2.6.1 El sector financiero

Al definir el comportamiento de la tasa de acumulación g , se ha mencionado que faltaba una variable explicativa importante, el coste financiero, r . Los trabajos

econométricos atribuyen mucha importancia a los costes financieros de la inversión (Andrés, et. al., 1990; Andrés, et. al., 1991), aunque su influencia directa no puede ser demasiado grande, por la sencilla razón de que los proyectos de inversión productiva, dependen mucho más de las expectativas y de la capacidad de endeudamiento de la empresa (Kalecki, 1971). Lo que sí está claro es que los costes financieros afectan mucho a la demanda de vivienda y a la de productos duraderos y que, además, suelen seguir el patrón fluctuante de la coyuntura, por lo cual su influencia sobre la inversión agregada recogería los efectos de los cambios de expectativas, de los cambios en la demanda y de los problemas financieros.

Marc Jarsulic puso de manifiesto que la consideración del tipo de interés en un modelo muy sencillo, donde no se tienen en cuenta los efectos de los cambios en la distribución, puede generar la aparición de ciclos económicos (Jarsulic, 1988; Jarsulic, 1989; González, 1999). Pero, tal y como demuestran González y Sánchez (1994), el artículo de Jarsulic contiene numerosos errores que restringen el alcance de su análisis. Aún así, las consecuencias de la introducción del sector financiero cuando la distribución puede cambiar están poco estudiadas, salvo importantes excepciones (Keen 1995, 2001; Semmler et al, 2009). Por esta razón y porque, a lo largo de la historia, las catástrofes financieras han afectado profundamente al mundo de la producción, vale la pena entrar en el análisis del modelo cuando incorpora el sector financiero.

La especificación del sector financiero es muy simple y sigue el patrón de otros muchos trabajos con modelos similares (Di Matteo, 1984; Gandolfo y Padoan, 1984; Flaschel y Picard, 1986; Jarsulic, 1988; Jarsulic, 1989, González, 1999). Así, se considera que hay crédito endógeno, pero no se tiene en cuenta el mercado de los bonos, puesto que la ley de Walras permite ignorarlo y, por otra parte, no tendría demasiado sentido en un modelo agregado a precios constantes, excepto si se trata de explorar interacciones financieras mucho más sofisticadas. En consecuencia, se puede especificar una función muy sencilla de la oferta de crédito endógeno, del tipo

$$C^s = Cr^\alpha y^\beta \quad [2.32]$$

dónde r es el tipo de interés, $\alpha, \beta > 0$ son las elasticidades tipos de interés y renta de la oferta de crédito. Debe destacarse, que se habla de crédito en lugar de dinero con el fin de resaltar la capacidad del sistema financiero para crear dinero o activos. La C trata de reflejar el papel de la base monetaria y es una variable exógena manipulada por el banco central.

En cuanto a la demanda de crédito, puede formularse similarmente:

$$C^d = y^\gamma r^{-\kappa} \quad [2.33]$$

y $\gamma, \kappa > 0$ son también las elasticidades renta y tipo de interés de la demanda de crédito, con el signo habitual.

Si se toman tasas de crecimiento de la oferta y demanda de crédito queda:

$$\hat{C}^s = \varepsilon + \chi \hat{r} + \beta \hat{y} \quad [2.34]$$

$$\hat{C}^d = \gamma\hat{y} - \kappa\hat{r} \quad [2.35]$$

donde ε es la tasa de crecimiento de las reservas bancarias que depende, principalmente, de la política monetaria.

Por la condición de equilibrio del mercado financiero se tiene que las tasas de crecimiento de la oferta y demanda de crédito deben coincidir:

$$\varepsilon + \chi\hat{r} + \beta\hat{y} = \gamma\hat{y} - \kappa\hat{r} \quad [2.36]$$

Despejando la tasa de crecimiento del tipo de interés queda:

$$\hat{r} = \frac{\gamma - \beta}{\chi + \kappa} \hat{y} - \frac{\varepsilon}{\chi + \kappa} = \lambda_1 \hat{y} - \lambda_2 \quad [2.37]$$

Nótese que si bien el signo de λ_2 es siempre positivo, su valor puede acercarse rápidamente a cero, dependiendo de la política monetaria y del comportamiento de la demanda "especulativa" de crédito. Normalmente, su valor será reducido, en torno a algunas centésimas, porque la tasa de crecimiento de la base monetaria, que aproximadamente es ε , suele ser pequeña. En cuanto al valor y signo de λ_1 , la cuestión ya es más polémica y, de hecho, puede ir de $-\infty$ a $+\infty$. Aún así, el rango más probable se sitúa en valores positivos alrededor de la unidad.

Por otra parte, se debe modificar la función de inversión, introduciendo como nuevo argumento el tipo de interés. La forma más simple de hacerlo es emplear un término lineal que se añade a la expresión del cambio de la tasa de acumulación [2.25]:

$$\hat{g} = a + bg - cg^2 - d\omega - er, \quad a, b, c, d, e > 0 \quad [2.38]$$

Con el cambio de los condicionantes de la tasa de acumulación también variará la expresión de la demanda total. Así, la ecuación [2.26] ahora será:

$$\hat{y} = a - \delta + (1 + b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1 - \omega} \quad [2.39]$$

y, en consecuencia, se puede reescribir la ecuación del movimiento del tipo de interés:

$$\hat{r} = \lambda_1(a - \delta + (1 + b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1 - \omega}) - \lambda_2 \quad [2.40]$$

Lo mismo ocurrirá con la ecuación del movimiento del empleo, que ahora quedará como:

$$\hat{v} = a - \delta - \alpha - n + (1 + b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1 - \omega} \quad [2.41]$$

Como resultado de estos cambios, el sistema de ecuaciones diferenciales [2.28] incorpora una nueva ecuación, la del tipo de interés, y queda expresado de la siguiente manera:

$$\dot{r} = r \left[\lambda_1 (a - \delta + (1+b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega}) - \lambda_2 \right] \quad [2.42a]$$

$$\dot{g} = g(a + bg - cg^2 - d\omega - er) \quad [2.42b]$$

$$\dot{\omega} = \omega(-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v}) \quad [2.42c]$$

$$\dot{v} = v \left[a - \delta - \alpha - n + (1+b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(-\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega} \right] \quad [2.42d]$$

Con esta nueva configuración y, tal y como pasaba con el sistema original, hay un punto de equilibrio trivial en el origen de coordenadas del espacio de dimensión 4 en el que se mueve el sistema. Aún así, puede dejar de tener puntos de equilibrio no triviales.

Para buscar la existencia de equilibrios se empieza, como antes, por la ecuación del movimiento del empleo. De la ecuación [2.42d] se extrae directamente un valor de equilibrio para g , que se denominará $g^*_v = \alpha + n + \delta$, que corresponde a la tasa de crecimiento garantizado de Harrod. Pero, por otro lado, la ecuación del tipo de interés [2.42a] permite obtener otro valor de equilibrio independiente $g^*_r = \lambda_1/\lambda_2 + \delta$ que puede coincidir, o no, con el anterior y que, como se ve, viene completamente determinado por el sector financiero.

En consecuencia, sólo habrá una sola situación casual en la que el sistema estará en equilibrio completo, cuando $g^*_v = g^*_r$ y que no tiene porque ser estable. En todas las demás situaciones o bien se estará moviendo el empleo y los salarios o bien lo hará el tipo de interés, o ambos a la vez.

Unos pocos experimentos numéricos muestran que el sistema es capaz de exhibir comportamientos de toda clase, desde los puramente estables a los cíclicos, del pleno empleo al colapso total, o incluso, puede presentar fluctuaciones catastróficas, lo cual muestra que tiene una importante inestabilidad estructural (Vercelli, 2000). Aún así, el comportamiento es diferente según que g^*_v sea mayor, igual o menor que g^*_r .

En primer lugar hay que destacar que el sistema siempre acaba siguiendo la senda de acumulación más reducida. Esto es fácil de comprender considerando que tanto el salario como el tipo de interés pueden subir tanto como haga falta como reacción a una alta tasa de acumulación y, por lo tanto, acaban frenándola mientras que, ambas variables, tienen un techo inferior del que no pueden bajar. En consecuencia, las dos tienen capacidad ilimitada para frenar la economía, pero su capacidad de estímulo es limitada. Por lo tanto, la tasa de acumulación de equilibrio siempre quedará fijada en su mínimo.

Es interesante considerar qué pasa cuando $g^*_r < g^*_v$, porque entonces puede aparecer un ciclo de tipo financiero que se sobrepone al ciclo de acumulación de origen distributivo, cambiando el periodo y la intensidad. En esta situación, las grandes fluctuaciones, de carácter catastrófico aparecen con mucha facilidad para pequeños

cambios en los valores de los parámetros o, sencillamente con cambios de la situación inicial. Esto muestra que el modelo puede llegar a hacerse especialmente inestable o que puede ir al colapso. En la Figura 2.6 se ilustra uno de estos casos y se muestra que el ciclo tiende a reducirse, pero, que finalmente, empiezan a caer el empleo y el salarios hasta que el sistema se colapsa por la subida del tipo de interés o, en otros casos, entra en una zona de oscilaciones catastróficas.

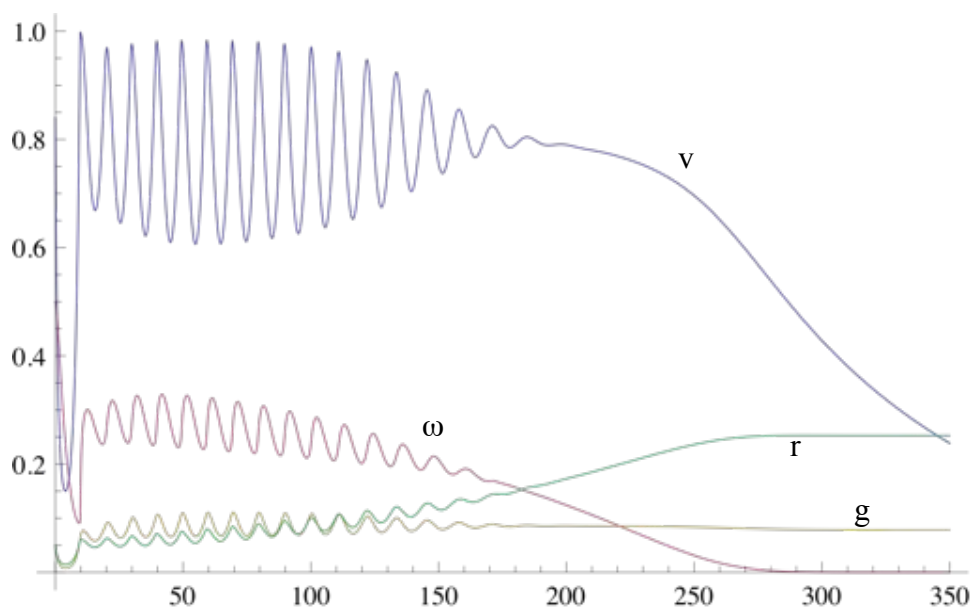


Figura 2.6: *Ciclo económico con crédito endógeno. Caso $g \cdot r < g \cdot v$*

En el caso inverso, cuando la tasa de acumulación de equilibrio determinada por el sector financiero es mayor que la proveniente de la ecuación de empleo, entonces la dinámica queda claramente dominada por el ciclo distributivo y el tipo de interés acaba tendiendo a cero, tal y como se ilustra a la Figura 2.7. Pero ésta no es la única situación, sino que también pueden llegar a darse oscilaciones catastróficas o, en otros casos, comportamientos estables.

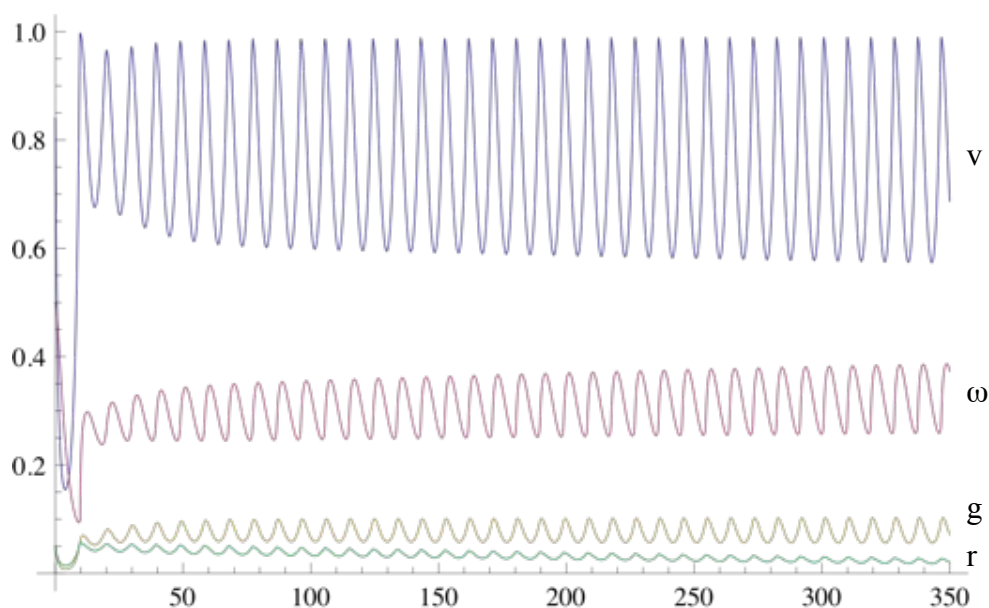


Figura 2.7: *Ciclo económico con crédito endógeno. Caso $g \cdot r > g \cdot v$*

En cualquier caso, parece que la inestabilidad del sistema aumenta cuando $g^*_r < g^*_v$, es decir, que por razones puramente financieras el sistema económico podría presentar situaciones de crecimiento más bajo con inestabilidad más alta.

Uno de los casos en que podría darse esta situación es cuando hay una política monetaria restrictiva. En estos casos, la tasa de crecimiento de la base monetaria, ε , es muy pequeña y la elasticidad-renta de la oferta de crédito, β , será más reducida. Por lo tanto, el coeficiente λ_2 tomará valores muy pequeños y λ_1 será mayor, con lo cual g^*_r se hará más pequeño e, incluso, se puede llegar a $g^*_r < g^*_v$.

Por otra parte, una alta elasticidad-renta de la demanda de crédito podría llevar a una situación similar si no fuera acompañada de un crecimiento más rápido de la base monetaria.

A pesar de su estructura mínima, el modelo es capaz de explicar la posibilidad de crisis de origen financiero que afectan profundamente el sector real de la economía. Las condiciones para que esto pueda pasar son varias. La primera, que la acumulación sea lo suficiente sensible a los cambios en el tipo de interés es decir, que el parámetro e tenga un orden de magnitud igual o superior a un tercio de d . La segunda condición consiste en que la tasa de acumulación de equilibrio determinada por el sector financiero sea inferior a la que determina el sector real. Finalmente, hace falta que el tipo de interés sea suficientemente sensible a los cambios en la acumulación.

2.6.2 Incorporación del sector exterior y del sector público

El modelo se puede ampliar con el fin de que pueda incluir algunos elementos adicionales, en especial, que tenga en cuenta el sector exterior puesto que puede ser una fuente importante de perturbaciones y, sobre todo, que incluya una especificación del sistema de seguridad social y del seguro de desempleo.

Al introducir estos cambios, la demanda de la economía ya no puede expresarse sólo en términos del gasto de inversión sino que ha de incluir los otros gastos autónomos. Asimismo, el multiplicador ya no tendrá la especificación kaleckiana sencilla sino que habrá de incluir los nuevos elementos como los tipos impositivos, la propensión a importar o la proporción entre salario y prestación de desempleo. En consecuencia, si la función de inversión está basada en el mecanismo del acelerador flexible deberá incluir los nuevos elementos de la demanda, cambiará la especificación de la inversión y, por lo tanto, cambiará la ecuación de la tasa de acumulación.

La especificación que se ha elegido para la función de inversión tiene la misma forma funcional que antes pero ahora se ha sustituido la tasa de acumulación por un argumento que recoge el movimiento de toda la demanda. La ecuación del movimiento de la tasa de acumulación queda, por lo tanto:

$$\hat{g} = a + b\mu(g + \frac{A}{K}) - c[\mu(g + \frac{A}{K})]^2 - d\omega \quad [2.43]$$

donde A es el gasto autónomo, que incluirá básicamente las exportaciones X (ya netas de las importaciones autónomas) y el gasto del sector público en bienes y servicios G . K es el stock de capital de la economía y μ el multiplicador kaleckiano del gasto autónomo. Debe notarse que el cociente A/K es el elemento que recoge los nuevos componentes del gasto autónomo y, dado que la ecuación se formula referida a la tasa de acumulación, entra en la ecuación dividido por K .

Las exportaciones se suponen totalmente exógenas puesto que, en este modelo, no se tiene en cuenta la variación de los precios y, por lo tanto, no se incluyen los tipos de cambio. Para la simulación se considerará que la demanda de exportaciones tiene una tasa de crecimiento fija y que, bajo ciertas circunstancias, puede presentar fluctuaciones autónomas. En cuanto a las importaciones, tienen un componente autónomo que ya se ha deducido de las exportaciones y un componente inducido que se supone que depende del nivel de renta interno según una relación lineal, con una propensión marginal a importar, $0 < m < 1$.

La especificación del sistema de protección social se ha hecho de una forma muy simple pero refleja bastante bien sus características principales. Por el lado de los gastos se ha supuesto que hay un sistema de pensiones que paga unas prestaciones proporcionales a los salarios vigentes. Se ha tomado este supuesto con objeto de simplificar el tratamiento formal, pero aún así, en términos de poder adquisitivo, el conjunto de las pensiones siguen muy de cerca las fluctuaciones de los salarios puesto que se determinan a partir de la masa salarial. De todas formas, el argumento puede mantenerse igualmente si la cuantía de la pensión se fija de otra forma, ajena al nivel corriente del salario. Con esta especificación, el gasto de pensiones tiene un grado muy elevado de autonomía, porque el número de pensionistas sólo depende de las condiciones demográficas. Así, el gasto en pensiones B será:

$$B = N \tau w p = N \tau p \omega y/L = \omega y \tau p/v \quad [2.44]$$

dónde N es la población activa, τ el número de jubilados por activo, w el salario vigente y p la proporción que la pensión representa sobre el salario. Por otra parte se ha introducido un seguro de desempleo en el cual la prestación es una proporción η del salario vigente. Si se considera que todos los trabajadores desempleados cobran el seguro, se tendrá que el gasto por desempleo, U será:

$$U = (N - L) \eta w = (N - L) \eta \omega y/L = \omega y (\eta/v - \eta) \quad [2.45]$$

Finalmente, se considera que ambos sistemas de protección social se financian con un impuesto proporcional sobre los salarios, la cotización al sistema de seguridad social q , y que no tienen ningún componente de capitalización.

Con el fin de aislar completamente los efectos del sistema de seguridad social del resto del sistema fiscal y del sector público, se ha optado por excluir los otros impuestos y gastos del sector público y considerar que son cero. Aún así, se pueden introducir fácilmente en el modelo, aunque la notación se alarga mucho más.

Considerando que tanto la población jubilada como la desempleada se comportan como los asalariados en lo referente al gasto, se tendrá que, en promedio, consumen todos sus ingresos y que, por lo tanto, la función de la demanda de consumo tomará otra forma:

$$C = \omega(1 - q)y + (1 - \omega)(1 - s)y + \omega y \left(\frac{\eta}{v} - \eta \right) + \omega y \frac{p\tau}{v} \quad [2.46]$$

El primer elemento corresponde al gasto de consumo de los asalariados que es igual a sus ingresos netos de cuotas de seguridad social, q . El segundo término es el consumo de los capitalistas. El tercer término es el consumo de los desempleados y finalmente, el último término recoge el consumo de los pensionistas.

A partir de la función de consumo se podrá obtener la expresión para la demanda efectiva:

$$y = \frac{Kg + A}{m + s - \omega \left(\frac{p\tau}{v} + \frac{\eta}{v} - \eta - q - s \right)} = \mu(Kg + A) \quad [2.47]$$

De acuerdo con estas especificaciones las ecuaciones de movimiento del sistema se podrán escribir de la siguiente manera:

$$\hat{g} = a + b\mu \left(g + \frac{A}{K} \right) - c \left[\mu \left(g + \frac{A}{K} \right) \right]^2 - d\omega \quad [2.48a]$$

$$\hat{\omega} = f(v) - \alpha \quad [2.48b]$$

$$\hat{k} = g - \delta \quad [2.48c]$$

$$\hat{X} = x(t) \quad [2.48d]$$

$$\hat{v} = \frac{-\mu\omega\hat{\omega} \left(\frac{p\tau}{v} + \frac{\eta}{v} - \eta - t + s \right) + \left(\frac{Kg(\hat{K} + \hat{g}) + \hat{A}A}{Kg + A} \right) - \alpha - n}{1 - \mu\omega \left(\frac{p\tau}{v} + \eta \right)} \quad [2.48e]$$

El sistema descrito por las ecuaciones [2.48] se caracteriza porque también puede presentar fluctuaciones cíclicas. Pero, además, ahora hay otros elementos autónomos que pueden influir mucho sobre su dinámica. Un elemento que puede producir cambios cualitativos muy importantes es el sector exterior. De hecho se ha introducido en el modelo con el fin de ver los efectos que puede producir la apertura al exterior y los efectos de las fluctuaciones internacionales.

Así, si la demanda de exportaciones tiene oscilaciones autónomas, entonces el sistema se comportará como un oscilador forzado puesto que, además de las fluctuaciones de origen interno, su demanda autónoma oscilará según el patrón de las exportaciones netas y, si la demanda de exportación y la magnitud de sus fluctuaciones es lo suficiente grande, el sistema puede llegar a presentar comportamientos muy extraños e incluso, caóticos (Goodwin, 1990).

En la Figura 2.8 se ilustra una típica oscilación forzada que aparece cuando las exportaciones siguen un crecimiento exponencial con una oscilación asociada, de la forma $X = X_0 e^{xt} + \kappa \sin(t/2)$ y donde los parámetros toman los valores de la tabla 2.2 (en ausencia de sector público):

$a = 1.2$	$b = 5$	$c = 6$	$d = 4.5$
$\delta = 0.065$	$\rho = 0.3$	$j = 0.32$	$h = 0.005$
$s = 0.85$	$a = 0.01$	$x = 0.0145$	$m = 0.1$
$n = 0.005$	$X_0 = 10$	$K_0 = 250$	$\kappa = 0.2$

Tabla 2.2 : *Parámetros de simulación del sistema con sector exterior*

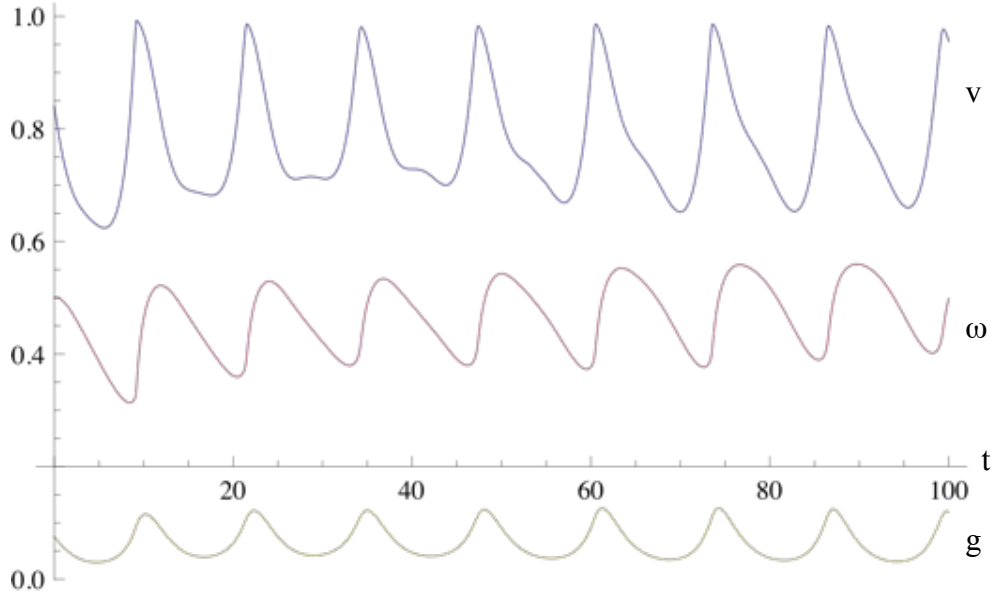


Figura 2.8: *Fluctuaciones de v , w , g en presencia de sector exterior*

El sistema [2.48] tendrá una tasa g^* de equilibrio que vendrá determinada por la ecuación del cambio en el empleo. En términos sintéticos, esta ecuación se puede escribir en términos de tasas de crecimiento de la demanda y del multiplicador:

$$\hat{v} = \hat{y} - \alpha - n = \hat{\mu} + (Kg + A) - \alpha - n \quad [2.49]$$

Dentro del multiplicador hay varios elementos que pueden variar: el nivel de empleo, la proporción pasivos/activos o los parámetros del sistema de seguridad social -por ejemplo, si hay algún sistema de ajuste del saldo presupuestario-. De entre ellos la tasa de empleo es la variable endógena y hace variar en sentido inverso al multiplicador.

De la expresión [2.48e], se puede despejar g^* . Suponiendo que existe este g^* que hace $\dot{v} = 0$, se tendrá que $\dot{w} = 0$ y que el multiplicador sólo varía para argumentos exógenos que, para facilitar el análisis, se pueden considerar momentáneamente fijos. En consecuencia, la expresión que se encuentra en g^* es relativamente sencilla:

$$g^* = \frac{\alpha + n + \delta \pm \sqrt{(\alpha + n + \delta)^2 - 4 \frac{A}{K} (\hat{A} - \alpha - n)}}{2} \quad [2.50]$$

Por lo tanto, g^* tomará valores positivos superiores a $\alpha+n+\delta$ siempre que la tasa de crecimiento de la demanda autónoma sea menor que la tasa de crecimiento de la productividad más la tasa de crecimiento de la población. Cuando la demanda autónoma crezca más rápidamente, entonces se tendrá que g^* tomará valores positivos sólo si A/K tiene valores lo suficiente pequeños o $\hat{A}$ no es demasiado grande. En general, cuanto más cerrada sea una economía más pequeño será A/K pero, probablemente más grande será $\hat{A}$. Pese a ello, dentro de un amplio margen de valores razonables se encuentra que hay un $g^*>0$ y, por lo tanto, un equilibrio, con $g^* < \alpha+n+\delta$. En los demás casos no hay equilibrio y, por lo tanto, las variables cambian permanentemente y podrían dar lugar a dinámicas muy complejas o catastróficas.

Es importante resaltar un aspecto del equilibrio. Si $\hat{A} > \alpha + n$, entonces el capital crece más lentamente que la demanda autónoma, aumenta el ratio A/K y g^* irá disminuyendo tendiendo asintóticamente a cero. Además, durante el proceso, el empleo irá aumentando por la presión de la demanda autónoma. La participación de los salarios también crecerá hasta llegar al máximo. Esta situación se da debido a la especificación demasiado simple del modelo puesto que, al crecer los salarios, los precios de venta de la producción también aumentarían y se frenarían las exportaciones.

Cabe decir que la incorporación de un elemento de gasto público autónomo que presentara fluctuaciones cíclicas -el ciclo político- tendría exactamente el mismo efecto de modificar la forma, la periodicidad y la amplitud de las fluctuaciones.

En cualquier caso, la dinámica del modelo es bastante compleja y el estudio de las simulaciones, con diferentes conjuntos de parámetros, ayudará a evaluar su comportamiento.